

ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ РЕЖИМОВ И УСТОЙЧИВОСТИ КОНТАКТНЫХ АППАРАТОВ

М.Г.Слинько, Ю.Ш.Матрос, Л.А.Балясный, А.В.Засмолин

В настоящее время функциональные уравнения, решение которых позволяет определить количество стационарных режимов, получены для таких типов реакторов и реакторных схем, когда слой катализатора может быть представлен в виде объемов идеального смешения или идеального вытеснения /I-II/ /одномерные задачи/. Даже в этих сравнительно простых случаях функциональные уравнения могут быть получены лишь при значительных упрощениях математического описания процессов, протекающих в реакторе. Так, для реактора с внутренним теплообменом не учитывался радиальный перенос тепла и вещества /12/

На практике часто приходится сталкиваться с такими условиями работы реакторов, когда математическое описание нестационарного процесса представляет собой систему уравнений в частных производных с двумя и более пространственными координатами. В таких случаях пока единственно возможным оказывается использование численных методов анализа устойчивости стационарных режимов.

Пусть дана система уравнений с граничными и начальными условиями. Векторы $\bar{V}(\bar{\rho}, \bar{z})$ - стационарное решение этой системы, а $\bar{u}(\bar{\rho}, \bar{z}, t)$ - нестационарное решение. Стационарное /не зависящее от времени/ решение \bar{V} устойчиво, если 1/ существует настолько малое положительное ϵ , что при $\|\bar{u}_0 - \bar{V}\| < \epsilon$, решение $\bar{u}(\bar{\rho}, \bar{z}, t)$ определено для всех $t \rightarrow 0$, 2/ для всякого $\epsilon, > 0$ найдется такое положительное $\delta < \epsilon$, что при $\|\bar{u}_0 - \bar{V}\| < \delta$, $\bar{u}_0 = \bar{u}(\bar{\rho}, \bar{z}, 0)$ всегда $\|\bar{u}(\bar{\rho}, \bar{z}, t) - \bar{V}(\bar{\rho}, \bar{z})\| < \epsilon$, для всех $t > 0$, и асимптотически устойчиво, если $\|\bar{u}(\bar{\rho}, \bar{z}, t) - \bar{V}(\bar{\rho}, \bar{z})\| \rightarrow 0$, когда $t \rightarrow \infty$. Допустим, что мы каким-то образом получили нужный нам стационарный режим, и необходимо определить, устойчив ли он. Приняв этот стационарный режим как начальное условие для нестационарного режима, задаем значение одного из параметров, входящего в граничные условия, отличное от значения, при котором определялся стационарный режим, на величину ϵ . Если новое стационарное состояние отличается от прежнего на величину $\delta > 0$ и $\|\bar{u}(\bar{\rho}, \bar{z}, t) - \bar{V}(\bar{\rho}, \bar{z})\| < \delta$, $t > 0$, то исследуемый стационарный режим устойчив /малому изменению параметра отвечает малое изменение решения/. Произведя серию таких последовательных расчетов при возрастающем /убывающем/ скачкообразном изменении варьируемого входного параметра и принимая всякий раз за \bar{u}_0 решение предыдущего варианта, при достаточно длительном периоде времени мы можем получить, что при $\|\bar{u}_0 - \bar{V}\| < \epsilon$ $\|\bar{u}(\bar{\rho}, \bar{z}, t) - \bar{V}(\bar{\rho}, \bar{z})\| > \delta$, т.е. стационарный режим \bar{u}_0 неустойчив. Это значит, что те значения варьируемого параметра, при которых $\|\bar{u}(\bar{\rho}, \bar{z}, t) - \bar{V}(\bar{\rho}, \bar{z})\| > \delta$, соответствуют неустойчивому режиму.

Следует отметить также следующее немаловажное обстоятельство. Число решений функционального уравнения системы, если оно может быть получено аналитически, определяет число стационарных состояний /8-10/, но мы еще не можем, строго говоря, судить об устойчивости этих стационарных состояний /а только о неустойчивости/. Только при отсутствии колебательных режимов устойчивость данного стационарного режима может быть определена из анализа функционального уравнения. При численном решении наличие или отсутствие колебательных режимов определяется непосредственно из получаемых переходных режимов. Это позволяет сразу судить об устойчивости данного стационарного режима. Непосредственное определение вида переходного режима позволяет сделать еще один вывод, чрезвычайно важный для проблемы уменьшения времени счета на ЭЦМ. Дело в том, что при условии отсутствия колебательных переходных режимов инерционные свойства системы не влияют на устойчивость данного стационарного состояния. Это позволяет формально изменить значения некоторых коэффициентов в сотни раз и значительно уменьшить длительность расчета на ЭЦМ. На основе разработанной методики численного расчета на БЭСМ-6 было проведено исследование динамики и определение областей устойчивых стационарных режимов в реакторе с внутренним теплообменом. В качестве переменного параметра использовалась температура входа в реактор, в качестве решения - температура на выходе из реактора. Области устойчивости определялись при варьировании степени байпасирования, определяемой величиной φ .

Математическое описание и метод решения.

Математическое описание нестационарных процессов в реакторе на основе квазигомогенной модели с учетом тепловой емкости металлических трубок, а также массо-и теплоемкости коллекторов /рис.1/ имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \Pi_b \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{\vartheta} \frac{\partial x_i}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\rho_{e_b}} \frac{\partial^2 x_i}{\partial \xi^2} - \frac{\partial x_i}{\partial \xi} + \varphi_i &= \varepsilon \frac{\partial x_i}{\partial t'} ; \\ \Pi_T \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{\vartheta} \frac{\partial \theta}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\rho_{e_T}} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \Delta \theta_{ad_i} \varphi_i &= \beta \frac{\partial \theta}{\partial t'} , \end{aligned} \right\} \quad /1/$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta_{ст}}{\partial t'} &= A_1 (\theta_{\vartheta=1} - \theta_{ст}) - A_2 (\theta_{ст} - \theta_x) ; \\ \varphi \frac{\partial \theta_x}{\partial \xi} + A_3 (\theta_{ст} - \theta_x) &= A_4 \frac{\partial \theta_x}{\partial t'} . \end{aligned} \right\} \quad /2/$$

Начальные условия:

при $t = 0$:

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x_i^0 , \\ \theta &= \theta^0 , \\ \theta_x &= \theta_x^0 , \\ \theta_{ст} &= \theta_{ст}^0 . \end{aligned} \right\} \quad /3/$$

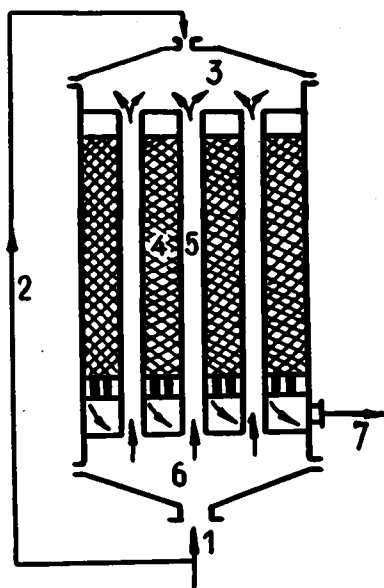


Рис. 1. Схема реактора с внутренним теплообменом:

1 - вход реакционной смеси; 2 - байпас, 3 - верхний коллектор, 4 - трубки с катализатором, 5 - межтрубное пространство, 6 - нижний коллектор, 7 - выход реакционной смеси.

Граничные условия:

при $\xi = 0$:

$$\left. \begin{aligned} \varphi \theta_x + (1 - \varphi) \theta_{x_0} &= A_5 \frac{\partial \theta}{\partial t'} - \frac{1}{Pe_T} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \theta; \\ A_5 \frac{\partial x_i}{\partial t'} &= \frac{1}{Pe_D} \frac{\partial x_i}{\partial \xi} - x_i; \end{aligned} \right\} \quad /4/$$

при $\xi = 1$:

$$\theta_x = \theta_{x_0};$$

$$\left. \frac{2}{Pe_D} \int_0^1 \frac{\partial x_i}{\partial \xi} g d\varphi = -A_6 \frac{\partial x_i}{\partial t'}; \right\} \quad /5/$$

$$\left. \frac{2}{Pe_T} \int_0^1 \frac{\partial \theta}{\partial \xi} g d\varphi = -A_6 \frac{\partial \theta}{\partial t'}; \right\}$$

при $\varphi = 0$:

$$\frac{\partial x_i}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = 0; \quad /6/$$

при $\varphi = 1$:

$$\frac{\partial x_i}{\partial \varphi} = 0; \quad \Pi_T \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = \gamma (\theta - \theta_{cr}). \quad /7/$$

Здесь:

$$t' = \frac{t}{\tau_k}; \quad \tau_k = \frac{L}{U}; \quad \xi = \frac{l}{L};$$

$$Pe_D = \frac{UL}{De}; \quad Pe_T = \frac{ULC_p}{\lambda_e}; \quad \Pi_D = \frac{D_r L}{UR_0^2}; \quad \Pi_T = \frac{\lambda_r L}{C_p UR_0^2 n};$$

$$\begin{aligned}\varphi_i &= k_i e^{\frac{\eta_i \theta}{1+b\theta}} f(x_1, x_2, \dots, x_n); k_i = k_{i0} \tau_k e^{\frac{-E_i}{RT_0}}; b = \frac{RT_0}{E_i}; \\ \eta_i &= \frac{E_i}{E_1}; \theta = \frac{T-T_0}{\frac{RT_0^2}{E_1}}; \theta_k = \frac{T_k-T_0}{\frac{RT_0^2}{E_1}}; \Delta T_{adi} = \frac{\Delta T_{adi}}{\frac{RT_0^2}{E_1}}; \Delta T_{adi} = \frac{q_i}{C_p}; \\ \beta &= \frac{C_k}{C_p}; \theta_{\sigma} = \frac{T_{\sigma}-T_0}{\frac{RT_0^2}{E_1}}; \gamma = \frac{\alpha_1 L}{UC_p R_0}; A_1 = \frac{4d\alpha_1 \tau_k}{(D^2-d^2)C_{ct}}; A_2 = \frac{4D\alpha_2 \tau_k}{(D_e^2-d^2)C_{ct}}; \\ A_3 &= \frac{4\alpha_2 DL}{d^2 UC_p}; A_4 = \frac{D_{an} - nD^2}{n d^2}; A_5 = \frac{4V_1}{\pi d^2 n L}; A_6 = \frac{4V_2}{\pi d^2 n L}.\end{aligned}$$

Для решения системы /1/ - /2/ был использован метод дробных шагов, уже применявшийся для системы уравнений вида /1/ при $\theta_k = \text{const}$, $\varepsilon = \beta = 1$ и граничных условиях, соответствующих стационарному режиму /13/. Используя метод дробных шагов, заменим систему дифференциальных уравнений /1/ - /2/ системой конечно-разностных уравнений:

$$u_{i+1} - B_i u_{i+1} + C_i u_{i-1} = -\varphi_i, \quad /8/$$

$$u_{j+1} - B_j u_j + C_j u_{j-1} = -\varphi_j, \quad /9/$$

$$\left. \begin{aligned}\theta_{\sigma j} &= \frac{\tau A_1 \theta_{j+1} + \tau A_2 \theta_{xj} + \theta_{\sigma j}}{1 + \tau A_1 + \tau A_2}, \\ \theta_{xj} &= \frac{\ell A_4 \theta_{xj}^k + \tau(\varphi - \ell A_3) \theta_{xj+1} - \ell A_3 \theta_{\sigma j+1}}{\varphi \tau + \ell A_4}.\end{aligned}\right\} \quad /10/$$

где u - вектор с компонентами $(x_1, x_2, \dots, \theta)$, а

$$B_i = \frac{2i-1}{i} \left(\frac{h^2 \varepsilon}{2\pi \Pi} + 1 \right), C_i = \frac{i-1}{i},$$

$$\varphi_i = \frac{(2i-1)h^2 \varepsilon}{2i \Pi \tau} (u_i + \frac{\tau}{\varepsilon} w_i),$$

$$B_j = \frac{2(\varepsilon \rho \ell^2 + 2\tau)}{\tau(2 - \rho \ell)},$$

$$C_j = \frac{2 + \rho \ell}{2 - \rho \ell}; \varphi_i = \frac{2\ell^2 \varepsilon \rho \ell}{(2 - \rho \ell) \tau} u_j.$$

Индексы k, j в системе /8/ и k, i в системе /9/ для удобства записи опущены. Системы уравнений /8/ - /9/ решаются методом одномерной прогонки /14/, рекуррентные соотношения которой имеют вид:

$$\mu_\lambda = \frac{1}{B_\lambda - C_\lambda \mu_{\lambda-1}}, \quad /11/$$

$$Q_\lambda = (Q_{\lambda-1} C_\lambda + \varphi_\lambda) \mu_\lambda, \quad /12/$$

где λ принимает значение $l = 1, 2, \dots, m$ либо $j = 1, 2, \dots, n-1$,

$$u_\lambda = u_{\lambda+1} \mu_\lambda + Q_\lambda \quad /13/$$

где λ принимает значения $i = m, m-1, \dots, 0$ либо $j = n-1, \dots, 0$.

Используя граничные условия /6/ для системы /8/ и /13/, находим:

$$\mu_0 = 1, Q_0 = 0, \quad /14/$$

$$u_{m+1} = \frac{Q_m \Pi + h \gamma u_c}{\Pi + h \gamma - \Pi \mu_m}, \quad /15/$$

/для компоненты x_1, x_2 вектора \bar{u} $\gamma = 0$ /.

Из граничных условий /4/ и /13/ находим:

$$\mu_0 = \frac{\tau}{\tau + l A_5 De + l \tau De}, \quad /16/$$

$$Q_0 = \frac{l De A_5 x_0}{\tau + l A_5 De + l \tau De} \quad /для компоненты x_1 , и x_2 вектора \bar{u} / и$$

$$Q_0 = \frac{\varphi \tau l De \theta_{x_0} + \tau l De (1 - \varphi) \theta_{x_1}^0 + A_5 l De \theta_0}{\tau + l A_5 De + l \tau De} \quad /17/$$

/для компоненты θ вектора \bar{u} /,

$$u_n^{k+1} = \frac{A u_n^k + \frac{\tau h^2}{l^2} \left\{ \sum_{i=1}^m Q_{i,n-1} (i - 0,5) + 0,25 [Q_{i,n-1} + Q_{m,n-1} (2m - 1)] \right\}}{\tau \beta}, \quad /18/$$

где

$$A = \frac{De A_b}{2}, \quad \beta = \frac{(1 - \mu_{n-1}) (m^2 - m) h^2}{2 l^2} + \frac{A}{\tau}$$

/для получения /18/ использован метод приближенного интегрирования по формуле трапеций/.

При обратной прогонке по $j = n-1, \dots, 0$ вместе с u_{ij}^k вычисляются сначала θ_{ej} , затем θ_{xj} по формулам /10/. Для вычисления θ_{xj} используется первое из условий /5/.

Решение нестационарной задачи имеется до тех пор, пока

$$|u^{k+1} - u^k| < \omega.$$

На основе описанного алгоритма составлена типовая программа на языке АЛГОЛ-60.

Определение областей устойчивости производилось следующим образом. При некотором наборе параметров по вышеизложенной методике рассчитывался стационарный режим. Он служил для соответствующей нестационарной системы в качестве начальных данных $/t' = 0/$. Задавалось достаточно малое возмущение одного из параметров - температуры входа θ_{x_0} и рассчитывался переходной режим. Если через некоторое время устанавливался новый стационарный режим в достаточно близкой окрестности прежнего стационарного режима, это доказывало устойчивость как первоначального, так и вновь полученного режима при малых отклонениях начальных условий /устойчивость "в малом", которая только и рассматривалась в этой работе/. Если же при малом возмущении новый стационарный режим устанавливался в области, достаточно далекой от прежнего, это доказывало, что исследуемый режим лежит на "границе" устойчивости. Таким путем рассчитывались оба устойчивых стационарных режима - "верхний" /высокотемпературный/ и "нижний" /"средний" режим неустойчив/. На рис. 2 показаны зависимости выходного параметра - температуры на выходе из реактора θ_{in} в стационарном режиме от температуры входа θ_{x_0} . При различных значениях степени байпасирования φ получались кривые, состоящие

из двух ветвей устойчивых стационарных состояний.

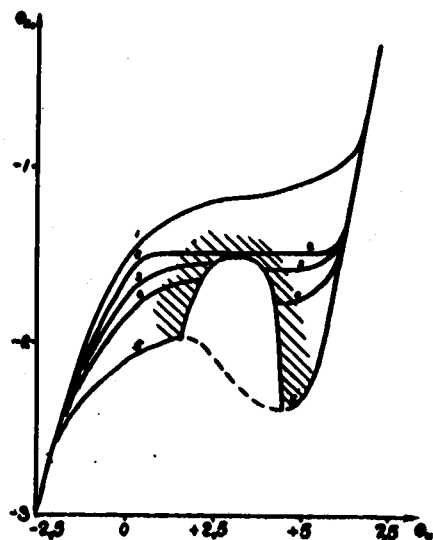


Рис. 2. Область неустойчивых режимов в реакторе с внутренним теплообменом в зависимости от величины φ .

$1/\varphi = 0$; $2/\varphi = 0,1$; $3/\varphi = 0,4$; $4/\varphi = 0,7$; $5/\varphi = 1$;
 $\Pi_D = 11,52$; $\Pi_T = 20,16$; $Pe_D = 5000$; $\beta = \epsilon = 1$; $Pe_T = 286$;
 $\Delta\theta_{ad1} = 8,85$; $\Delta\theta_{ad2} = 9,85$; $k_1 = 0,62$; $k_2 = 0,063$;
 $A_1 = 4,56$; $A_2 = 1,23$; $A_3 = 0,52$; $A_4 = 1$; $A_5 = A_6 = 0,2$;
 $b = 0,0968$; $\eta = 0,69$; $a = 1,1$; $\gamma = 2,42$.

Область устойчивых режимов заштрихована.

Проводя кривые соответственно через максимумы левой и минимумы правой ветвей, мы "вырезаем" область неустойчивых режимов данного реактора в зависимости от значения параметра φ .

На рис. 3. изображены профили температур в реакторе в различные моменты переходного режима "срыва", т.е. перехода системы из одного стационарного состояния в другое /через неустойчивый режим/, а на рис. 4 - изменение температуры "горячей точки" реактора во времени и по длине реактора. Характерной особенностью этого переходного режима является то, что катализатор сильно разогревается в "горячей точке", что неизбежно должно привести к его порче в довольно большом /в нашем примере до 20% / объеме катализатора.

Следует отметить, что верхняя кривая рис. 3 не является еще истинным стационарным режимом в реакторе. Ввиду ограниченности машинного времени программа составлена так, что при достижении некоторой величины максимального изменения температуры /или концентрации/ в слое за одну итерацию /эта величина определяется значением ω / расчет на ЭЦМ заканчивается. Практически неизбежная ограниченность значения ω , а также шагов по длине, радиусу и времени /величины l, h, τ / приводит к появлению ошибок счета. Эти ошибки

не должны, однако, иметь существенного значения, так как при расчете малые возмущения по θ_{x_0} брались в размере 0,1 безразмерной температурной единицы и абсолютная ошибка не превышала $\Delta\theta = 0,03$.

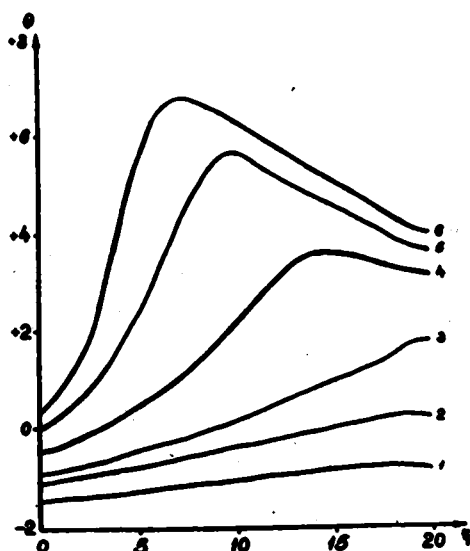


Рис. 3. Профили температур в центре трубки при различных значениях $t'/t'_{\text{переходной режим "срыва"}/}$.

1/ $t' = 0$; 2/ $t' = 20$; 3/ $t' = 40$; 4/ $t' = 60$; 5/ $t' = 75$; 6/ $t' = 110$.

$\varepsilon = 0,5$; $\beta = 1$; $\varphi = 0,7$. Значения остальных параметров те же, что и на рис. 2.

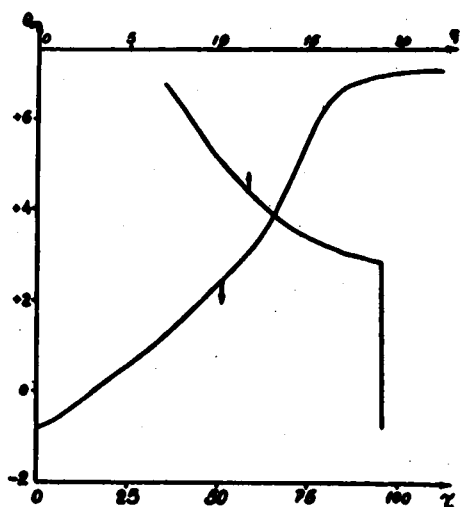


Рис. 4. Движение "горячей точки" в переходном режиме во времени и по длине реактора. значения параметров те же, что и на рис. 3.

Время счета одного варианта на ЭЦМ существенно зависит от значения коэффициента β при производной температуры слоя по времени. Для гомогенных систем $\beta = 1$, для гетерогенных $\beta \approx 100 - 1000$. Поскольку предварительный анализ переходных режимов при $\beta = 100$ показал, что они не являются колебательными, при определении устойчивости гетерогенного реактора была принята в целях экономии времени счета величина $\beta = 1$, характерная для гомогенных реакторов. Область устойчивости при отсутствии в переходных режимах нарастающих колебаний не зависит от β , так как в стационарном режиме производные по времени равны нулю.

Описанная методика численного определения нестационарных полей в реакторе может применяться для расчета пусковых режимов. Пусть на катализаторе протекает одна необратимая экзотермическая реакция первого порядка. Предположим, что на основе анализа стационарных режимов в этом аппарате определены основные конструктивные характеристики реактора - внутренний диаметр трубки, ее длина, условное время контакта, - также степень байпассирования ϕ и начальная температура θ_{x^0} . Эти параметры должны удовлетворять технологическим требованиям в стационарном режиме: максимальная температура θ_{max} в слое катализатора не должна превышать допустимой, должна обеспечиваться требуемая общая степень превращения $\chi/\xi = 1$. В нашем примере $\theta_{max} = 0$.

Предположим теперь, что до подачи реакционной смеси в реактор последний разогрет до температуры $\theta_0 = -0,2$ /ниже θ_{max} /. В момент времени $t' = 0$ в реактор начали подавать реакционную смесь, начальная концентрация которой соответствует выбранному стационарному режиму.

На рис. 5 приведены профили температур по оси трубки в различные моменты времени. Хорошо видно, что при выбранном режиме пуска в слое катализатора будут происходить значительные перегревы: с момента подачи реакционной смеси температура в "горячей точке" растет, достигая при некотором $t' = t'_{max}$ максимума, а координата "горячей точки" перемещается к выходу из реактора. Лишь в конце пускового периода максимальная температура в слое катализатора становится допустимой. При таком /неправильном/ пуске значительная часть катализатора выйдет из слоя. В настоящей работе не преследовалась цель определить правильный пусковой режим. Его можно обеспечить несколькими путями, например, постепенно повышая начальную концентрацию от минимальной до заданной.

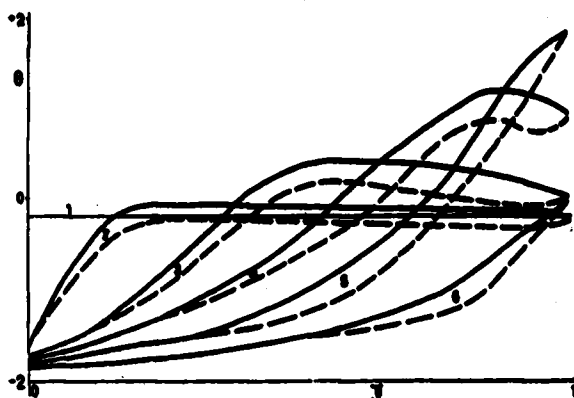


Рис. 5. Профили температур в трубке при различных значениях времени t' /пусковой режим/.

1/ $t'=0$; 2/ $t'=5$; 3/ $t'=30$; 4/ $t'=60$; 5/ $t'=85$; 6/ $t'=110$.

$\Pi_D=1,44$; $\Pi_T=2,52$; $Pe_D=500$; $\epsilon=0,5$; $\beta=100$;

$Pe_T=286$; $\Delta\theta_{ad}=6,85$; $\varphi=0,7$; $k=0,62$;

$A_1=2,28$; $A_2=0,615$; $A_3=0,26$; $A_4=1$; $A_5=A_6=0,2$;

$b=0,0968$; $\gamma=2,42$.

— Температура в центре трубки
 - - - - - " " у стенки трубки.

О б о з н а ч е н и я

C_k, C_p, C_{st} - теплоемкость соответственно катализатора, реакционной смеси и металлической стенки, $\frac{\text{ккал}}{\text{м}^3, ^\circ\text{C}}$;

d - внутренний диаметр трубки, м;

D - наружный диаметр трубки, м;

D_{an} - диаметр аппарата, м;

De, Dr - эффективные продольный и радиальный коэффициенты диффузии, $\text{м}^2/\text{сек}$;

E_i - энергия активации i -й реакции, ккал/моль;

k_{i0} - предэкспоненциальный множитель константы скорости i -й реакции;

L - длина слоя катализатора общая, м;

l - длина слоя катализатора текущая, м;

Q_i - тепловой эффект i -й реакции, ккал/м³;

R - универсальная газовая постоянная $/R=1,987 \frac{\text{ккал}}{\text{моль}^\circ\text{C}}/$;

R_0 - внутренний радиус трубки $/R_0=d/2/$, м;

- t - время, сек;
 $T, T_{ст}, T_x$ - температура соответственно слоя катализатора, металлической стенки и межтрубного пространства, $^{\circ}\text{C}$;
 U - скорость газа в слое катализатора, отнесенная ко всему сечению, мм/сек;
 V_1, V_2 - объем соответственно верхнего и нижнего коллекторов, м^3 ;
 α_1, α_2 - коэффициенты теплоотдачи соответственно от реакционной смеси в слое катализатора к стенке трубки и от стенки к реакционной смеси в межтрубном пространстве, $\text{ккал}/\text{м}^2 \cdot \text{сек} \cdot ^{\circ}\text{C}$;
 φ - доля реакционной смеси, проходящей через межтрубное пространство реактора;
 τ_k - условное время контакта, сек;
 λ_e, λ_r - эффективные продольный и радиальный коэффициенты диффузии, м/сек;
 n - число трубок в реакторе.

Поступила в редакцию 18.3.1969 г.

Л и т е р а т у р а

1. М.Г.Слинько. Кинетика и катализ, 1, 153 /1960/
2. М.Г.Слинько, А.Л.Муллер. Кинетика и катализ, 2, 467 /1961/.
3. М.Г.Слинько, В.С.Бесков, В.Б.Скоморохов, Хим.пром. № 9, 1 /1963/
4. P.L.T.Brian, R.E.Baddour, J.R.Eumery, Chem.Eng.Sci, 20, 297/65/
5. M.R.Gordon Clark, Dynamic models for convection systems, Cambridge /USA/, 1966.
6. В.И.Мукосей. Теор.основы хим.технол., 2, 286 /1968/
7. Л.А.Балянский, Ю.Ш.Матрос, М.Г.Слинько. Теор.основы хим.техн. 2, 5, 735, /1968/
8. Т.И.Зеленяк, В.С.Бесков, М.Г.Слинько. Кинетика и катализ, 8, 874 /1966/
9. Т.И.Зеленяк. Доклады АН СССР, 171, 266 /1966/
10. Т.И.Зеленяк. Дифференциальные уравнения, 2, 205 /1966/
11. В.С.Бесков. Хим.пром., № 3, 42 /1968/
12. М.Г.Слинько. Моделирование химических реакторов, Новосибирск, "Наука" 1968.
13. А.В.Засмолин. Сборник: Всесоюзная конференция по химическим реакторам, Новосибирск, РХО, СО АН СССР, 3, 480 /1965/.
14. В.К.Саульев. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. М., Физматгиз., 1960.