Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1980 г., вып.20
УДК 517.934.

СТАБИЛИЗАЦИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ДИСКРЕТНОЙ ИНФОРМАЦИИ О СОСТОЯНИИ СИСТЕМЫ

В.И.Болдырев, Е.Я.Смирнов

§ I. Постановка задачи. Основные результаты

Решается задача стабилизации линейной системы в том случае, когда информация о ее состоянии поступает в дискретные моменты времени t_ℓ, удовлетворяющие условиям

$$h_1 \le t_{\ell+1} - t_\ell \le h_2, \qquad \ell = 0, 1, 2, \ldots, \tag{I.1}$$

где h_1, h_2 - заданные положительные числа, и указываются некоторые методы построения линейных стабилизирующих управлений.

Рассмотрим линейную систему

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \tag{I.2}$$

у которой в дискретные моменты времени $t = t_\ell$ измеряется вектор

$$\eta(t_\ell) = C^*(t_\ell)x(t_\ell), \tag{I.3}$$

где $A = A(t)$, $B = B(t)$, $C = C(t)$ - непрерывные и ограниченные на промежутке $[0, +\infty)$ матрицы размерностей $n \times n$, $n \times r$, $n \times k$ соответственно, $*$ обозначает операцию транспонирования.

З а д а ч а. Построить линейное управление

$$u = M^*(t)\,\eta(t_\ell), \quad t \in [t_\ell, t_{\ell+1}), \qquad \ell = 0, 1, 2, \ldots, \tag{I.4}$$

так, чтобы все решения системы /I.2/, замкнутой управлением /I.4/, т.е. системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t)M^*(t)\,\eta(t_\ell), \tag{I.5}$$
$$t \in [t_\ell, t_{\ell+1}), \quad \ell = 0, 1, 2, \ldots,$$

асимптотически стремились к 0 при $t \to +\infty$.

Управления вида /I.4/, обладающие указанным в формулировке задачи свойством, будем называть стабилизирующими.

Займемся теперь построением стабилизирующих управлений,

причем сначала рассмотрим ситуацию, когда матрицы A, B, C и шаг дискретности замеров постоянны.

Введем обозначения:

$$L(P,Q) = (Q, PQ, \dots, P^{p-1}Q) ,$$

где P, Q - произвольные матрицы размерностей $p \times p$ и $p \times q$ соответственно;

$\mathcal{F}$ - совокупность квадратных матриц, все собственные числа которых по модулю меньше 1.

Т е о р е м а I. Пусть в соотношении /I.I/ $h_1 = h_2 = h$, т.е. $t_\ell = \ell h$; в соотношениях /I.2/, /I.3/ A, B, C - постоянные матрицы. Пусть, кроме того, системы

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu,$$

$$\frac{dy}{dt} = A^* y + Cv$$

полностью управляемы, т.е. ранг матриц

$$L(A,B) = (B, AB, \dots A^{n-1}B), \quad L(A^*, C) = (C, A^*C, \dots A^{*\,n-1}C)$$

равен n. Тогда почти для всех $h \in [0, +\infty)$ стабилизирующие управления вида /I.4/ существуют. Для шага дискретности h, удовлетворяющего условию $\operatorname{rank}(L(e^{A^*h}, C)) = n$, таковыми являются управления, определяемые по формуле:

$$u = M^*(t)\, y(t_\ell) = M^*(t)\, C^* x(\ell h), \qquad /I.6/$$

$$M^*(t) = B^* e^{-A^*(t-\ell h)} \mathcal{D}^{-1} e^{-Ah} G + N^*(t),$$

$$t \in [\ell h, (\ell+1)h),$$

где

$$\mathcal{D} = \int_0^h e^{-A\tau} B B^* e^{-A^*\tau}\, d\tau ;$$

G - произвольная постоянная $n \times K$ -матрица такая, для которой $F = e^{Ah} + GC^* \in \mathcal{F}$; $N(t)$- произвольная $K \times r$ -матрица такая, для которой выполняются условия

$$\int_{\ell h}^{(\ell+1)h} e^{-A(t-\ell h)} B N^*(t)\, dt = 0, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots .$$

Ослабим условия теоремы /I/ $\operatorname{rank}[L(A,B)] = n$, $\operatorname{rank}[L(A^*, C)] = n$. Для этого сделаем некоторые предварительные преобразования соотношений /I.2/, /I.3/.

Пусть $\operatorname{rank}[L(A,B)] = m < n$, т.е. система /I.2/ управляема не полностью. Тогда, с помощью неособенного преобразования переменных $x = Sz$ систему /I.2/ можно привести к виду

$$\frac{dz}{dt} = \tilde{A} z + \tilde{B} u, \qquad /I.7/$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_1, & A_2 \\ 0, & A_3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

где z_1, z_2 - векторы размерностей m и $n-m$ соответственно; A_1, A_2, A_3, B_1 - матрицы размерностей $m \times m$, $m \times (n-m)$, $(n-m) \times (n-m)$, $m \times r$ соответственно, а подсистема $dz_1/dt = A_1 z_1 + B_1 u$ полностью управляема.

Соотношение /I.3/ в новых переменных имеет вид

$$\eta(t_\ell) = C^* x(t_\ell) = \tilde{C}^* z(t_\ell) = C_1^* z_1(t_\ell) + C_2^* z_2(t_\ell),$$

$$\tilde{C}^* = C^* S = (C_1^*, C_2^*). \qquad /I.8/$$

Кроме того, введем вспомогательную систему

$$\frac{d\xi}{dt} = A_1^* \xi + C_1 v. \qquad /I.9/$$

Если эта система управляема не полностью, то, как уже отмечалось, с помощью некоторого преобразования $\xi = S_1 \varsigma$ эту систему можно привести к виду

$$\frac{d\varsigma}{dt} = P\varsigma + Qv,$$

$$P = \begin{pmatrix} P_1, & P_2 \\ 0, & P_3 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} Q_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varsigma = \begin{pmatrix} \varsigma_1 \\ \varsigma_2 \end{pmatrix}, \qquad /I.10/$$

где ς_1, ς_2 - векторы размерностей μ и $m-\mu$ соответственно; P_1, P_2, P_3 и Q_1 - матрицы размерностей $\mu \times \mu$, $\mu \times (m-\mu)$, $(m-\mu) \times (m-\mu)$ и $\mu \times K$ соответственно, причем подсистема $\frac{d\varsigma_1}{dt} = P + Q_1 v$ управляема полностью.

Т е о р е м а 2. Пусть в соотношении /I.I/ $t_\ell = \ell h$, а в соотношениях /I.2/, /I.3/ A, B, C - постоянные матрицы. Пусть, кроме того, системы

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu,$$

$$\frac{dy}{dt} = A^* y + Cv$$

стабилизируемы, т.е. существуют управления $u = M_1^* x$, $v = M_2^* y$ такие, что замкнутые системы

$$\frac{dx}{dt} = (A + BM_1^*)x, \quad \frac{dy}{dt} = (A^* + CM_2^*)y$$

экспоненциально устойчивы, т.е. все собственные числа матриц $(A + BM_1^*)$, $(A^* + CM_2^*)$ имеют отрицательные вещественные части.

Тогда для почти всех $h \in [0, +\infty)$ существуют управления вида /I.4/, стабилизирующие систему /I.2/. Для шага дискретности h, удовлетворяющего условию $rank\,[L(e^{P_1 h}, Q_1)] = \mu$, таковыми являются управления, определяемые по формуле

$$u = \mathcal{M}^*(t)\,\eta(t_\ell) = \mathcal{M}^*(t)\,C^* x(\ell h),$$

$$\mathcal{M}^*(t) = B_1^* e^{-A_1^*(t-\ell h)} \mathcal{D}_1^{-1} e^{-A_1 h} G_1 + N^*(t) \qquad /I.II/$$

$$t \in [\ell h, (\ell+1)h),$$

где

$$\mathcal{D}_1 = \int_0^h e^{-A_1 \tau} B_1 B_1^* e^{-A_1^* \tau}\, d\tau;$$

G_1 - произвольная постоянная $m \times K$-матрица такая, что $F_1 = e^{A_1 h} + G_1 C_1^* \in \mathcal{F}$, $N(t)$ - произвольная $K \times r$-матрица такая, для которой выполняются соотношения

$$\int_{\ell h}^{(\ell+1)h} e^{-A_1(t-\ell h)} B_1 N^*(t)\, dt = 0, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь A_1, B_1, C_1, P_1, Q - матрицы из соотношений /I.7/ - /I.10/.

Доказательства теорем I,2 будут приведены в § 2.

Коэффициенты указанных в теоремах I,2 стабилизирующих управлений /I.6/, /I.II/ являются функциями матриц $G\,(G_1)$ и $N(t)$. Эти матрицы выбираются неоднозначно. Поэтому появляется возможность строить стабилизирующие управления, удовлетворяющие дополнительным требованиям, например, оптимальности в смысле некоторого функционала. Такого рода задачи выходят за рамки данной статьи. Здесь мы лишь отметим, что при $N(t) \equiv 0$ управления /I.6/, /I.II/ обладают минимальной нормой в смысле метрики L^2. Действительно, возьмем для определенности управление /I.6/. Тогда

$$\int_0^{+\infty} u^*(t)\,u(t)\,dt = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \int_{\ell h}^{(\ell+1)h} u^*(t)\,u(t)\,dt = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \eta^*(\ell h) \times$$

$$\times \int_{\ell h}^{(\ell+1)h} \mathcal{M}(t)\,\mathcal{M}^*(t)\,dt\,\eta(\ell h) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \eta^*(\ell h)\,\Big[G^* e^{-A^* h} \times$$

$$\times \mathcal{D}^{-1} e^{-Ah} G + \int_{\ell h}^{(\ell+1)h} N(t)\,N^*(t)\,dt\Big]\,\eta(\ell h).$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^{+\infty} u^*(t)\,u(t)\,dt$$

достигает своего минимума при $N(t) \equiv 0$, так как $\eta(\ell h)$ не зависят от $N(t)$ для всех $\ell = 0, 1, 2, \dots$.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда шаг дискретности и матрицы A, B не являются постоянными, но при этом будем считать, что имеет место случай полной обратной связи, т.е. $C = E_n$, где E_n – единичная матрица n-го порядка.

Положим

$$\mathcal{D}_\ell = \int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} X^{-1}(t, t_\ell) B(t) B^*(t) X^{*-1}(t, t_\ell)\, dt,$$

где $X(t, t_\ell)(X(t_\ell, t_\ell) = E_n)$ – фундаментальная матрица решений системы $dx/dt = Ax$.

Т е о р е м а 3. Если существует положительная константа d такая, что для всех $\ell = 0, 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство $\det(\mathcal{D}_\ell) \geq d$ (система /I.2/ равномерно полностью управляема), то стабилизирующие управления вида /I.4/ существуют. Таковыми являются управления, определяемые по формуле

$$u = \mathcal{M}^*(t) x(t_\ell),$$

$$\mathcal{M}^*(t) = B^*(t) X^{*-1}(t, t_\ell) \mathcal{D}_\ell^{-1} X^{-1}(t_{\ell+1}, t_\ell) \times$$
$$\times [F - X(t_{\ell+1}, t_\ell)] + N^*(t), \quad t \in [t_\ell, t_{\ell+1}), \qquad /I.12/$$

где $F \in \mathcal{F}$, $N(t)$ – произвольная $n \times r$-матрица, удовлетворяющая условиям

$$\int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} X^{-1}(t, t_\ell) B(t) N^*(t)\, dt = 0, \quad \ell = 0, 1, 2, \ldots .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы очевидно, т.к. после подстановки управления /I.12/ в систему /I.5/ находим, что $x(t_{\ell+1}) = F x(t_\ell)$, где F – выбранная нами матрица, собственные числа которой по модулю меньше единицы.

Укажем теперь два способа построения стабилизирующих управлений вида /I.4/, основанные на знании линейных непрерывных управлений, стабилизирующих системы /I.2/.

Т е о р е м а 4. Если непрерывное управление $u = K^* x$ стабилизирует систему /I.2/, т.е. замкнутая система $\frac{dx}{dt} = (A + BK^*) x$ экспоненциально устойчива, то управление вида /I.4/

$$\tilde{u} = \mathcal{M}^*(t) x(t_\ell), \ \mathcal{M}^*(t) = K^*(t) X_з(t, t_\ell), \quad t \in [t_\ell, t_{\ell+1})$$

стабилизирует систему /I.2/. Здесь $X_з(t, t_\ell)$ – фундаментальная матрица решений системы $\frac{dx}{dt} = (A + BK^*) x$, нормированная в точке $t = t_\ell$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы очевидно. Действительно, так как решение системы $\frac{dx}{dt} = (A + BK^*) x$, начинающееся в мо-

мент $t = t_\ell$ в точке $x(t_\ell)$, имеет вид $x(t) = X_з(t, t_\ell)\, x(t_\ell)$, то на промежутке $[t_\ell,\ t_{\ell+1})$ имеем

$$\bar{u} = K^*(t)\, x(t) = K^*(t)\, X_з(t, t_\ell)\, x(t_\ell) = \mathcal{M}^*(t)\, x(t_\ell) = \tilde{u}\ ,$$

следовательно, управление $\tilde{u}$ - стабилизирующее.

Т е о р е м а 5. Пусть непрерывное управление $u = \mathcal{M}^* x$ стабилизирует систему /I.2/. Тогда существует положительная константа h_0 такая, что если величины h_1, h_2 из /I.I/ удовлетворяют условию $0 < h_1 \le h_2 \le h_0$, то управления $u = \mathcal{M}^*(t)\, x(t_\ell)$, $u = \mathcal{M}^*(\vartheta)\, x(t_\ell)$, $\vartheta, t \in [t_\ell,\ t_{\ell+1})$, стабилизируют систему /I.2/.

Д о к а з а т е л ь с т в о этой теоремы проводится с несущественными изменениями по схеме доказательства аналогичной теоремы В.И.Зубова [I,4], доказанной для случая, когда матрицы $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{M}$ и шаг дискретности постоянны.

§ 2. Доказательство основных результатов

I. В с п о м о г а т е л ь н ы е у т в е р ж д е н и я. Рассмотрим замкнутую систему /I.5/. Интегрируя эту систему на промежутке $[t_\ell\ ,\ t_{\ell+1}]$ по формуле Коши, получаем

$$x(t) = F(t, t_\ell)\, x(t_\ell), \qquad t \in [t_\ell, t_{\ell+1}],$$
$$x(t_{\ell+1}) = F\, x(t_\ell)\ , \qquad /2.I/$$

где $$F_\ell = F(t_{\ell+1}, t_\ell)\ ,$$

$$F(t, t_\ell) = X(t, t_\ell) + \mathcal{J}(t, t_\ell) \cdot C^*(t_\ell),$$

$$\mathcal{J}(t, t_\ell) = X(t, t_\ell) \cdot \int_{t_\ell}^{t} X^{-1}(\tau, t_\ell)\, B(\tau)\, \mathcal{M}^*(\tau)\, d\tau,$$

$X(t, t_\ell)\ (X(t_\ell, t_\ell) = E_n)$ - фундаментальная матрица решений системы $\dfrac{dx}{dt} = \mathcal{A}x$, нормированная в точке $t = t_\ell$; E_n - единичная матрица n -го порядка. Так как для любого ℓ длина промежутка $[t_\ell,\ t_{\ell+1}]$ не больше константы h_2 (см. /I.I/), а матрицы $\mathcal{A}, \mathcal{B}, C$ ограничены на промежутке $[0, +\infty)$, то и матрицы $F(t, t_\ell)$ тоже будут ограниченными на промежутках $[t_\ell,\ t_{\ell+1}]$ равномерно по всем $\ell = 0, 1, 2, \ldots$.

Л е м м а I. Для того чтобы все решения замкнутой системы /I.5/ асимптотически стремились к нулю при $t \to +\infty$, т.е. чтобы управление /I.4/ было стабилизирующим, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$\lim_{\ell \to +\infty} \prod_{p=0}^{\ell} F_{\ell-p} = 0\ . \qquad /2.2/$$

Справедливость леммы следует из соотношения /2.1/ и ограниченности матриц $F(t, t_\ell)$, равномерной относительно всех $t \in [t_\ell, t_{\ell+1}]$ и $\ell = 0,1,2,\dots$.

Л е м м а 2. Если $F_\ell = F$, $\ell = 0,1,2,\dots$, то для выполнения соотношения /2.2/ необходимо и достаточно, чтобы $F \in \mathcal{F}$, т.е. чтобы все собственные числа матрицы F по модулю были меньше 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы опирается на жорданову форму матрицы F и приведено в [2].

Таким образом, если $F_\ell \equiv F$ для всех ℓ и $F \in \mathcal{F}$, то /2.2/ выполняется. Пусть по-прежнему $F_\ell \in \mathcal{F}$, но F_ℓ зависят от ℓ. Будет ли в этом случае выполняться соотношение /2.2/? Приводимый ниже пример дает отрицательный ответ на этот вопрос.

ПРИМЕР. Пусть F_ℓ - матрица второго порядка, определяемая по формулам

$$F_\ell = \begin{cases} S^* Y S, & \ell = 2k; \\ S Y S^*, & \ell = 2k+1, \ k = 0,1,2,\dots, \end{cases}$$

где

$$S = \begin{pmatrix} \cos \pi/4, & \sin \pi/4 \\ -\sin \pi/4, & \cos \pi/4 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -\alpha, & -\beta \end{pmatrix},$$

причем $Y \in \mathcal{F}$. Тогда и $F_\ell \in \mathcal{F}$. Положим

$$\Psi_1 = S^2 Y = \begin{pmatrix} -\alpha, & -\beta \\ 0, & -1 \end{pmatrix}, \qquad \Psi_2 = S^{*2} Y = -\Psi_1,$$

$$\Psi = \Psi_1 \Psi_2 = -\Psi_1^2.$$

Тогда

$$\prod_{p=0}^{\ell} F_{\ell-p} = \begin{cases} S^* Y \Psi^k S, & \ell = 2k; \\ S^* \Psi^{k+1} S, & \ell = 2k+1. \end{cases}$$

Так как собственными числами матрицы Ψ являются числа $-1, -\alpha^2$, то отсюда следует, что $\prod_{p=0}^{\ell} F_{\ell-p}$ не стремится к 0 при $\ell \to +\infty$.

2. Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы I. Поскольку система $\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$ полностью управляема, то, согласно [3,4], матрица

$$\mathcal{D} = \int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} X^{-1}(t, t_\ell) B B^* X^{-1*}(t, t_\ell)\, dt =$$

$$= \int_{\ell h}^{(\ell+1)h} e^{-A(t-\ell h)} B B^* e^{-A^*(t-\ell h)} dt =$$

$$= \int_0^h e^{-A\tau} BB^* e^{-A^*\tau} d\tau \quad \text{- неособая.}$$

Замкнем систему /I.2/ управлением /I.6/, в котором G - произвольная постоянная $n\times K$-матрица, а N - произвольная $K\times r$-матрица, удовлетворяющая условиям

$$\int_{\ell h}^{(\ell+1)h} e^{-A(t-\ell h)} BN^*(t)\,dt = 0, \quad \ell = 0,1,2,\dots$$

(например, $N(t)\equiv 0$).

Проинтегрировав полученную замкнутую систему /I.5/ на промежутке $[\ell h, (\ell+1)h]$, получим

$$x\,[(\ell+1)h] = F x(\ell h);$$

$$F = e^{Ah} + e^{Ah}\int_{\ell h}^{(\ell+1)h} e^{-A(t-\ell h)} BM^*(t)\,dt\, C^* = e^{Ah} + G C^* . \qquad /2.3/$$

Пусть шаг дискретности h удовлетворяет условию теоремы $rank[L(e^{A^*h}, C)] = n$, тогда система $\frac{d\xi}{dt} = e^{A^*h}\xi + C w$ полностью управляема. Это означает, что управление $w = G^*\xi$ можно выбрать таким образом, чтобы обеспечить матрице $F^* = e^{A^*h} + C G^*$ (см. /2.3/) любые наперед заданные собственные числа. Выберем G таким образом, чтобы все собственные числа матрицы F^*, совпадающие с собственными числами матрицы F, по модулю были < 1. Тогда, согласно лемме /2/, векторы $x[(\ell+1)h] = F x(\ell h) = F^{\ell+1}x(0)$, определяемые по формуле /2.3/, асимптотически стремятся к нулю при $\ell \to +\infty$, а это согласно лемме I, означает, что имеет место соотношение $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$ для любого $x(0)$, т.е. управление /I.6/ стабилизирующее.

Таким образом, для завершения доказательства нам остается лишь показать, что условие теоремы $rank[L(A^*, C)] = n$ влечет за собой почти для всех h выполнение равенства $rank[L(e^{A^*h}, C)] = n$. Покажем это. Предположим, что для всех $h \in [0,+\infty)$ $rank[L(e^{A^*h}, C)] < n$,

т.е. строки матрицы $L(e^{A^*h}, C) = (C, e^{A^*h}C, \dots, e^{A^*(n-1)h}C)$ линейно-зависимы для $h\in[0,+\infty)$. Это означает, что существует ненулевой вектор c размерности n такой, что для него выполняется тождество $c^* L(e^{A^*h}, C) \equiv 0$, равносильное n тождествам $c^* e^{A^*ih} C \equiv 0$, $i = 0,1,\dots,n-1$. Вычисляя i-ю производную по h, получаем соотношения $i^i\cdot c^*(A^*)^i e^{A^*ih} C \equiv 0$, которые при $h = 0$ эквивалентны

равенствам $c^*(A^*)^i C=0,\ i=0,1,\dots,n-1$. Последнее означает, что строки матрицы $L(A^*,C)$ линейно-зависимы, т.е. $\operatorname{rank}[L(A^*,C)]<n$, что не имеет места.

Таким образом, предположение о том, что для всех $h\in[0,+\infty)$ $\operatorname{rank}[L(e^{A^*h},C)]=n$, неверно. Следовательно, существуют $h\in[0,+\infty)$, для которых $\operatorname{rank}[L(e^{A^*h},C)]=n$. Так как для таких h и любого ненулевого вектора c размерности n выполняется неравенство $c^*L(e^{A^*h},C)\neq 0$ (строки матрицы $L(e^{A^*h},C)$ линейно-независимы, то для любого ненулевого вектора c справедливо неравенство

$$c^*L(e^{A^*h},C)\cdot L^*(e^{A^*h},C)c>0 .$$

Это означает, что функция $H(h)=\det[L(e^{A^*h},C)\cdot L^*(e^{A^*h},C)]$ положительна для тех h, для которых $\operatorname{rank}[L(e^{A^*h},C)]=n$. Поскольку функция $H(h)$ голоморфна по h и $H(h)\not\equiv 0$, то соотношение $H(h)=0$ может иметь место разве лишь для дискретного множества значений h, не имеющего точек сгущения. Следовательно, равенство $\operatorname{rank}[L(e^{A^*h},C)]=n$ выполняется почти для всех $h\in[0,+\infty)$. Неравенство же $\operatorname{rank}[L(e^{A^*h},C)]<n$ возможно лишь для дискретного множества значений h, расстояние между любыми соседними точками которого не меньше некоторой положительной константы. Теорема доказана.

3. Доказательство теоремы 2. Пусть система /I.2/ управляема не полностью. Тогда после преобразования переменных $x=Sz$ соотношения /I.2/, /I.3/ перейдут в соотношения /I.7/ и /I.8/. Так как подсистема $\frac{dz_1}{dt}=A_1z_1+B_1u$ управляема полностью, то, согласно [3,4], матрица

$$\mathcal{D}_1=\int\limits_{lh}^{(l+1)h} e^{-A_1(t-lh)}B_1B_1^*e^{-A_1^*(t-lh)}dt=\int\limits_0^h e^{-A_1\tau}B_1B_1^*e^{-A_1^*\tau}d\tau$$

неособенная. Замкнем систему /I.7/ управлением /I.II/, в котором $\eta(lh)=C^*x(lh)=\tilde{C}^*z(lh)$; G_1 – произвольная постоянная $m\times K$ -матрица, $N(t)$ – произвольная $K\times r$ -матрица, удовлетворяющая условиям

$$\int\limits_{lh}^{(l+1)h} e^{-A_1(t-lh)}B_1N^*(t)dt=0,\qquad l=0,1,2,\dots$$

(например, $N(t)\equiv 0$).

Проинтегрировав полученную замкнутую систему на промежутке $[lh,(l+1)h]$, получим

$$z[(l+1)h]=F_l z(lh),\ F_l=e^{\tilde{A}h}+$$
$$+e^{\tilde{A}h}\cdot\int\limits_{lh}^{(l+1)h} e^{-\tilde{A}(t-lh)}\tilde{B}\mathcal{M}^*(t)dt\cdot\tilde{C}^* .$$

Матрица $e^{\tilde{A}(t-\ell h)}$, являющаяся фундаментальной матрицей решений системы $\frac{dz}{dt} = \tilde{A} z$, как и $\tilde{A}$, будет верхней блочно-треугольной:

$$e^{\tilde{A}(t-\ell h)} = \begin{pmatrix} X_1(t-\ell h), & X_2(t-\ell h) \\ 0 \quad , & X_3(t-\ell h) \end{pmatrix},$$

$$X_1(t-\ell h) = e^{A_1(t-\ell h)},$$

$$X_3(t-\ell h) = e^{A_3(t-\ell h)}, \quad X_2(t-\ell h) = e^{A_1(t-\ell h)} \int_{\ell h}^{t} e^{-A_1(\tau-\ell h)} \times$$

$$\times A_2 e^{A_3(\tau-\ell h)} d\tau = e^{A_1(t-\ell h)} \cdot \int_0^{t-\ell h} e^{-A_1\tau} \cdot A_2 \cdot e^{A_3\tau} d\tau,$$

поэтому $e^{-\tilde{A}(\tau-\ell h)} \cdot \tilde{B} = \begin{pmatrix} e^{-A_1(\tau-\ell h)} \; B_1 \\ 0 \end{pmatrix},$

$$e^{\tilde{A}h} \int_{\ell h}^{(\ell+1)h} e^{-A_1(\tau-\ell h)} \tilde{B} M^*(\tau) \, d\tau =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{A_1 h} \int_{\ell h}^{(\ell+1)h} e^{-A_1(\tau-\ell h)} B_1 M^*(\tau) \, d\tau \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$F_\ell = F \quad \text{и} \quad z[(\ell+1)h] = F \cdot z(\ell h),$$

где

$$F = \begin{pmatrix} F_1 & , & F_2 \\ 0 & , & F_3 \end{pmatrix}, \; F_2 = e^{A_1 h} \int_0^h e^{-A_1\tau} A_2 e^{A_3\tau} d\tau + G_1 C_2^*,$$

$$F_1 = e^{A_1 h} + G_1 C_1^*, \qquad F_3 = e^{A_3 h}.$$

Предположим, что $F \in \mathcal{F}$. Тогда, согласно лемме 2, векторы $z[(\ell+1)h] = F \cdot z(\ell h) = F^{\ell+1} \cdot z(0)$, определяемые по формуле /2.4/, асимптотически стремятся к 0 при $\ell \to +\infty$, а это, согласно лемме I, означает, что имеет место соотношение

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = S \qquad \lim_{t \to +\infty} z(t) = 0,$$

т.е. управление /I.II/ является стабилизирующим.

Собственные числа матрицы F совпадают с собственными числами матриц F_1, F_3. Согласно условию теоремы, система /I.2/ стабилизируема, следовательно, неуправляемая подсистема $\frac{dz_2}{dt} = A_3 z_2$ системы /I.7/ экспоненциально устойчива. Это означает, что все собственные числа λ матрицы A_3 имеют отрицательные вещественные части, а тогда величины $e^{\lambda h}$, являющиеся собственными числами матрицы F_3, по модулю меньше единицы, т.е. $F_3 \in \mathcal{F}$.

Таким образом, для того чтобы $F \in \mathcal{F}$, где F определяется по формулам /2.4/, т.е. чтобы управление /I.II/ было стабилизирующим, необходимо и достаточно существование такой $m \times K$-матрицы G, для которой $F_1 = e^{Ah} + G_1 C_1^* \in \mathcal{F}$. Покажем, что искомые матрицы G_1 существуют.

Рассмотрим соотношение /I.7/, /I.8/, получающиеся из соотношений /I.2/, /I.3/ с помощью преобразования переменных $x = S \cdot z$, а также вспомогательную систему

$$\frac{dy}{dt} = A^* y + C v. \qquad /2.5/$$

Так как матрицы A, C можно записать в виде $A = (S)\tilde{A}(S)^{-1}$, $C = (S)^{*-1}\tilde{C}$, то после преобразования переменных $y = (S)^{*-1}\tilde{y}$ система /2.5/ примет вид

$$\frac{d\tilde{y}}{dt} = \tilde{A}^* y + \tilde{C} v. \qquad /2.6/$$

Согласно условию теоремы, система /2.5/ стабилизируема, следовательно, стабилизируема и система /2.6/. Так как

$$\tilde{A}^* = \begin{pmatrix} A_1^*, & 0 \\ A_2^*, & A_3^* \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix},$$

а система /2.6/ стабилизируема, то такой же будет и система /I.9/ $\frac{d\xi}{dt} = A_1^* \xi + C_1 v$.

Действительно, если предположить, что система /I.9/ не стабилизируема, то она заведомо управляема не полностью и тогда с помощью некоторого преобразования переменных $\xi = S_1 \varsigma$ систему /I.9/ можно привести к виду /I.10/, где подсистема $\frac{d\varsigma}{dt} = P_3 \varsigma_2$ не является экспоненциально устойчивой, т.е. не все собственные числа матрицы P_3 имеют отрицательные вещественные части. Это означает, что если аналогичное преобразование $\tilde{y}_1 = S_1 \xi_1$, $\tilde{y}_2 = \xi_2$ сделать над системой /2.6/, то у этой системы выделится неуправляемая экспоненциально неустойчивая подсистема $\frac{d\varsigma}{dt} = P_3 \varsigma_2$, что невозможно в силу стабилизируемости системы /2.6/. Здесь $\tilde{y}^* = (\tilde{y}_1^*, \tilde{y}_2^*)$,

$\xi_1^* = (\varsigma_1^*, \varsigma_2^*)$, где $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \varsigma_1, \varsigma_2$ - векторы размерностей m, $n-m$, μ, $m-\mu$ соответственно. Таким образом, система /I.9/, а вместе с ней и система /I.10/ непременно стабилизируемы.

Рассмотрим теперь систему

$$\frac{d\tilde{\xi}}{dt} = e^{A_1^* h}\tilde{\xi} + C_1 v, \qquad /2.7/$$

и замкнем ее управлением $v = G_1^* \tilde{\xi}$. Тогда получим замкнутую систему

$$\frac{d\tilde{\xi}}{dt} = F_1^* \tilde{\xi}, \qquad /2.8/$$

где F_1 определяется по формулам /2.4/.

Пусть система /I.9/ управляема не полностью. После преобразования $\xi = S_1 \varsigma$ система /I.9/ переходит в систему /I.10/. Поэтому после аналогичного преобразования $\tilde{\xi} = S_1 \tilde{\varsigma}$ системы /2.7/, /2.8/ примут вид

$$\frac{d\tilde{\varsigma}}{dt} = e^{Ph}\tilde{\varsigma} + Qv,$$

$$\frac{d\tilde{\varsigma}}{dt} = \tilde{F}_1^* \tilde{\varsigma}, \qquad \tilde{F}_1^* = (S_1)^{-1} F_1^* (S_1) = e^{Ph} + QR^*,$$

$$R^* = (R_1^*, R_2^*) = G_1^* \cdot S_1 \tilde{\varsigma}^* = (\tilde{\varsigma}_1^*, \tilde{\varsigma}_2^*).$$

Здесь $\tilde{\varsigma}_1, \tilde{\varsigma}_2$ - векторы размерностей μ и $m-\mu$ соответственно; R_1, R_2 - матрицы размерностей $\mu \times K$ и $(m-\mu)\times K$ соответственно. Так как

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} P_1, P_2 \\ 0, P_3 \end{pmatrix},$$

$$e^{Ph} = \begin{pmatrix} e^{P_1 h}, & e^{Ph} \int_0^h e^{-P_1\tau} P_2 e^{P_3\tau} dt \\ 0, & e^{P_3 h} \end{pmatrix},$$

то

$$\tilde{F}_1^* = \begin{pmatrix} \Psi_1, & \Psi_2 \\ 0, & \Psi \end{pmatrix}, \quad \Psi_1 = e^{P_1 h} + Q_1 R_1^*,$$

$$\Psi_2 = e^{P_1 h} \int_0^h e^{-P_1\tau} P_2 e^{P_3\tau} d\tau + Q_1 R_2^*, \qquad /2.9/$$

$$\Psi_3 = e^{P_3 h}.$$

Поскольку система /I.10/ стабилизируема, то все собственные числа λ матрицы P_3 имеют отрицательные вещественные части. Следовательно, величины $e^{\lambda \cdot h}$, являющиеся собственными числами матрицы Ψ_3, по модулю меньше 1. Так как собственные числа матрицы $\tilde{F}_1$ совпадают

с собственными числами матриц Ψ_1, Ψ_2, а собственные числа матриц F_1 и $\tilde{F}_1$ совпадают между собой, то для того чтобы $F_1 \in \mathcal{F}$, необходимо и достаточно, чтобы $\Psi_1 \in \mathcal{F}$.

Пусть шаг дискретности h удовлетворяет условию

$rank[L(e^{P_1 h}, Q_1)] = \mu$, т.е. система $\frac{d\tilde{\xi}_1}{dt} = e^{P_1 h}\tilde{\xi}_1 + Q_1 v$ полностью управляема. Это означает, что управление $v = R_1^* \xi_1$ можно выбрать таким образом, чтобы матрице замкнутой системы $\Psi_1 = e^{P_1 h} + Q_1 R_1^*$ (см./2.9/) обеспечить любые наперед заданные собственные числа, в частности, собственные числа, модули которых меньше единицы. Это означает, что при выполнении условия $rank[L(e^{P_1 h}, Q)] = \mu$ матрицу G_1 в соотношении /I.II/ можно выбрать таким образом, чтобы это управление было стабилизирующим. В качестве такой G_1 нужно взять матрицу

$$G_1 = (S_1)^{*-1} R, \quad R^* = (R_1^*, R_2^*),$$

где R - произвольная $(m-\mu) \times K$ -матрица, а $\mu \times K$ -матрица R_1 обладает тем свойством, что $\Psi_1 = e^{P_1 h} + Q_1 R_1^* \in \mathcal{F}$.

Для завершения доказательства теоремы нам остается лишь показать, что существуют значения h, для которых $rank[L(e^{P_1 h}, Q_1)] = \mu$, причем таковыми являются почти все $h \in [0, +\infty)$. Показывается это точно так же, как и в теореме I при доказательстве аналогичного утверждения.

Теорема 2 доказана полностью.

З а м е ч а н и е. Если хотя бы одна из систем $\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$, $\frac{dy}{dt} = A^* y + Cv$ не стабилизируема, то, как следует из доказательства теоремы 2, управлений вида /I.4/, стабилизирующих систему /I.2/, не существует.

Поступила в ред.-изд.отдел.
7 февраля 1979 г.

Л и т е р а т у р а

I. Зубов В.И. Теория оптимального управления.-Л.: Судостроение, 1966.-352с.

2. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем.-М.: Мир, 1971.-312с.

3. Зубов В.И. Аналитическая динамика гидроскопических систем.-Л.: Судостроение, 1970.-320с.

4. Зубов В.И. Лекции по теории управления.-М.: Наука, 1975.-495с.