Управляемые системы, ИМ, ИК СО АН СССР 1969 г. выпуск 2.
УДК.519.1.

ОЦЕНКИ ДЛЯ РАДИУСА И ДИАМЕТРА СИЛЬНО СВЯЗНОГО ГРАФА

М.К.Гольдберг /Харьков/

В 1955 году Брэттон [2] поставил задачу получения точной нижней оценки диаметра сильно связного графа с заданными числами вершин и дуг. Им была выдвинута следующая гипотеза. Пусть L -сильно связный граф с n вершинами, m ребрами $(m > n)$ и диаметром δ. Тогда, если q и r -соответственно частное и остаток при делении $n-1$ на $\nu = m-n+1$ / ν -цикломатическое число графа/, то

$$\delta \geq \begin{cases} 2q-1 & \text{при } r=0, \\ 2q & \text{при } r=1, \\ 2q+1 & \text{при } r>1. \end{cases}$$

Как будет показано, справедливо неравенство даже несколько более сильное, именно*/

$$\delta \geq \left]\frac{2(n-1)}{\nu}\right[.$$

Паралельно с этим неравенством в работе устанавливается аналогичная оценка для радиуса:

$$\rho \geq \left]\frac{n-1}{\nu}\right[.$$

Оценка для радиуса достижима при всех сочетаниях n и ν ; относительно оценки для диаметра можно утверждать следующее: если она и отличается от точной, то не более чем на единицу, при этом указывается широкий класс случаев, когда оценка точна.

Обе оценки для радиуса и диаметра графа получены**/ в работе как простое следствие некоторых более сильных неравенств, в которые входят помимо указанных параметров также введенная автором дополнительная характеристика графа-длина наибольшего прямого пути.

В работе используется терминология, принятая в монографии [1] ; дополнительные необходимые понятия и обозначения приведены в § 1.

При доказательстве всех упомянутых оценок /§ 3/ существенно используется теорема 1 из § 2; нам представляется, однако, что эта теорема имеет и самостоятельное значение.

В § 4 исследуется точность тех оценок диаметра и радиуса, которые используют только числа вершин и дуг графа.

§ 1. Если L некоторый сильно связный граф, то через n, m, ν, ρ, δ всегда будем обозначать соответственно число вершин, число дуг, цикломатическое число, радиус и диаметр этого графа.

---

*/ $]\alpha[$ означает наименьшее целое a , для которого $\alpha \leq a$.

**/ В [3] оценка для диаметра доказывается непосредственно.

О п р е д е л е н и е. Путь μ графа L называется прямым, если из каждой его вершины, кроме, быть может, последней, в графе L выходит в точности одна дуга.

Через $\gamma(L)$ обозначим длину наибольшего прямого пути.

Дерево A называется накрывающим для графа L, если оно содержит все вершины этого графа, при этом ребра дерева принадлежат графу.

Дерево называется растущим из корня x_0, если для каждой его вершины x существует путь[ж/] в дереве, ведущий из x_0 в x.

Пусть A -произвольное конечное дерево, растущее из корня x_0. Будем говорить, что вершина y следует за вершиной x, если в дереве A существует путь, ведущий из x в y. В частности, из корневой вершины x_0 во всякую вершину x ведет единственный путь; будем обозначать его через C_x.

Если путь C_x состоит из k $(k \geqslant 0)$ дуг, то будем говорить, что вершина x находится на k-м ярусе. Корневая вершина x_0, таким образом, находится на нулевом ярусе.

Длину наибольшего пути дерева A назовем его высотой и будем обозначать через $h(A)$.

Поддерево дерева A, которое порождается множеством всех вершин, следующих за x, обозначим через $A(x)$. В частности, взяв в качестве x корневую вершину x_0, получим само дерево A.

Пусть A -некоторое дерево высоты $h = h(A)$, растущее из корня x_0. Поставим в соответствие каждой вершине x дерева число $\tau(x)$, равное высоте дерева $A(x)$, и будем говорить, что в дереве A вершина x находится на глубине $\tau(x)$.

Отметим следующие простые свойства функции $\tau(x)$:

1. Если вершина x' следует за вершиной x, то
$$\tau(x') \leqslant \tau(x) - 1.$$

2. Если $\tau(x) \neq 0$, то существует вершина x', следующая за x и такая, что
$$\tau(x') = \tau(x) - 1.$$

Пусть теперь L -некоторый сильно связный граф с цикломатическим числом ν и A -накрывающее дерево, растущее из заданной вершины x_0 графа. Каждой вершине x дерева A поставим в соответствие множество $B(x)$ дуг графа, которые

1/ не принадлежат дереву A,

2/ выходят из вершин поддерева $A(x)$.

Обозначим через $\nu(x)$ мощность множества $B(x)$. Очевидно, $\nu(x)$ зависит от выбора дерева A.

Нетрудно убедиться в справедливости следующих свойств функции $\nu(x)$; при этом мы полагаем зафиксированным накрывающее дерево A.

1. Если вершина x' следует в дереве A за вершиной x, то

[ж/] Допускаются тривиальные пути, состоящие из одной вершины.

$$\nu(x') \leq \nu(x).$$

2. Пусть Z -некоторое множество вершин дерева, из которых ни для каких двух не существует пути в дереве, ведущего из одной вершины в другую. Тогда

$$\sum_{z \in Z} \nu(z) \leq \nu(L).$$

§ 2. Теорема I. Пусть L -сильно связный граф с цикломатическим числом $\nu \geq 2$, γ -длина наибольшего пути и A -накрывающее дерево, растущее из некоторой вершины x_0 графа. Тогда для всех x справедливо неравенство:

$$\nu(x) \geq 1 + \left[\frac{\tau(x)+1}{\gamma+1}\right]. \qquad /\text{ж}/$$

Доказательство. Будем доказывать теорему индукцией по $\tau(x)$ -глубине вершины x в дереве A.

Если $\tau(x) = 0$, то вершина x является тупиковой в дереве A и, поскольку граф L сильно связный, $\nu(x) \geq 1$. Более того, в случае $\gamma = 0$ из каждой вершины графа выходит не менее двух дуг, и поэтому $\nu(x) \geq 2$. Оба эти неравенства объединяются следующим:

$$\nu(x) \geq 1 + \left[\frac{1}{\gamma+1}\right].$$

Пусть теперь $\tau(x) > 0$. Выделим в дереве A какой-нибудь путь $\mu = (x, x'_1, \ldots)$ длины $\tau(x)$, ведущий из вершины x в тупиковую вершину $\bar{x}$ дерева. Так как, очевидно,

$$\nu(x) \geq \nu(x') \quad \text{и} \quad \tau(x') = \tau(x) - 1,$$

то по индуктивному предположению

$$\nu(x) \geq 1 + \left[\frac{\tau(x)}{\gamma+1}\right]. \qquad /1/$$

Если

$$\left[\frac{\tau(x)+1}{\gamma+1}\right] = \left[\frac{\tau(x)}{\gamma+1}\right],$$

то неравенство /ж/ доказано. Поэтому будем считать, что

$$\left[\frac{\tau(x)+1}{\gamma+1}\right] = \left[\frac{\tau(x)}{\gamma+1}\right] + 1. \qquad /2/$$

Последнее означает, что число $\tau(x)+1$ нацело делится на $\gamma+1$, т.е.

$$\tau(x)+1 = (\gamma+1)\left[\frac{\tau(x)+1}{\gamma+1}\right]. \qquad /3/$$

Предположим, что для вершины x неравенство /ж/ не выполнено. Учитывая /I/, получаем

$$\nu(x) = 1 + \left[\frac{\tau(x)}{\gamma+1}\right] = \left[\frac{\tau(x)+1}{\gamma+1}\right].$$

В силу /2/ справедливо неравенство $\left[\frac{\tau(x)+1}{\gamma+1}\right] \geq 1$. Рассмотрим два случая.

I. $\left[\frac{\tau(x)+1}{\gamma+1}\right] > 1.$

Возьмем на пути μ вершину y глубины $\tau(y) = \tau(x) - \gamma - 1$. В силу индуктивного предположения,

$$\nu(y) \geq 1 + \left[\frac{\tau(x) - \gamma - 1 + 1}{\gamma + 1}\right] = \left[\frac{\tau(x) + 1}{\gamma + 1}\right]$$

Поскольку, очевидно, $\nu(y) < \nu(x) = \left[\frac{\tau(x) + 1}{\gamma + 1}\right]$, то получаем, что $\nu(x) = \nu(y)$.

Следовательно, $B(x) = B(y)$, и поэтому в графе L из x в y ведет прямой путь длины $\gamma + 1$, что невозможно.

Пусть теперь $\left[\frac{\tau(x)+1}{\gamma + 1}\right] = 1$. В силу /3/ это означает, что $\tau(x) = \gamma$.

В этом случае неравенство /Ж/ превращается в следующее: $\nu(x) \geq 2$.

Если допустить, что $\nu(x) < 2$, то остается, очевидно, только одна возможность: $\nu(x) = 1$. Последнее означает, что в дереве A из вершины x глубины γ выходит единственный путь μ, кончающийся тупиковой вершиной дерева, и из вершин этого пути выходит лишь одна дуга u, не принадлежащая дереву. Эта дуга графа с необходимостью выходит из тупиковой вершины дерева.

Пусть t - вершина, в которую дуга u входит. Тогда t принадлежит множеству вершин пути μ, так как противное означало бы существование в графе L прямого пути длины $\gamma + 1$. Но если t является одной из вершин пути μ, то получаем контур C, ни из одной вершины которого не выходит дуги, не принадлежащей контуру, что также невозможно, поскольку граф L сильно связный и $\nu \geq 2$. Таким образом, $\nu(x) \geq 2$. Теорема доказана.

С л е д с т в и е. Пусть L -сильно связный граф, не являющийся элементарным контуром, A - некоторое его накрывающее дерево, растущее из вершины x_0, и X_t - множество всех вершин глубины t. Тогда

$$|X_t|\left(1 + \left[\frac{t+1}{\gamma+1}\right]\right) \leq \nu(L).$$

Доказательство очевидно.

§ 3. Всюду в дальнейшем при выборе для сильно связного графа L накрывающего дерева A, растущего из корня x_0, мы будем требовать от последнего выполнения следующего свойства:

для каждой вершины x графа

$$\rho_A(x_0, x) = \rho_L(x_0, x).$$

Очевидно, если дерево удовлетворяет указанному условию, то его высота равна отклоненности /см.[I], стр. 131/$\rho(x_0)$ вершины x_0 графа.

Введем в рассмотрение следующие две функции $\varphi(\alpha, \beta)$ и $\psi(\alpha, \beta)$ целочисленных аргументов α и β:

$$\varphi(\alpha, \beta) = \sum_{t=0}^{\alpha-1} \frac{1}{1 + \left[\frac{t+1}{\beta+1}\right]},$$

$$\psi(\alpha, \beta) = \sum_{t=0}^{\alpha-2\beta-1} \frac{1}{2 + \left[\frac{t}{\beta+1}\right]} \qquad /\text{при } \alpha \geq 2\beta + 1 /.$$

Мы докажем следующие теоремы.

Т е о р е м а 2. Пусть L -сильно связный граф с n вершинами, цикломатическим числом ν, радиусом ρ и длиной максимального прямого пути γ. Тогда

$$\nu \geq \frac{n+1}{\varphi(\rho,\gamma)}.$$

Т е о р е м а 3. Пусть L - сильно связный граф, не являющийся элементаным контуром. Тогда

$$\nu \geqslant \begin{cases} 1+\dfrac{n-\gamma-1}{\delta-\gamma} & \text{при } \delta < 2\gamma, \\ \dfrac{n-1}{\gamma+\varphi(\delta,\gamma)} & \text{при } \delta > 2\gamma. \end{cases}$$

Из указанных теорем непосредственно следуют оценки для радиуса и диаметра сильно связного графа, использующие только числа дуг и вершин данного графа.

Т е о р е м а 4. Если L -сильно связный граф с n вершинами, m дугами и радиусом ρ, то

$$\rho \geqslant \frac{n-1}{m-n+1}.$$

Т е о р е м а 5. Пусть L - n -вершинный сильно связный граф, не являющийся элементарным контуром. Тогда для его диаметра справедлива оценка

$$\delta \geqslant \frac{2(n-1)}{m-n+1}.$$

Для доказательства последних двух теорем достаточно воспользоваться очевидными неравенствами: $\varphi(\alpha,\beta) \leqslant \alpha$ и $\varphi(\alpha,\beta) < \frac{\alpha}{2}-\beta$.

Приведем доказательство теоремы 2. Для этого возьмем какую-нибудь вершину x_0, для которой $\rho(x_0) = \rho$, и построим накрывающее дерево, растущее из этой вершины.

Для каждого $t\ (0 \leqslant t \leqslant \rho)$ определим множество X_t вершин дерева, положив

$$X_t = \{x \mid \tau(x) = t\}.$$

Очевидно, эти множества попарно не пересекаются, в сумме составляют множество всех вершин графа, и, кроме того, X_ρ состоит из одного элемента-корневой вершины x_0. Поэтому

$$n-1 = \sum_{t=0}^{\rho-1} |X_t|.$$

Если цикломатическое число $\nu = 1$, то есть граф является элементарным контуром с n вершинами, то для него $\gamma = \rho = n-1$, поэтому $\varphi(\rho,\gamma) = \rho = n-1$ и непосредственной подстановкой убеждается в справедливости теоремы.

В случае $\nu > 1$, воспользовавшись следствием из теоремы I, запишем

$$|X_t| \leqslant \frac{\nu}{1+\left[\frac{t+1}{\nu+1}\right]} \quad (t = 0,\ldots,\rho-1).$$

Суммируя полученные неравенства, заканчиваем доказательство теоремы 2.

Для того, чтобы доказать теорему 3, нам понадобится следующая

Л е м м а. Пусть L -сильно связный граф, не являющийся элементарным контуром, и X_0 -множество тупиковых вершин накрывающего дерева A, растущего из такой вершины x_0, которая является началом прямого пути длины γ. Тогда

$$|X_0|+1\leqslant \nu.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Цикломатическое число ν графа равно числу дуг, не принадлежащих накрывающему дереву A, а так как граф L сильно связный, то из каждой его вершины, в частности из вершин множества X_0, выходит, по крайней мере, одна дуга. Следовательно,

$$|X_0|\leqslant \nu.$$

Допустим, что $|X_0| = \nu$. Так как граф не является элементарным контуром, то $\nu \geqslant 2$, и поэтому $|X_0| \geqslant 2$.

Равенство $\nu = |X_0|$ означает, что каждая дуга графа, не принадлежащая дереву, выходит из какой-нибудь его тупиковой вершины и кроме того, из каждой тупиковой вершины выходит в точности одна дуга. По крайней мере, одна из этих дуг входит в корневую вершину x_0, что дает прямой путь длины $\gamma+1$. Следовательно, допущение $\nu = |X_0|$ неверно, и мы получаем $\nu \geqslant |X_0|+1$.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 3.

Пусть μ -какой-нибудь прямой путь длины γ и x_0 -его начальная вершина. Построим накрывающее дерево A, растущее из корня x_0. Очевидно, $\gamma \leqslant h(A) \leqslant \delta$.

Для каждого t $(0\leqslant t \leqslant h(A))$ определим множество X_t вершин дерева, положив

$$X_t = \{x \mid \tau(x) = t\}.$$

Тогда

$$n=\sum_{t=0}^{h(A)} |X_t|.$$

Поскольку для каждого $t \geqslant h-\gamma$ множество X_t состоит из одного элемента, предыдущее равенство можно записать в следующем виде:

$$n-1=\gamma+\sum_{t=0}^{h-\gamma-1} |X_t|.$$

Рассмотрим два случая.

1. $\delta \leqslant 2\gamma$. Легко видеть, что для всех t $(t \geqslant 0)$

$$|X_t| \leqslant |X_0|.$$

Поэтому

$$n-1\leqslant \gamma+(h-\gamma)|X_0| \leqslant \gamma+(\delta-\gamma)|X_0|.$$

Применив теперь лемму, получаем

$$n-1 \leqslant \gamma+(\delta-\gamma)(\nu-1),$$

откуда

$$\nu \geq 1 + \frac{n-1-\gamma}{\delta-\gamma}.$$

2. $\delta \geq 2\gamma$. Представим множество X всех вершин графа в виде объединения трех подмножеств $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, $X^{(3)}$, положив $X^{(1)} =$ множеству вершин прямого пути μ,

$$X^{(2)} = \bigcup_{t=0}^{\gamma-1} X_t, \qquad X^{(3)} = X \setminus (X^{(1)} \cup X^{(2)}).$$

Воспользовавшись леммой и очевидным неравенством $|X_t| \geq |X_{t+1}|$, запишем $n-1 \leq \gamma + \gamma(\nu-1) + |X^{(3)}| = \gamma\nu + |X^{(3)}|$.

Покажем, что

$$|X^{(3)}| \leq \nu\psi(\delta, \gamma).$$

Действительно, если $|X^{(3)}| \neq 0$, то $h \geq 2\gamma$, и поэтому

$$|X^{(3)}| = \sum_{t=\gamma}^{h-\gamma-1} |X_t|.$$

Применяя теперь следствие из теоремы I, получаем

$$|X^{(3)}| \leq \sum_{t=\gamma}^{h-\gamma-1} \frac{\nu}{1+\left[\frac{t+1}{\gamma+1}\right]} \leq \nu \sum_{t=\gamma}^{\delta-\gamma-1} \frac{1}{1+\left[\frac{t+1}{\gamma+1}\right]} = \nu \cdot \psi(\delta, \gamma).$$

Окончательно

$$n-1 \leq \gamma\nu + \psi(\delta, \gamma) \cdot \nu,$$

или

$$\nu \geq \frac{n-1}{\gamma + \psi(\delta, \gamma)}.$$

Доказательство теоремы закончено.

§ 4. Пусть $G_{\nu,n}$ -множество всех сильно связных графов с n вершинами и цикломатическим числом ν. Нетрудно проверить, что всегда

$$1 \leq \nu \leq (n-1)^2.$$

Положим

$$\rho(\nu, n) = \min_{L \in G_{\nu,n}} \rho(L),$$
$$\delta(\nu, n) = \min_{L \in G_{\nu,n}} \delta(L).$$

Задача определения функций $\rho(\nu, n)$ и $\delta(\nu, n)$ тривиальна в случае $\nu \geq n-1$, а также при $\nu = 1$.

Очевидно, что

$$\delta(1, n) = \rho(1, n) = 1,$$
$$\delta((n-1)^2, n) = \rho((n-1)^2, n) = 1.$$

Покажем, что при $n-1 < \nu < (n-1)^2$ верно $\delta(\nu, n) = 2$, $\rho(\nu, n) = 1$. Действительно, при указанных границах для цикломатического числа всегда $\delta(\nu, n) \geq 2$, $\rho(\nu, n) \geq 1$. С другой стороны, оценки достигаются для всякого графа, имеющего в качестве частичного графа розетку K с $n-1$ ветвью /см. [I], стр. 135/.

Прейдем теперь к случаю $2 \leq \nu \leq n-1$. Теоремы 4 и 5 дают оценки

$$\rho(\nu, n) \geq \left]\frac{n-1}{\nu}\right[,$$

$$\delta(\nu, n) \geq \left]\frac{2(n-1)}{\nu}\right[.$$

Покажем, что при $2 \leq \nu \leq n-1$

$$\rho(\nu, n) = \left]\frac{n-1}{\nu}\right[,$$

а

$$\delta(\nu, n) \leq \left]\frac{2(n-1)}{\nu}\right[+ 1 ,$$

причем если остаток r от деления $n-1$ на ν либо равен нулю или единице, либо больше $\frac{\nu}{2}$, то

$$\delta(\nu, n) = \left]\frac{2(n-1)}{\nu}\right[.$$

С этой целью для каждой пары целых ν , n $(2 \leq \nu \leq n-1)$ определим целое k такое, что $1 \leq k \leq \nu$ и

$$k\left]\frac{n-1}{\nu}\right[+ (\nu - k)\left[\frac{n-1}{\nu}\right] = n-1.$$

Пусть $n-1 = q \cdot \nu + r$ /q, r -целые, $0 \leq r < \nu$ /. Если $r = 0$, то полагаем $k = \nu$, если же $r > 0$, то искомое k равно r .

Рассмотрим теперь розетку с n вершинами и ν ветвями, из которых k имеют длину $1 + \left]\frac{n-1}{\nu}\right[$, а оставшиеся $\nu - k$ -длину $1 + \left[\frac{n-1}{\nu}\right]$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что радиус розетки равен $\left]\frac{n-1}{\nu}\right[$, а диаметр δ удовлетворяет неравенству

$$\delta \leq \left]2\,\frac{n-1}{\nu}\right[+ 1 ,$$

причем для $r = 0, 1$, либо $r > \nu/2$

$$\delta = \left]\frac{2(n-1)}{\nu}\right[.$$

Поступила в редакцию 8.4.1969 г.

Литература

1. К.Берж. Теория графов и ее применения. ИЛ, Москва, 1962.

2. D.Bratton. Efficient communication Networks, Cowles Comm. Disc. Paper, 2119 /1955/.

3. М.К.Гольдберг. О диаметре сильно связного графа. ДАН СССР, т.170, № 4, 1966.