Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1980 г., вып 20
УДК 519.3:62-50

ОСОБЫЕ ЭКСТРЕМАЛИ РАЗРЫВНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ. I

Л.Т.Ащепков

Работа посвящена исследованию особых экстремалей (управлений и траекторий) систем обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями. Известно [1], что проблема оптимизации особых экстремалей занимает важное место среди общего круга вопросов, рассматриваемых математической теорией оптимальных процессов. Она представляет определенный интерес для разрывных систем, имеющих большое прикладное и теоретическое значение [2].

Исследование особых экстремалей в данной статье ведется на базе формулы приращения целевого функционала. Хотя существующая техника [3] позволяет получать те же конечные результаты более экономно, минуя формулу приращения, эта техника в первой части работы не используется по следующим соображениям. Формула приращения имеет, очевидно, самостоятельный интерес как источник вычислительных методов последовательного улучшения управления. Далее, из нее для частных классов задач управления устанавливаются достаточные условия оптимальности. Наконец, формула приращения удобна, когда необходимые условия оптимальности выводятся многократно на разных классах вариаций управления. В этом отношении "экономный" способ получения необходимых условий становится более трудоемким.

В первой части работы анализируются регулярные случаи взаимного расположения опорной траектории, поверхности разрыва правых частей и терминального многообразия. Нерегулярные случаи будут разобраны во второй части работы.

§ 1. Формула приращения функционала

Рассмотрим функционал $I = \Phi(x(t_1))$ на решениях [4] системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x,u,t) \qquad /1/$$

с разрывной правой частью: $f(x,u,t) = f^-(x,u,t)$, $p(x,t) < 0$; $f(x,u,t) = f^+(x,u,t)$, $p(x,t) > 0$. $\Phi: R^n \to R$, $p: R^n \times R \to R$ — скалярные функции класса C_2 и $f^-, f^+: R^n \times R^r \times R \to R^n$ — векторные функции с непрерывными по всем аргументам частными производными второго порядка по x и первого порядка по u, t. Управлениями будем считать кусочно-непрерывные кусочно-гладкие функции $u: [t_0, \infty) \to R^r$ со значениями в заданном непустом множестве $U \subset R^r$.

Приступим к выводу формулы приращения функционала. Пусть

$x(t),\ \tilde{x}(t) = x(t) + \Delta x(t)$ – два решения (две траектории) системы /I/, отвечающие управлениям $u(t),\ \tilde{u}(t) = u(t) + \Delta u(t)$ и начальным значениям $t_0,\ x_0$ и $t_0,\ x_0 + \Delta x_0$. Допустим, что:

I) управления и траектории определены на всем отрезке $[t_0, t_1]$;

2) правые и левые концы дуг $(x(t),t), (\tilde{x}(t),t),\ t_0 \le t \le t_1$ в $R^n \times R$ лежат в областях $\rho(x,t) < 0$ и $\rho(x,t) > 0$ соответственно, а сами они пересекают поверхность $\rho(x,t) = 0$ разрыва правых частей в единственные моменты $\tau,\ \tilde{\tau} = \tau + \Delta\tau,\ t_0 < \tau, \tilde{\tau} < t_1$, т.е.

$$\rho(x(\tau),\tau) = 0, \quad \rho(\tilde{x}(\tilde{\tau}),\tilde{\tau}) = 0; \qquad /2/$$

3) при $t = \tau$ управления $u(t),\ \tilde{u}(t)$ непрерывно дифференцируемы, причем

$$\begin{aligned} &\overset{-}{\rho}(x(\tau), u(\tau), \tau)\ \overset{+}{\rho}(x(\tau), u(\tau), \tau) > 0, \\ &\overset{-}{\rho}(x(\tau), \tilde{u}(\tau), \tau)\ \overset{+}{\rho}(x(\tau), \tilde{u}(\tau), \tau) > 0. \end{aligned} \qquad /3/$$

По определению, символами

$$\overset{-}{\rho}(x,u,t) = \rho_x'(x,t) f^-(x,u,t) + \rho_t(x,t),$$
$$\overset{+}{\rho}(x,u,t) = \rho_x'(x,t) f^+(x,u,t) + \rho_t(x,t)$$

обозначены производные по t функции $\rho(x,t)$ в силу системы /I/ в точке x,t неоднозначности правых частей. Аналогично определяются вторые производные:

$$\overset{=}{\rho}(x,u,\dot{u},t) = (\overset{-}{\rho}(x,u,t))^{-},\ \overset{-+}{\rho}(x,u,\dot{u},t) = (\overset{-}{\rho}(x,u,t))^{+},$$
$$\overset{++}{\rho}(x,u,\dot{u},t) = (\overset{+}{\rho}(x,u,t))^{+}.$$

В точках однозначности правых частей $\overset{-}{\rho},\ \overset{+}{\rho},\ \overset{++}{\rho}$ являются обычными производными в силу системы /I/, поэтому для упрощения письма знаки $\pm$ условимся опускать. Из контекста обычно ясно, какой из них имеется в виду в данный момент.

Наряду с /I/ рассмотрим системы дифференциальных уравнений с гладкими правыми частями:

$$\dot{y} = f^-(y, u(t), t),\ y(\tau) = x(\tau);\ \dot{\tilde{y}} = f^-(\tilde{y}, \tilde{u}(t), t),\ \tilde{y}(\tilde{\tau}) = \tilde{x}(\tilde{\tau}); \qquad /4/$$
$$\dot{z} = f^+(z, u(t), t),\ z(\tau) = x(\tau);\ \dot{\tilde{z}} = f^+(\tilde{z}, \tilde{u}(t), t),\ \tilde{z}(\tilde{\tau}) = \tilde{x}(\tilde{\tau}). \qquad /5/$$

Решения последних обозначим $y(t),\ \tilde{y}(t) = y(t) + \Delta y(t)$ и $z(t),\ \tilde{z}(t) = z(t) + \Delta z(t)$. В силу единственности решений, имеем

$$x(t) = \begin{cases} y(t), & t_0 \le t \le \tau \\ z(t), & \tau \le t \le t_1 \end{cases} \qquad \tilde{x}(t) = \begin{cases} \tilde{y}(t), & t_0 \le t \le \tilde{\tau}, \\ \tilde{z}(t), & \tilde{\tau} \le t \le t_1. \end{cases} \qquad /6/$$

Следовательно, приращения

$$\Delta I = I(x_0 + \Delta x_0, \tilde{u}) - I(x_0, u) = \Phi(x(t_1) + \Delta x(t_1)) - \Phi(x(t_1))$$

функционала на решениях систем /I/ и /4/, /5/ совпадают. Учитывая равенство $\Delta x(t_1) = \Delta z(t_1)$, можем записать

$$\Delta I = \Phi_x'(x(t_1))\Delta z(t_1) + 1/2\, \Delta z'(t_1)\Phi_{xx}(x(t_1))\Delta z(t_1) + O_\Phi(\|\Delta z(t_1)\|^2). \qquad /7/$$

Здесь и далее $'$ – знак транспонирования (все векторы будем считать столбцевыми); символ $O(\alpha)$ означает скалярную или векторную ве-

личину порядка выше α: $\|O(\alpha)\|/\alpha \to 0$, $\alpha \to 0$, символом O_Φ отмечен остаточный член разложения в ряд Тейлора функции Φ, $\|\Delta z\| = \|\Delta z\|_{R^n}$.

Преобразуем приращение /7/, учитывая уравнения /5/. Методом приращений по аналогии с [I , с.175-178] получим

$$\Delta I = -\Delta J - \int_\tau^{t_1} \Delta_{\tilde u} H(\psi, x, u, t)\,dt -$$

$$-\int_\tau^{t_1} [\Delta_{\tilde u} H'_x(\psi, x, u, t)\Delta z + \Delta_{\tilde u} f'(x,u,t)\Psi \Delta z]\,dt + 1/2 \int_\tau^{t_1} \Delta z' Q \Delta z\, dt + \eta_1, \qquad /8/$$

где

$$\Delta J = \psi'(\tau+)\Delta z(\tau) + 1/2\, \Delta z'(\tau)\Psi(\tau+)\Delta z(\tau), \qquad /9/$$

$$H(\psi, x, u, t) = \psi' f(x,u,t), \quad \Delta_{\tilde u} H(\psi, x, u, t) = H(\psi, x, \tilde u, t) - H(\psi, x, u, t);$$

$\psi(t), \Psi(t)$ - решения на $[\tau, t_1]$ векторного и матричного дифференциальных уравнений

$$\dot\psi = -H_x(\psi, x(t), u(t), t),$$

$$\dot\Psi = -f'_x(x(t), u(t), t)\Psi - \Psi f_x(x(t), u(t), t) - H_{xx}(\psi(t), x(t), u(t), t) - Q(t), \qquad /10/$$

$$\psi(t_1) = -\Phi_x(x(t_1)), \quad \Psi(t_1) = -\Phi_{xx}(x(t_1)); \qquad /11/$$

$Q(t)$ - симметричная матричная функция размера $n \times n$ с кусочно-непрерывными на $[t_0, t_1]$ элементами; η_1 - остаточный член:

$$\eta_1 = O_\Phi(\|\Delta z(t_1)\|^2) - \int_\tau^{t_1} [O_H(\|\Delta z\|^2) + \Delta z' \Psi O_f(\|\Delta z\|)]\,dt -$$

$$-1/2 \int_\tau^{t_1} \Delta z' \Delta_{\tilde u}[f'_x(x,u,t)\Psi + \Psi f_x(x,u,t) + H_{xx}(\psi, x, u, t)]\Delta z\, dt; \qquad /12/$$

$\psi(\tau+)$, $\Psi(\tau+)$ - правосторонний предел функций ψ, Ψ в точке τ .

Наши ближайшие усилия будут направлены на то, чтобы записать /9/ как квадратичную функцию $\Delta y(\tau)$. Из /4/, /5/ устанавливаем зависимость между $\Delta z(\tau)$ и $\Delta y(\tau)$:

$$\Delta z(\tau) = \Delta y(\tau) + \int_\tau^{\tau+\Delta\tau} [f^-(y(t) + \Delta y(t), \tilde u(t), t) - f^+ z(t) + \Delta z(t), \tilde u(t), t]\,dt.$$

Выделяя в интеграле сперва линейные, а затем линейные и квадратичные по $\Delta\tau$, $\Delta y(\tau)$, $\Delta z(\tau)$ члены и используя оба разложения, будем иметь

$$\Delta z(\tau) = \Delta y(\tau) + \Delta\tau\, \nabla f(x(\tau), \tilde u(\tau), \tau) + \nabla\tau\, \nabla f_x(x(\tau), \tilde u(\tau), \tau)\Delta y(\tau) +$$

$$+ \Delta\tau^2/2\, [\dot\nabla f(x(\tau), \tilde u(\tau), \dot{\tilde u}(\tau), \tau) - 2 f^+_x(x(\tau), \tilde u(\tau), \tau)\nabla f(x(\tau), \tilde u(\tau), \tau)] + O(\alpha^2),$$

$$\alpha = \max\{|\Delta\tau|, \|\Delta y(\tau)\|, \|\Delta z(\tau)\|\}\,. \qquad /13/$$

Здесь обозначено

$$\nabla f(x,u,t) = f^-(x,u,t) - f^+(x,u,t),$$

$$\dot\nabla f(x, u, \dot u, t) = (f^-(x,u,t))^{\cdot} - (f^+(x,u,t))^{\cdot}.$$

Выразим теперь $\Delta\tau$ через $\Delta y(\tau)$. Из /2/ и /6/ следует

$$0 = p(\tilde{y}(\tilde{\tau}), \tilde{\tau}) - p(y(\tau), \tau) =$$

$$= [p(\tilde{y}(\tilde{\tau}), \tilde{\tau}) - p(\tilde{y}(\tau), \tau)] + p(\tilde{y}(\tau), \tau) - p(y(\tau), \tau)]. \qquad /14/$$

Отсюда с помощью очевидных преобразований находим

$$0 = \overset{*}{p}(x(\tau), \tilde{u}(\tau), \tau)\,\Delta\tau + p'_x(x(\tau), \tau)\,\Delta y(\tau) +$$

$$+ {}^1/_2\,\Delta y'(\tau)\,[p_{xx}(x(\tau), \tau) - \frac{2}{\overset{*}{p}(x(\tau), \tilde{u}(\tau), \tau)}\, p_x(x(\tau), \tau)(\overset{*}{p})'_x(x(\tau), \tilde{u}(\tau), \tau) +$$

$$+ \frac{\overset{**}{p}(x(\tau), \tilde{u}(\tau), \dot{\tilde{u}}(\tau), \tau)}{\overset{*}{p}{}^2(x(\tau), u(\tau), \tau)}\, p_x(x(\tau), \tau)\, p'_x(x(\tau), \tau)]\,\Delta y(\tau) + 0(\beta^2), \qquad /15/$$

$$\beta = max\{|\Delta\tau|, \|\Delta y(\tau)\|\}.$$

Подставим $\Delta z(\tau)$ и $\Delta\tau$ из /13/, /15/ в правую часть /9/. Обозначив

$$\psi(\tau-) = \psi(\tau+) + \mu\, p_x(x(\tau), \tau),$$

$$\mu = -\frac{\psi'(\tau+)\,\nabla f(x(\tau), u(\tau), \tau)}{\overset{*}{p}(x(\tau), u(\tau), \tau)}, \qquad /16/$$

$$\Psi(\tau-) = (E - \frac{1}{\overset{*}{p}}\, p_x \nabla f')\,\Psi(\tau+)(E - \frac{1}{\overset{*}{p}}\nabla f\, p'_x) + \mu\, p_{xx} +$$

$$+ \frac{1}{\overset{*}{p}}\, p_x\,[\dot{\psi}(\tau-) - \dot{\psi}(\tau+) - \mu(p_x)^{*}]' + \frac{1}{\overset{*}{p}}\,[\dot{\psi}(\tau-) - \dot{\psi}(\tau+) - \mu(p_x)^{*}]\, p'_x +$$

$$+ \frac{\psi'(\tau+)\,\dot{\nabla} f + 2\,\dot{\psi}'(\tau+)\,\nabla f + \mu\,\overset{**}{p}}{\overset{*}{p}{}^2}\, p_x\, p'_x, \qquad /17/$$

где все коэффициенты вычислены вдоль $u(t)$, $x(t)$ при $t = \tau$, E - единичная матрица, будем иметь в результате

$$\Delta J = (\Delta_{\tilde{u}(\tau)}\,\mu)\, p'_x(x(\tau), \tau)\,\Delta y(\tau) + \psi'(\tau-)\,\Delta y(\tau) + {}^1/_2\,\Delta y'(\tau)\,\Psi(\tau-)\,\Delta y(\tau) - \eta_2, \qquad /18/$$

$$\eta_2 = -0(\alpha^2) - {}^1/_2\,\Delta y'\tau\,\Delta_{\tilde{u}(\tau)}\,[(E - \frac{1}{\overset{*}{p}}\, p_x \nabla f')\,\Psi(\tau+)(E - \frac{1}{\overset{*}{p}}\nabla f\, p'_x) - \mu\, p_{xx} +$$

$$+ \frac{2}{\overset{*}{p}}\, p_x(\nabla f'_x\,\psi(\tau+) + \mu(\overset{*}{p})_x) - \frac{\psi'(\tau+)\,\dot{\nabla} f - 2\psi'(\tau+)\, f^{*}_x\,\nabla f + \mu\overset{**}{p}}{\overset{*}{p}{}^2}\, p_x\, p'_x]\,\Delta y(\tau). \qquad /19/$$

В последнем выражении аргументами всех функциональных коэффициентов служат $x(\tau)$, $u(\tau)$, $\tilde{u}(\tau)$, τ.

Соотношение /18/ можно трактовать теперь как приращение некоторого функционала J на траекториях уравнений /4/. Пользуясь методом приращений, представим, как раньше, выражение /18/ в виде

$$\Delta J = (\Delta_{\tilde{u}(\tau)}\,\mu)\, p'_x(x(\tau), \tau)\,\Delta y(\tau) + \psi'(t_0)\,\Delta x_0 + {}^1/_2\,\Delta x'_0\,\Psi(t_0)\,\Delta x_0 +$$

$$+ \int_{t_0}^{\tau} \Delta_{\tilde{u}} H(\psi, x, u, t)\,dt + \int_{t_0}^{\tau} [\Delta_{\tilde{u}} H'_x(\psi, x, u, t)\,\Delta y + \Delta_{\tilde{u}} f'(x, u, t)\,\Psi\,\Delta y]\,dt -$$

$$- {}^1/_2 \int_{t_0}^{\tau} \Delta y'\, Q\,\Delta y\,dt - \eta_2 - \eta_3,$$

$$\eta_3 = -\int_{t_0}^{\tau} [0_H(\|\Delta y\|^2) + \Delta y'\,\Psi 0_f(\|\Delta y\|)]\,dt -$$

$$- {}^1/_2 \int_{t_0}^{\tau} \Delta y'\,\Delta_{\tilde{u}}\,[f'_x(x, u, t)\Psi + \Psi f_x(x, u, t) + H_{xx}(\psi, x, u, t)]\,\Delta y\,dt. \qquad /20/$$

Здесь $\psi(t)$, $\Psi(t)$ - решения уравнений /10/ с начальными условиями /11/ и /16/,/17/. Объединяя предпоследнее равенство с /8/, прихо-

дим к искомой формуле приращения:

$$\Delta I = I(x_0+\Delta x_0,\tilde u) - I(x_0,u) = -\psi'(t_0)\Delta x_0 - {}^1\!/_2\,\Delta x_0'\,\Psi(t_0)\,\Delta x_0 -$$
$$-(\Delta_{\tilde u(\tau)}\,\mu)\,p_x'(x(\tau),\tau)\,\Delta\xi(\tau-) - \int_{t_0}^{t_1}\Delta_{\tilde u} H(\psi,x,u,t)\,dt -$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}[\Delta_{\tilde u} H_x'(\psi,x,u,t)\,\Delta\xi + \Delta_{\tilde u} f'(x,u,t)\,\Psi\,\Delta\xi]\,dt +$$
$$+{}^1\!/_2\int_{t_0}^{t_1}\Delta\xi' Q\,\Delta\xi\,dt + \eta, \qquad \eta = \eta_1+\eta_2+\eta_3 . \qquad /21/$$

Остаточные члены в формуле приращения определены соотношениями /12/,/19/,/20/, функция $\Delta\xi(t) = \Delta y(t)$, $t_0 \le t < \tau$; $\Delta\xi(t) = \Delta z(t)$, $\tau < t \le t_1$, является решением уравнений

$$\Delta\dot\xi = f^-(x(t)+\Delta\xi,\tilde u(t),t) - f^-(x(t),u(t),t),\ t_0 \le t < \tau,$$
$$\Delta\dot\xi = f^+(x(t)+\Delta\xi,\tilde u(t),t) - f^+(x(t),u(t),t),\ \tau < t \le t_1 \qquad /22/$$

с начальным условием $\Delta\xi(t_0) = \Delta x_0$. Предельные значения $\Delta\xi(\tau-) = \Delta y(\tau)$, $\Delta\xi(\tau+) = \Delta z(\tau)$ этой функции в точке τ связаны условием скачка /13/, где $\Delta\tau$ находится с точностью $O(\alpha^2)$ из уравнения /15/. Разрешимость последнего относительно $\Delta\tau$ вытекает из предположения /3/. Функции ψ, Ψ в формуле приращения определены вдоль опорного процесса однозначно в силу /10/, /11/ и /16/, /17/.

Отметим некоторые свойства формулы приращения.

1. Если целевая функция, правые части /1/ и уравнение поверхности разрыва правых частей имеют вид

$$\Phi(x) = c'x + {}^1\!/_2\,x'Cx,\quad f^\pm(x,u,t) = A^\pm(t)\,x + b^\pm(u,t),\quad p(t) = 0, \qquad /23/$$

то в формуле приращения

$$\Delta_{\tilde u(\tau)}\,\mu\,p_x'(x(\tau),\tau)\,\Delta\xi(\tau-) = 0,\quad \Delta_{\tilde u} H_x'(\psi,x,u,t)\,\Delta\xi = 0,$$
$$\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta = 0. \qquad /24/$$

Таким образом, в случае /23/ формула /21/ описывает приращение точно.

2. Выбирая матрицу $Q(t)$ в уравнении /10/ знакоопределенной при каждом $t_0 \le t \le t_1$, можно сделать интегральное слагаемое с Q в правой части /21/ неположительным или неотрицательным и получить после отбрасывания слагаемого мажоранту или миноранту приращения функционала на управлении $u(t)$.

3. Формула приращения легко обобщается на случай нескольких поверхностей $p_1(x,t) = 0,\dots,p_s(x,t) = 0$ разрыва правых частей, если предположения 2 , 3 считать выполненными для каждой из них.

Изложенный способ вывода формулы приращения несколько проще, чем описанный в работе [2]. В [2] разность /14/ трактуется как приращение дополнительного функционала на решениях системы /4/, мы же используем ее только для вычисления $\Delta\tau$. Другое отличие состоит в условии скачка /16/ для сопряженных переменных. В работе [2] оно задано на варьированном управлении.

§ 2. Формула приращения функционала в случае подвижных концов траекторий

Рассмотрим функционал $K = \Phi(x(t_1), t_1)$ на решениях системы /I/ с краевыми условиями: $h^0(x(t_0)) = 0$, $h^1(x(t_1), t_1) = 0$, где $\Phi h^1 : R^n \times R \to R^n$, $h^0 : R^n \to R^m$ – функции класса C_2, $m \leq n$, t_1 не фиксировано.

Покажем, что при естественных изменениях формула /2I/ описывает приращение функционала и в данном случае. Чтобы воспользоваться результатами предыдущего раздела, сохраним обозначения $u(t), x(t)$ и $\tilde{u}(t), \tilde{x}(t)$ опорного и варьированного процессов, считая теперь второй из них определенным на отрезке $[t_0, \tilde{t}_1]$. Далее, предположим, что они удовлетворяют условиям 2), 3) раздела I (с заменой области определения $[t_0, t_1]$ варьированного процесса на $[t_0, \tilde{t}_1]$), допустимы по краевым ограничениям, т.е.

$$h^0(x(t_0)) = h^0(\tilde{x}(t_0)) = 0, \quad h^1(x(t_1), t_1) = h^1(\tilde{x}(\tilde{t}_1), \tilde{t}_1) = 0, \qquad /25/$$

и

$$\text{ранг } h^0_x(x(t_0)) = m, \quad \dot{h}^1(x(t_1), u(t_1)) \neq 0, \quad \dot{h}^1(x(t_1), \tilde{u}(t_1), t_1) \neq 0. \qquad /26/$$

Кроме того, для упрощения выкладок будем считать, что опорный и варьированный процессы доопределены на открытом справа полуинтервале, содержащем отрезки $[t_0, t_1]$, $[t_0, \tilde{t}_1]$, и в окрестности точки t_1 управления $u(t), \tilde{u}(t)$ непрерывно дифференцируемы. Тогда по аналогии с /I4/, полагая $\tilde{t}_1 = t_1 + \Delta t_1$, можем записать

$$\Delta K = \Phi(\tilde{x}(\tilde{t}_1), \tilde{t}_1) - \Phi(x(t_1)) =$$

$$= \dot{\Phi}(x(t_1), \tilde{u}(t_1), t_1)\Delta t_1 + \Phi'_x(x(t_1), t_1)\Delta x(t_1) + \Delta t_1^2/2\, \ddot{\Phi}(x(t_1), \tilde{u}(t_1), \dot{\tilde{u}}(t_1), t_1) +$$

$$+ \Delta t_1 (\dot{\Phi})'_x (x(t_1), \tilde{u}(t_1), t_1)\Delta x(t_1) + 1/2\, \Delta x'(t_1)\Phi_{xx}(x(t_1), t_1)\Delta x(t_1) +$$

$$+ o_\Phi(\|\Delta x(t_1)\|^2) + o(\gamma^2), \qquad /27/$$

$$\gamma = max\{|\Delta t_1|, \|\Delta x(t_1)\|\}.$$

Проделаем последовательно следующие операции: а) представим в форме /27/ соотношение $0 = h^1(x(\tilde{t}_1), \tilde{t}_1) - h^1(x(t_1), t_1)$, вытекающее из /25/; в) выразим из него Δt_1 через $\Delta x(t_1)$ с точностью до $o(\gamma^2)$; с) подставим Δt_1 в /27/ и сгруппируем линейные и квадратичные по $\Delta x(t_1)$ члены; d) положим (аргументами везде служат $x(t_1), u(t_1), t_1$) :

$$\psi(t_1) = -\Phi_x(x(t_1), t_1) - \lambda^1 h^1_x(x(t_1), t_1), \qquad /28/$$

$$\lambda^1 = -\dot{\Phi}(x(t_1), u(t_1), t_1) / \dot{h}^1(x(t_1), u(t_1), t_1),$$

$$\Psi(t_1) = -\Phi_{xx} - \lambda^1 h^1_{xx} + \frac{1}{\dot{h}^1} h^1_x [\dot{\psi}(t_1) + (\Phi_x)^{\cdot} + \lambda^1 (h^1_x)^{\cdot}]' +$$

$$+ \frac{1}{\dot{h}^1}[\dot{\psi}(t_1) + (\Phi_x)^{\cdot} + \lambda^1 (h^1_x)^{\cdot}] h^{1\prime}_x - \frac{\ddot{\Phi} + \lambda^1 \ddot{h}^1}{(\dot{h}^1)^2} h^1_x h^{1\prime}_x. \qquad /29/$$

В результате формула приращения /27/ примет вид

$$\Delta K = -\psi'(t_1)\,\Delta x(t_1) - {}^1\!/_2\,\Delta x'(t_1)\,\Psi(t_1)\,\Delta x(t_1) -$$
$$-(\Delta_{\tilde u(t_1)}\lambda^1)\,h^{1\,\prime}_x(x(t_1),t_1)\,\Delta x(t_1) + 0_\Phi(\|\Delta x(t_1)\|^2) + \eta_4\,, \qquad /30/$$

$$\eta_4 = o(\gamma^2) + {}^1\!/_2\,\Delta x'(t_1)\,\Delta_{\tilde u(t_1)}\Big[\lambda^1 h^1_{xx} - \frac{2}{\dot h^1}\,h^1_x((\dot\Phi)_x + \lambda^1(\dot h^1)_x)' +$$
$$+ \frac{\ddot\Phi + \lambda^1\ddot h^1}{(\dot h^1)^2}\,h^1_x\,h^{1\,\prime}_x\Big]\,\Delta x(t_1). \qquad /31/$$

Первые два слагаемых правой части /30/ имеют такую же структуру, как /7/, и допускают, следовательно, такое же представление, что и /21/. При этом функции $\psi(t)$, $\Psi(t)$ являются соответствующими опорному процессу $u(t)$, $x(t)$ решениями сопряженных уравнений /10/ с начальными условиями /28/, /29/ и условиями скачка /16/, /17/. С учетом сделанного замечания можем записать

$$\Delta K = \Delta I - (\Delta_{\tilde u(t_1)}\lambda^1)\,h^1_x(x(t_1),t_1)\,\Delta\xi(t_1) + \eta\,, \qquad /32/$$
$$\eta = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4\,,$$

где остаточные члены η_1, η_2, η_3 и функция $\Delta\xi$ имеют тот же смысл, что и в формуле /21/, η_4 определено равенством /31/, приращение $\Delta x_0 = \tilde x(t_0) - x(t_0)$ левого конца траектории удовлетворяет второму равенству /25/.

§ 3. Условия оптимальности

С помощью формулы приращения /32/ легко устанавливаются необходимые, а в частных случаях и достаточные условия оптимальности управления в задаче

$$K = \Phi(x(t_1),t_1) \to \inf\,,$$
$$\dot x = f(x,u,t),\ h^0(x(t_0)) = 0,\ h^1(x(t_1),t_1) = 0. \qquad /33/$$

Относительно класса управлений, данных задачи и опорного процесса $u(t)$, $x(t)$ оставим в силе прежние предположения.

Приступим к выводу необходимых условий оптимальности. Определим игольчатую вариацию $\tilde u(t)$ управления $u(t)$, полагая $\tilde u(t) = v$ на полуинтервале $(\theta-\varepsilon,\theta]$ и $\tilde u(t) = u(t)$ вне этого полуинтервала. Здесь $\varepsilon > 0$, $t_0 < \theta < t_1$, $\theta \neq \tau$, $v \in U$ - параметры игольчатой вариации. Соответствующую $\tilde u(t)$ варьированную траекторию обозначим $\tilde x(t)$. В качестве начальной точки возьмем $\tilde x(t_0) = \varphi(\varepsilon)$, где $\varphi:[0,\varepsilon_0)\to R^n$ - кривая класса C_2, лежащая на многообразии $h^0(x) = 0$, $\varphi(0) = x(t_0)$. Полагая $\varphi_\varepsilon(0) = \delta x_0$, $\varphi_{\varepsilon\varepsilon}(0) = \delta^2 x_0$, будем иметь

$$\tilde x(t_0) = x(t_0) + \Delta x_0\,,\ \Delta x_0 = \varphi(\varepsilon) - \varphi(0) = \varepsilon\,\delta x_0 + \varepsilon^2/2\,\delta^2 x_0 + o(\varepsilon^2)\,. \qquad /34/$$

По определению функции φ, векторы δx_0, $\delta^2 x_0$ неизбежно являются решениями систем линейных алгебраических уравнений

$$h^0_x(x(t_0))\,\delta x_0 = 0,\ h^0_x(x(t_0))\,\delta^2 x_0 + (h^0_x(x(t_0))\,\delta x_0)_x\,\delta x_0 = 0. \qquad /35/$$

Верно и обратное. Если δx_0, $\delta^2 x_0$ - решения /35/, $h^0(\varphi(0)) = 0$, то найдутся непустой полуинтервал $[0, \varepsilon_0)$ и определенная на нем функция /34/ такие, что $h^0(\varphi(\varepsilon)) = 0$, $0 \le \varepsilon < \varepsilon_0$. Данный вывод непосредственно следует из предположения /26/ и теоремы о неявной функции.

Можно показать, что траектория $\tilde{x}(t)$ удовлетворяет всем перечисленным в разделе 2 требованиям и для приращений $\Delta\xi(t)$, $\Delta\tau$, Δt_1 справедливы оценки

$$|\Delta\xi(t)| \le K_1\varepsilon, \ |\Delta\tau| \le K_2\varepsilon, \ |\Delta t_1| \le K_3\varepsilon \qquad /36/$$

равномерно по $t_0 \le t \le t_1$ $(0 \le \varepsilon < \varepsilon_1)$, где $K_1, K_2, K_3, \varepsilon_1 \le \varepsilon_0$ - положительные постоянные. На управлениях $u(t)$, $\tilde{u}(t)$ формула приращения /32/ примет вид

$$\Delta K = -\psi'(t_0)\Delta x_0 - 1/2\, \Delta x_0' \Psi(t_0)\Delta x_0 - \int_{\theta-\varepsilon}^{\theta} \Delta_v H(\psi, x, u, t)\,dt -$$
$$-\int_{\theta-\varepsilon}^{\theta} [\Delta_v H_x'(\psi, x, u, t)\Delta\xi + \Delta_v f'(x, u, t)\Psi\Delta\xi]\,dt +$$
$$+ 1/2 \int_{\theta-\varepsilon}^{t_1} \Delta\xi' Q \Delta\xi\,dt + \eta(\varepsilon), \qquad /37/$$
$$\eta(\varepsilon) = o_\Phi(\|\Delta\xi(t_1)\|^2) - \int_{\theta-\varepsilon}^{t_1} [o_H(\|\Delta\xi\|^2) + \Delta\xi'\Psi_{o_f}(\|\Delta\xi\|)]\,dt -$$
$$- 1/2 \int_{\theta-\varepsilon}^{\theta} \Delta\xi'\Delta_v [f_x'(x, u, t)\Psi + \Psi f_x(x, u, t) + H_{xx}(\psi, x, u, t)]\,dt +$$
$$+ o((max\{|\Delta\tau|, \|\Delta\xi(\tau-)\|, \|\Delta\xi(\tau+)\|, |\Delta t_1|\})^2).$$

С учетом оценок /36/ имеем $\eta(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$. Теперь выберем в уравнении /IO/ матрицу $Q(t)$ неположительно определенной ($Q(t) \le 0$) равномерно по $t_0 \le t \le t_1$ и разложим интегралы /37/ по степеням ε. Поскольку

$$\int_{\theta-\varepsilon}^{t_1} \Delta\xi' Q\Delta\xi\,dt \le 0, \quad \Delta\xi(\theta) = \varepsilon[\delta\xi(\theta) + \Delta_v f(x(\theta), u(\theta), \theta)] + o(\varepsilon),$$
$$\delta\dot{\xi} = f_x(x(t), u(t), t)\delta\xi, \quad \delta\xi(t_0) = \delta x_0,$$

то в результате получим

$$\Delta K \le -\varepsilon\psi'(t_0)\delta x_0 - \int_{\theta-\varepsilon}^{\theta} \Delta_v H(\psi, x, u, t)\,dt -$$

$$-\varepsilon^2/2\left[\psi'(t_0)\delta^2 x_0 + \delta x_0'\Psi(t_0)\delta x_0 + (\Delta_v H_x' + \Delta_v f'\Psi)(\delta\xi + \Delta_v f)|_{t=\theta}\right] + o(\varepsilon^2). \qquad /38/$$

Если управление $u(t)$ оптимально, то левая часть последнего неравенства неотрицательна. Отсюда непосредственно следует условие максимума гамильтониана

$$H(\psi(t), x(t), v, t) \le H(\psi(t), x(t), u(t), t), \quad v \in U, \qquad /39/$$

в моменты $t_0 < t < t_1, t \ne \tau$, и условие трансверсальности

$$\psi(t_1) = -h_x^{0'}(x(t_0))\lambda^0 \qquad /40/$$

для левого конца оптимальной траектории, где λ^0 - некоторый вектор из R^m. Предельным переходом по t неравенство /39/ устанавливается и в точках t_0, t_1, τ. Данный результат вместе с сопряженным векторным уравнением /IO/, /28/, /I6/ составляет содержание известного принципа максимума [2, 5] для разрывных систем. В работе [6] принцип максимума установлен для участков скольжения

оптимальной траектории по поверхности разрыва правых частей при дополнительном предположении выпуклости вектограммы системы.

В [2] было отмечено, что принцип максимума является достаточным условием оптимальности, если данные задачи /33/ имеют вид /23/ и $C = 0$, $h^0 = x - x_0$, $h^1 = h^1(t)$. Анализ формулы приращения /32/ позволяет это утверждение несколько расширить. Именно, принцип максимума будет достаточным условием оптимальности, если в задаче /33/ функция $\Phi(x,t)$ выпукла по x при каждом t, функции f, p удовлетворяют /23/, функция $h^0(x)$ аффинна, $h^1(x,t) = h^1(t)$. В этом случае формула /32/ с учетом /40/ принимает вид

$$\Delta K = -\int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\tilde u} H(\psi, x, u, t)\,dt + o_\Phi(\|\Delta x(t_1)\|)$$

вдоль любой экстремали задачи /33/. Отсюда видно, что выпуклость Φ и условие максимума /39/ обеспечивают неравенство $\Delta K \geq 0$, гарантирующее оптимальность экстремали.

Вернемся к анализу неравенства /38/. Набор из функций $u(t)$, $x(t), \psi(t)$ и параметров $\lambda^0 \in R^m$, $\lambda^1 \in R$, удовлетворяющих всем соотношениям принципа максимума, назовем экстремалью задачи /33/. Экстремаль задачи /33/ назовем особой, если

$$H(\psi(t), x(t), v, t) \equiv H(\psi(t), x(t), u(t), t),\ t_0 \leq t \leq t_1,\ v \in U.$$

Таким образом, вдоль особой экстремали условие /39/ максимума гамильтониана как необходимое условие оптимальности становится вырожденным. На особой оптимальной экстремали неравенство /38/ можно представить в форме

$$0 \leq \Delta K \leq -\varepsilon^2/2\,\Big[\delta x_0'((\lambda^{0\prime} h^0)_{xx}(x(t_0)) + \Psi(t_0))\,\delta x_0 +$$

$$+ (\Delta_v H_x' + \Delta_v f'\Psi)(\delta\xi + \Delta_v f)\big|_{t=\theta}\Big] + o(\varepsilon^2), \qquad /4I/$$

поскольку из /40/, /35/ вытекает

$$\psi'(t_0)\,\delta x_0 = -\lambda^{0\prime} h_x^0(x(t_0))\,\delta x_0 = 0,$$

$$\psi'(t_0)\,\delta^2 x_0 = -\lambda^{0\prime} h_x^0(x(t_0))\,\delta^2 x_0 =$$

$$= -\lambda^{0\prime}(h_x^0(x(t_0))\,\delta x_0)_x\,\delta x_0 = \delta x_0'(\lambda^{0\prime} h^0)_{xx}(x(t_0))\,\delta x_0 .$$

В силу малости ε и независимости v, δx_0 , из /4I/ вытекает

Т е о р е м а. Пусть $u(t), x(t), \psi(t), \lambda^0, \lambda^1$ – особая оптимальная экстремаль задачи /33/ с указанными в п. 2 свойствами. Тогда для любой кусочно-непрерывной симметричной матричной функции $Q(t) \leq 0$ существует определенное вдоль экстремали решение $\Psi(t)$ уравнения /I0/ с начальным условием /29/ и условием скачка /I7/ такое, что выполняется неравенство

$$\Delta_v H_x'(\psi(t), x(t), u(t), t)\,\Delta_v f(x(t), u(t), t) +$$

$$+ \Delta_v f'(x(t), u(t), t)\,\Psi(t)\,\Delta_v f(x(t), u(t), t) \leq 0,\ t_0 \leq t \leq t_1,\ v \in U,$$

и условие неположительности матрицы

$$(\lambda^{0\prime} h^{0})_{xx} (x(t_0)) + \Psi(t_0) \leq 0$$

на ядре оператора $h^{0}_{x}(x(t_0)): R^n \to R^m$.

Предыдущими рассуждениями теорема доказана полностью.

В формулах /2I/, /32/ приращения функционала для разрывных систем имеется слагаемое $(\Delta_{\tilde{u}(\tau)} \mu) \rho'_x \Delta\xi(\tau-)$, которое отсутствует в гладких системах. Получим из него дополнительную информацию об оптимальности процесса, задав игольчатую вариацию с параметрами ε, v на отрезке $[\tau-\varepsilon, \tau+\varepsilon]$. Таким же путем, как раньше, устанавливаем следующий результат.

В условиях предыдущей теоремы для оптимальности особой экстремали необходимо выполнение неравенства

$$\Delta_v [\psi'(\tau+) \nabla f(x(\tau), u(\tau), \tau) / \overset{\circ}{p}(x(\tau), u(\tau), \tau)] \times$$

$$\times \rho'_x (x(\tau), \tau) \ \Delta_v f^{-} (x(\tau), u(\tau), \tau) \geq 0 \qquad /42/$$

для всех $v \in U$, удовлетворяющих условию $\overset{\circ}{p}(x(\tau), v, \tau) \neq 0$.

В заключение отметим особенности конечных результатов по сравнению с аналогичными для непрерывных систем. Разрывность системы /I/ обусловливает разрывность решения уравнения в вариациях. Последнее, как следует из /22/, /I3/, /I5/, в момент прохождения фазовой точки через поверхность разрыва правых частей /I/ претерпевает скачкообразное изменение. Скачки решения уравнения в вариациях компенсируются скачками сопряженных переменных так, что формы $\psi'(t)\Delta\xi(t)$, $\Delta\xi'(t)\Psi(t)\Delta\xi(t)$ остаются по t непрерывными. В результате "компенсации" в формуле приращения целевого функционала появляется дополнительное слагаемое, которого нет в непрерывных системах. Необходимое условие оптимальности особой экстремали, приведенное в теореме, по форме (но не по существу) совпадает с аналогичными условиями для непрерывных систем. Условие /42/ является, по-видимому, специфическим для разрывных систем и не имеет аналогов в непрерывных системах. Анализ формулы приращения функционала показывает, что принцип максимума дает достаточные условия оптимальности для сравнительно узкого класса разрывных систем, имеющих разрывы правых частей по t в фиксированные моменты времени.

Поступила в ред.-изд.отдел
3I января I979 г.

Литература

I. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. - М.: Наука, I973.- 256с.

2. Величенко В.В. О задачах оптимального управления для уравнений с разрывными правыми частями.-Автоматика и телемеха-

ника, 1966, № 7, с.20-30.

3. Срочко В.А. Техника вывода необходимых условий оптимальности в непрерывных задачах управления со свободным правым концом.-В кн: Дифференциальные и интегральные уравнения. Иркутск, 1976, выпуск 4, с.145-156.

4. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. - Мат.сб., 1960, т.51, № 1, с.99-128.

5. Розов Н.Х. Метод локальных сечений для систем с преломлением траекторий. -Докл. АН СССР, 1972, т.202, № 3, с.535-538.

6. Кугушев Е.И. Необходимые условия оптимальности для систем, описываемых уравнениями с разрывной правой частью. - Вестн. МГУ, сер.матем. и мех., 1974, № 2, с.83-90.