Управляемые системы, ИМ, ИК СО АН СССР 1969 г. выпуск 2.
УДК.66.021.21

УСТОЙЧИВОСТЬ МНОГОПОЛОЧНЫХ РЕАКТОРОВ

Е.А.Иванов, В.С.Бесков

В этой работе для исследования устойчивости стационарных режимов многополочных реакторов применен тот же метод, что и в [I], где исследовался реактор с внешним теплообменником. Устойчивость одного адиабатического реактора с внешним теплообменником изучена довольно подробно [I-5]. Для нескольких адиабатических слоев с промежуточными теплообменниками трудности пропорционально возрастают. Критерии устойчивости, полученные в [2-8], очень сильно зависят от типа теплообменника и реактора. Как и раньше, предполагаем, что нестационарный режим в некоторой окрестности известного стационарного описывается следующей линейной системой с постоянными коэффициентами. Для любого адиабатического слоя с номером i и следующего за ним теплообменника /рис. I/:

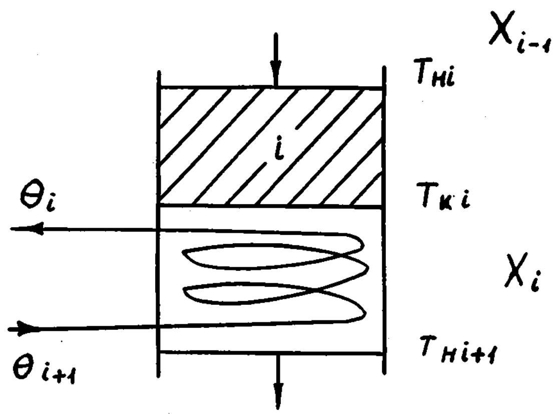

Рис. I. i -й слой катализатора с последующим теплообменником.

$$\begin{aligned}
&A_i\ /D/\quad T_{Ki} = R_i^{TT} T_{Hi} + R_i^{xT} X_{i-1},\\
&B_i\ /D/\quad \theta_i = K_i^{T\theta} T_{Ki} + K_i^{\theta\theta} \theta_{i+1},\\
&C_i\ /D/\quad x_i = R_i^{Tx} T_{Hi} + R_i^{xx} X_{i-1},\\
&E_i\ /D/\quad T_{Hi} = K_i^{TT} T_{Ki} + K_i^{\theta T} \theta_{i+1},
\end{aligned} \qquad /I/$$

Здесь использованы следующие обозначения:

X_i - отклонение концентрации от стационарного значения после i -го слоя катализатора;

T_{Hi}, T_{Ki} - отклонение температуры от значений в стационарном сосоянии на входе и выходе i -го слоя;

θ_i - температура потока после i -го теплообменника;

$A_i /D/ = \prod\limits_{j=1}^{n} /1 + a_{ij} D^j /$, $B_i /D/$, $C_i /D/$, $E_i /D/$ - линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, e_{ij} \geqslant 0$;

R_i, K_i - параметрические чувствительности i -го слоя и теплообменника, например $R_i^{Tx} = \dfrac{\partial x_i}{\partial T_{нi}}$.

Каждый слой с теплообменником описывается четырьмя уравнениями. Для трех адиабатических слоев с внешним и промежуточными теплообменниками, соединенными по следующей схеме /рис. 2 б/, систему уравнений /I/ запишем в матричном виде $M_3 u = 0$, учитывая, что $\theta_1 = x_0$.

$$
\left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc}
A_1(D) & -R_1^{TT} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-K_1^{T\theta} & B_1(D) & 0 & 0 & 0 & -K_1^{\theta\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -R_1^{Tx} & C_1(D) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-K_1^{TT} & 0 & 0 & E_1(D) & 0 & -K_1^{\theta T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & -R_2^{xT} & -R_2^{TT} & A_2(D) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -K_2^{T\theta} & B_2(D) & 0 & 0 & 0 & -K_2^{\theta\theta} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -R_2^{xx} & -R_2^{Tx} & 0 & 0 & C_2(D) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -K_2^{TT} & 0 & 0 & E_2(D) & 0 & -K_2^{\theta T} & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_3^{xT} & -R_3^{TT} & A_3(D) & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_3^{T\theta} & B_3(D) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_3^{xx} & -R_3^{Tx} & 0 & 0 & C_3(D) & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_3^{TT} & 0 & 0 & E_3(D)
\end{array}\right]
\begin{bmatrix} T_{к1} \\ \theta_1 \\ x_1 \\ T_{н2} \\ T_{к2} \\ \theta_2 \\ x_2 \\ T_{н3} \\ T_{к3} \\ \theta_3 \\ x_3 \\ T_{н4} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Квадратную матрицу, стоящую в левом верхнем углу матрицы M_3 размером 4 x 4 и отмеченную пунктиром, обозначим через M_I. Уравнение $M_I u = 0$ описывает один слой с теплообменником, исследованный нами ранее [1] при более общих предположениях /учитывалось запаздывание, инерционность и т.д./.

Рассмотрим теперь уравнение $M_2 /D/ u = 0$, которое описывает реактор из двух адиабатических слоев и двух теплообменников /рис.2а/. Решение этого уравнения устойчиво, если все корни уравнения $|M_2/\lambda/| = 0$ лежат в левой полуплоскости $Re\ \lambda < 0$.

Вычислим определитель

$$
|M_2(\lambda)| = C_2(\lambda)E_2(\lambda)\Big\{C_1(\lambda)\ \Big[A_1(\lambda)B_1(\lambda) - K_1^{T\theta}R_1^{TT})(A_2(\lambda)B_2(\lambda)E_1(\lambda) -
- K_2^{T\theta}K_1^{\theta T}R_2^{TT}) - K_2^{T\theta}R_2^{TT}K_1^{TT}K_1^{\theta\theta}R_1^{TT}\Big] - K_2^{T\theta}K_1^{\theta\theta}R_2^{xT}R_1^{Tx}A_1(\lambda)E_1(\lambda)\Big\}. \quad /3/
$$

Выражение в квадратных скобках есть характеристический полином для двух слоев и теплообменников без учета изменения концентрации, т.е.

$$
R_1^{Tx} = R_2^{xT} = 0, \quad C_1(\lambda) = 1, \quad R_1^{xx} = R_2^{xx} = 1.
$$

$$
(A_1(\lambda)B_1(\lambda) - R_1^{TT}K_1^{T\theta})(E_1(\lambda)A_2(\lambda)B_2(\lambda) - R_2^{TT}K_2^{T\theta}K_1^{\theta T}) - R_1^{TT}K_1^{TT}K_1^{\theta\theta}R_2^{TT}K_2^{T\theta} = 0. \quad /4/
$$

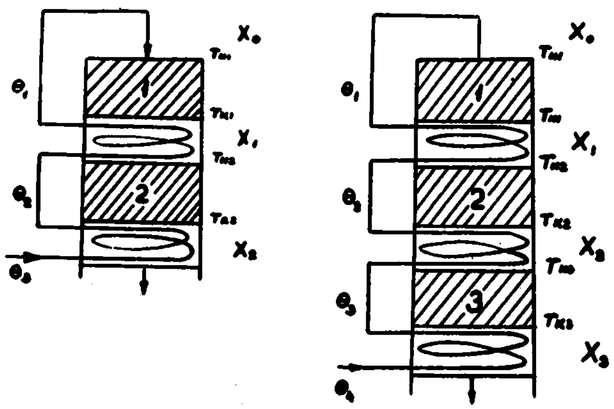

Рис. 2. Схема многополочных реакторов а/ двухслойного; б/ трехслойного.

Теорема Руше[9] дает достаточные условия того, что все корни уравнения лежат в левой полуплоскости. По этой теореме функции $f(\lambda)$ и $f(\lambda)+g(\lambda)$ имеют одинаковое число нулей внутри произвольного простого замкнутого контура С, если $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$ непрерывны, $|f(\lambda)| > |g(\lambda)|$ на контуре С и аналитичны внутри контура.

В качестве контура С возьмем полуокружность $Re^{i\varphi}\left(-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right)$ и отрезок мнимой оси $[-iR, iR]$ /рис. 3/. При достаточно большом радиусе R все корни уравнения, лежащие в правой полуплоскости, попадут внутрь нашего контура C_R .

$$f(\lambda)=f_1(\lambda)f_2(\lambda)', \text{ где } f_1(\lambda)=A_1(\lambda)B_1(\lambda)-R_1^{TT}K_1^{T\theta},$$

$$f_2(\lambda)=E_1(\lambda)A_2(\lambda)B_2(\lambda)-R_2^{TT}K_2^{T\theta}K_1^{\theta T}, g=-R_1^{TT}K_1^{TT}K_1^{\theta\theta}R_2^{TT}K_2^{T\theta}.$$

Необходимые и достаточные условия того, что все корни функций $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$ находятся в левой полуплоскости, следующие [I] :

$$R_1^{TT}K_1^{T\theta} < 1,$$

$$R_2^{TT}K_2^{T\theta}K_1^{\theta T} < 1.$$

При достаточно большем значении $R\,|f(Re^{i\varphi})| > g = const$. На мнимой оси $\lambda = iy$

$$\left|f(iy)\right| \geqslant \left|\left|A_1(iy)\right|\left|B_1(iy)\right| - R_1^{TT}K_1^{T\theta}\right| \left|\left|E_1(iy)\right|\left|A_2(iy)\right|\left|B_2(iy)\right| - R_2^{TT}K_2^{T\theta}K_1^{\theta T}\right| =$$
$$= \left|\prod_{j=1}^{n}(1+a_{1j}^2y^2)^{1/2}(1+b_{1j}^2y^2)^{1/2} - R_1^{TT}K_1^{T\theta}\right| \left|\prod_{j=1}^{n}(1+e_{1j}^2y^2)^{1/2}(1+a_{2j}^2y^2)^{1/2}(1+b_{2j}^2y^2)^{1/2} - R_2^{TT}K_2^{T\theta}K_1^{\theta T}\right|,$$

отсюда видно, что для $y \in [-R, R]$ $|f(iy)| > g$, если $|1-R_1^{TT}K_1^{T\theta}|\,|1-R_2^{TT}K_2^{T\theta}K_1^{\theta T}| > R_1^{TT}K_1^{\theta\theta}K_1^{TT}R_2^{TT}K_2^{T\theta}$.

Таким образом, система устойчива, если выполнены неравенства:

$$R_1^{TT}K_1^{TO} < 1, \qquad /5/$$

$$R_2^{TT}K_2^{T\theta}K_1^{\theta T} < 1, \qquad /6/$$

$$(1-R_1^{TT}K_1^{T\theta})(1-R_2^{TT}K_2^{T\theta}K_1^{\theta T})-R_1^{TT}K_1^{\theta\theta}K_1^{TT}R_2^{TT}K_2^{T\theta}>0. \qquad /7/$$

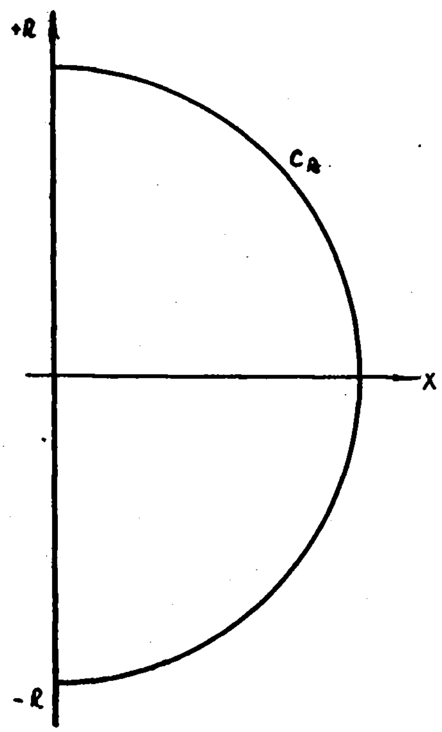

Рис. 3. Контур С.

Эти условия являются и необходимыми, так как означают положительность всех коэффициентов полинома в /4/.

В условие устойчивости /6/ - /7/ системы двух реакторов с промежуточными теплообменниками входит условие устойчивости /5/ одного реактора с теплообменником [1-5], устойчивость второго слоя с теплообменником /6/ и условие устойчивости /7/ всей системы в целом, аналогичное полученному в [8].

Если выполнено только условие /7/ и не выполнено хотя бы одно из условий /5/ или /6/, то решение системы $M_2(D)u=0$, если не учитывать изменение концентрации, неустойчиво, так как $f(\lambda)$ имеет в этом случае нули в правой полуплоскости и, следовательно, по теореме Руше $f(\lambda)+g$ имеет там же нули. Другими словами, устойчивость системы двух слоев с теплообменниками требует выполнения условия устойчивости части этой системы - одного слоя с теплообменником.

Если в первом слое с теплообменником режим устойчив, т.е. выполнено неравенство /5/ и для двух слоев с промежуточным и внешним теплообменниками выполнено неравенство /7/, то режим устойчив, так

как при этом одновременно следует выполнение /6/.

Как видно из /3/, учет концентрации накладывает на условия устойчивости более жесткие ограничения, если $R_1^{Tx}R_2^{xT}>0$; например, вместо условия /7/ необходимо, чтобы выполнялось условие

$$(1-K_1^{T\theta}R_1^{TT})(1-K_2^{T\theta}R_2^{TT}K_1^{\theta T})-K_2^{T\theta}K_1^{TT}K_1^{\theta\theta}R_2^{TT}R_1^{TT}-K_2^{T\theta}K_1^{\theta\theta}R_2^{xT}R_1^{Tx}>0 \qquad /8/$$

и т.д.

Для исследования реактора с произвольным числом слоев и теплообменников необходимо построить матрицу M_i, закономерность построения которой легко проследить. Дополним для этого матрицу M_{i-1} четырьмя нулевыми строками снизу и справа и обозначим новую матрицу размером $4i \times 4i$ через M_i^0. Чтобы получить матрицу M_i, необходимо сложить матрицу M_i^0 с матрицей той же размерности следующего вида:

$$N_i=\left|\begin{array}{ccccccccc}
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_{i-1}^{\theta\theta} & 0 & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_{i-1}^{\theta T} & 0 & 0 \\
0 & \cdots & 0 & -R_i^{xT} & -R_i^{TT} & A_i(D) & 0 & 0 & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -K_i^{T\theta} & B_i(D) & 0 & 0 \\
0 & \cdots & 0 & -R_i^{xx} & -R_i^{Tx} & 0 & 0 & C_i(D) & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -K_i^{TT} & 0 & 0 & E_i(D)
\end{array}\right|$$

Решение уравнения $M_i(D)u=0$ будет устойчивым, если все корни уравнения $|M_i(\lambda)|=0$ имеют отрицательные действительные части. Для $i=2$ условия устойчивости удалось получить в достаточно простой форме /5/, /7/. Для $i>2$ исследование конкретной системы, т.е. с определенными числовыми коэффициентами в /I/, можно провести, например, следующим образом: известными численными методами находим корень с наибольшей действительной частью; если он находится в левой полуплоскости, то решение для данного набора параметров устойчиво. Учитывая непрерывную зависимость корней от элементов матрицы M_i, можно, изменяя некоторые коэффициенты матрицы, построить таким образом область устойчивости решения.

Выводы

I. Для устойчивости системы нескольких слоев с промежуточными теплообменниками достаточно знания только параметрической чувствительности элементов системы /слоев и теплообменников/ - строгое

рассмотрение задачи дает условие устойчивости, куда входят лишь R и K - параметрические чувствительности соответственно слоя и теплообменника.

2. Получено, что для устойчивости целого - системы из нескольких слоев и теплообменников - необходимо выполнение устойчивости части /например, устойчивость первого слоя с теплообменником/. В опубликованных работах это нигде не доказано, только при анализе устойчивости полочного реактора с промежуточными теплообменниками для окисления SO_2 [10] использован этот принцип: устойчивость проверялась по частям.

Поступила в редакцию I.4.I969 г.

Литература

I. Е.А.Иванов, В.С.Весков, ТОХТ /в печати/.

2. М.Г.Слинько, А.Л.Мулер, Кинетика и катализ, 2, 467, /I96I/.

3. Ю.И.Харкац, Л.М.Письмен, В.И.Мукосей, ДАН СССР, I74, I385, /I967/.

4. Л.М.Письмен, ТОХТ, 2, 63, /I968/.

5. Л.М.Балясный, Ю.Ш.Матрос, М.Г.Слинько, ТОХТ, 2, 735, /I968/.

6. А.М.Тапилин, М.Г.Слинько, В.С.Весков, Всесоюзная конференция по химическим реакторам, Труды, том I, стр. I38.

7. В.С.Весков, В.Н.Кошкин, Н.А.Акимутин, Всесоюзная конференция по химическим реакторам, труды, том I, стр.77.

8. В.И.Мукосей, ТОХТ, I, № 6, 8I, /I968/.

9. М.А.Лаврентьев и Б.В.Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, изд. "Наука", I965.

IO. Г.К.Боресков, М.Г.Слинько, В.С.Весков - Хим. пром., 3, I73, /I968/.