Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1980 г., вып.20
УДК 519.854.2

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КАЛЕНДАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

С.В.Севастьянов

В настоящей работе рассматривается следующая

Задача I (календарного распределения). Задано n видов изделий. Каждый вид изделия ($i=\overline{1,n}$) характеризуется числовым вектором $a_i=(a_{i1},\dots,a_{im})$. Требуется найти такое разбиение множества $\mathcal{N}=\{1,2,\dots,n\}$ на e подмножеств $P\{\mathcal{N}_1,\mathcal{N}_2,\dots,\mathcal{N}_e\}$, чтобы функционал

$$f_s(P)=\max_{1\le s\le e}\Big\|\sum_{i\in\mathcal{N}_s}a_i-B/e\Big\|_s$$

достигал своего минимума, где $B=\sum_{i\in\mathcal{N}}a_i$, $\|a\|_s$ – некоторая норма в пространстве R^m.

В работе [1] был предложен метод получения приближенных решений задачи I, использующий приближенные решения задачи П – компактного суммирования векторов. С учетом результата работы [2] этот метод позволял с трудоемкостью $O(n^2)$ находить решения задачи I с оценкой точности

$$f_2(P)\le\sqrt{4(m-1)^2+1}\;\|A\|_2,$$

где $A=(a_{ij})$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$; $\|A\|_2=\max_{i\in\mathcal{N}}\|a_i\|_2$;

$\|a\|_2$ - евклидова (или ℓ_2-) норма.

В настоящей работе предлагается метод решения задачи I, не опирающийся на решение задачи П и позволяющий с трудоемкостью $O(m^4e+m^2n\log e)$ находить приближенные решения с оценкой

$$f_2(P)\le 1.06\sqrt{m}\;\|A\|_2 \qquad /1/$$

Поскольку другие нормы в работе рассматриваться не будут, в дальнейшем индекс "2" будем опускать.

Пусть заданы векторы $b_i\in R^m$, $i=\overline{1,k}$. Они определяют некоторое пространство

$$\Pi(b_1,b_2,\dots,b_k)=\Big\{\sum_{i=1}^{k}\mu_i b_i\;\Big|\;\mu_i\in R,\ i=\overline{1,k}\Big\}$$

и некоторый параллелепипед

$$V(b_1,\dots,b_k)=\{\sum_{i=1}^{k}\lambda_i b_i \mid 0\leqslant\lambda_i\leqslant 1,\ i=\overline{1,k}\},$$

вершинами которого будем называть векторы

$$b=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i b_i\ ,\quad \lambda_i\in\{0,1\}\ ,\ i=\overline{1,k}\ :$$

размерность пространства $\Pi(b_1,b_2,\dots,b_k)$ будем обозначать $r(b_1,\dots,b_k)$.

Л е м м а I. Пусть заданы векторы $b_i\in R^m, \|b_i\|\leqslant 1, i\ \overline{1,k}$, и векторы b^*, b такие, что

$$b=\sum_{i=1}^{k}\mu_i b_i\ ,\quad b^*=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^* b_i\in V(b_1,\dots,b_k)$$

и

$$\|b-b^*\|\leqslant 1/2\ . \qquad /2/$$

Тогда существует вершина параллелепипеда $\tilde{b}\in V$ такая, что

$$\|b-\tilde{b}\|\leqslant 1/2\sqrt{r(b_1,\dots,b_k)}\ .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем индукцией по k.

При $k=1$ имеем $b=\mu_1 b_1$. Искомый вектор $\tilde{b}$ определим как

$$\tilde{b}=\begin{cases}0\ , & \mu_1\leqslant 1/2\ ,\\ b_1\ , & \mu_1>1/2\ .\end{cases}$$

Пусть для $k-1$ свойство леммы I доказано и заданы k векторов $b_i\in R^m$, $\|b_i\|\leqslant 1$, $i=\overline{1,k}$, а также векторы

$$b=\sum_{i=1}^{k}\mu_i b_i\ ,\quad b^*=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^* b_i\in V(b_1,\dots,b_k)\ ,$$

удовлетворяющие /2/. Если для каждого $i=\overline{1,k}$ выполнено $\mu_i\in[0,1]$, то положим

$$\lambda_k^*:=\begin{cases}0\ , & \mu_k\leqslant 1/2\ ,\\ 1\ , & \mu_k>1/2\ ;\end{cases}$$

$$\lambda_i^*:=\mu_i\ ,\qquad i=\overline{1,k-1}\ ;$$

$$b^*:=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^* b_i\ . \qquad /3/$$

Если же для некоторых $i\in\{1,2,\dots,k\}$ выполнено $\mu_i\,\overline{\in}\,[0,1]$, то найдем наименьшее $\varepsilon=\varepsilon^*$ такое, что $0\leqslant\mu_i+\varepsilon(\lambda_i^*-\mu_i)\leqslant 1$,

$i=\overline{1,k}$, и положим $\lambda_i^* := \mu_i + \varepsilon^*(\lambda_i^* - \mu_i)$, $i=\overline{1,k}$,

$$b^* := \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* \, b_i \; . \qquad /4/$$

При этом хотя бы для одного $i \in \{1,2,\dots,k\}$ выполняется $\lambda_i^* \in \{0,1\}$. Будем считать, что

$$\lambda_k^* \in \{0,1\} \; . \qquad /5/$$

После преобразования /3/ или /4/ неравенство /2/ сохранится, и при этом будет выполнено условие /5/.

Спроектируем вектор b на многообразие

$$M = \lambda_k^* \, b_k + \Pi(b_1,\dots,b_{k-1}) \, .$$

Для этого во множестве векторов $\{b_1,\dots,b_{k-1}\}$ выберем независимый базис $\{b_{i_1},\dots,b_{i_s}\}$ (на что потребуется $O(mk^2)$ операций, алгоритм будет приведен ниже) и из системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{s} x_j (b_{i_j}, b_{i_t}) = (b - \lambda_k^* b_k, b_{i_t}) \, , t = \overline{1,s} \, , \qquad /6/$$

найдем числа $\{x_1,\dots,x_s\}$ такие, что

$$\Big(\sum_{j=1}^{s} x_j b_{i_j} + \lambda_k^* b_k - b, \; b_{i_t}\Big) = 0 \; , \quad t = \overline{1,s} \, . \qquad /7/$$

Поскольку множество векторов $\{b_{i_t} \mid t=\overline{1,s}\}$ линейно-независимо, то система /6/ имеет единственное решение, на отыскание которого требуется $O(ms^2)$ операций, с учетом трудоемкости вычисления коэффициентов системы .

Положим

$$b' = \lambda_k^* \, b_k + \sum_{j=1}^{s} x_j \, b_{i_j} \, ,$$

$$b'' = b - b' \, .$$

Для любого вектора $b''' \in M$ верно

$$\| b - b''' \|^2 = \| b' - b''' \|^2 + \| b'' \|^2 + 2(b' - b''', b'') \, . \qquad /8/$$

Из /7/ следует, что

$$(b' - b''', b'') = 0 \, , \qquad /9/$$

а так как $b^* \in M$, то из /2/, /8/, /9/ вытекает, что

$$\| b' - b^* \| \leqslant \| b - b^* \| \leqslant 1/2 \, , \qquad /10/$$

$$\| b'' \| \leqslant \| b - b^* \| \leqslant 1/2 . \qquad /11/$$

Кроме того, из /7/ следует, что если $b_k \in \Pi(b_1,\dots,b_{k-1})$, то

$$\| b'' \| = 0 . \qquad /12/$$

Применяя теперь предположение индукции к векторам

$$b_1,\dots,b_{k-1},\ b^{IV} = \sum_{j=1}^{s} x_j b_{i_j},\ b^{V} = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i^* b_i \in V(b_1,\dots,b_{k-1})$$

и используя /10/, приходим к выводу о существовании вершины $\tilde{b}' \in V(b_1,\dots,b_{k-1})$ такой, что

$$\| b^{IV} - \tilde{b}' \| \leqslant 1/2 \sqrt{r(b_1,\dots,b_{k-1})},$$

откуда для вершины $\tilde{b} = \tilde{b}' + \lambda_k^* b_k \in V(b_1,\dots,b_k)$, используя /8/-/12/, получаем

$$\| b - \tilde{b} \|^2 = \| b' - \tilde{b} \|^2 + \| b'' \|^2 = \| b^{IV} - \tilde{b}' \|^2 + \| b'' \|^2 \leqslant 1/2 \sqrt{r(b_1,\dots,b_k)} .$$

Лемма I доказана полностью.

Из оценок трудоемкости, приводимых в ходе доказательства, вытекает, что искомую вершину $\tilde{b}$ можно найти за $O(mk^3)$ операций (полный перебор вершин потребовал бы $O(m2^k)$ операций). Для завершения доказательства приведенной оценки покажем, как выделить из множества векторов $\mathcal{L}^k = \{b_1,\dots,b_k\}$ независимый базис с трудоемкостью $O(mk^2)$ операций.

Пусть уже найдена совокупность линейно-независимых векторов $\mathcal{A} = \{b_{i_1},\dots,b_{i_t}\}$, а в пространстве $\Pi(b_{i_1},\dots,b_{i_t})$ выделена совокупность векторов $\mathcal{A}' = \{b_j' \mid j = \overline{1,t}\}$ такая, что для некоторой перестановки $\pi = (\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(m))$ чисел $\{1,2,\dots,m\}$ выполняется

$$b_j'(\pi(q)) = 0, \quad q = \overline{1,j-1}, \quad j = \overline{1,t};$$

$$b_j'(\pi(j)) \neq 0, \quad j = \overline{1,t},$$

где $b(q)$ обозначает q-ю координату вектора b. ($\pi(q)$ определено для $q = \overline{1,t}$). Процесс приращения множества $\mathcal{A}$ изобразим в виде цикла по метке $\mathcal{N}$.

$\mathcal{N}$: среди еще не просмотренных векторов совокупности $\mathcal{L}^k$ выберем произвольный вектор b_i, положив $b := b_i$, и в цикле по $j = \overline{1,t}$ выполним

$$b := b - b_j' \cdot (b(\pi(j))) / (b_j'(\pi(j))) . \qquad /13/$$

В полученном векторе b верно $b(\pi(q)) = 0,\ q = \overline{1,t}$.

Если и остальные координаты вектора b равны нулю, то вектор b_i линейно-зависим от векторов совокупности $\mathfrak{A}$ и мы его отбрасываем. Если же существует координата q такая, что $b(q)\neq 0$, то полагаем

$$\pi(t+1):=q\ ;\quad b'_{t+1}:=b\ ;\ i_{t+1}:=i\ ;$$
$$\mathfrak{A}':=\mathfrak{A}'\cup\{b'_{t+1}\}\ ;\quad \mathfrak{A}:=\mathfrak{A}\cup\{b_{i_{t+1}}\},$$

после чего идем на метку $\mathcal{N}$.

Поскольку трудоемкость цикла /I3/ составляет $O(tm)$, то трудоемкость выделения базиса совокупности $\mathcal{L}^k$ есть $O(k^2m)$.

В дальнейшем нам потребуется

Следствие леммы I. Для любых k векторов $b_i\in R^m$, $\|b_i\|\leqslant 1$, $i=\overline{1,k}$, и любого вектора $b^*\in V(b_1,\dots,b_k)$ существует вершина $\tilde{b}\in V$ такая, что

$$\|b^*-\tilde{b}\|\leqslant \sqrt{m}/2\ .$$

Алгоритм

Обозначим

$$\mathfrak{A}=\{a_i\mid i=\overline{1,n}\},\ \sum_{a_i\in\mathfrak{A}}a_i=B\ .$$

Алгоритм состоит в построении не убывающей по включению цепочки множеств $\varnothing=\mathfrak{A}_0<\mathfrak{A}_1<\dots<\mathfrak{A}_\ell=\mathfrak{A}$, после чего искомое разбиение $P=\{\mathcal{N}_1,\dots,\mathcal{N}_\ell\}$ определим из соотношений

$$\mathcal{N}_j=\{i\mid a_i\in\mathfrak{A}_j\setminus\mathfrak{A}_{j-1}\},\ j=\overline{1,\ell}\ . \qquad /I4/$$

Каждое число $i=\overline{1,\ell-1}$ будем представлять в двоичной записи

$$i=\varkappa_1^i\ \varkappa_2^i\dots\varkappa_\theta^i\ ,$$

где

$$\theta=\lceil\log_2\ell\rceil\ ;\ i=\sum_{j=1}^{\theta}\varkappa_j^i\ 2^{\theta-j}\ ;\ \varkappa_j^i\in\{0,1\},\ j=\overline{1,\theta}\ .$$

Далее каждому числу $i=\overline{1,\ell}$ припишем некоторую категорию

$$k(i)=\begin{cases}0 & ,\ i\in\{0,\ell\}\\ \max\{j\mid \varkappa_j^i=1\}, & i=\overline{1,\ell-1}\end{cases}$$

Таким образом, все категории от 0 до θ у нас будут представле-

ны. Отметим некоторые свойства категорий.

а) Существует единственное число I-й категории ($e > 1$).

б) Для любых двух чисел $i_1 \neq i_2$ таких, что $K(i_1)=K(i_2)=j>1$, верно

$$|i_1 - i_2| \geq 2^{\theta+1-j}$$

в) Для любого $i=\overline{1,e-1}$ ближайшим слева числом с категорией $k(j) < K(i)$ является

$$I(i) = i - 2^{\theta - k(i)},$$

а ближайшим справа -

$$J(i) = \min(i + 2^{\theta - k(i)}, e).$$

г) Из б) и в) следует, что если $i_1 \neq i_2$ и $k(i_1)=k(i_2)>0$, то

$$(I(i_1), J(i_1)) \cap (I(i_2), J(i_2)) = \varnothing .$$

д) Определим последовательности чисел

$$\tau_i' = \{i_0', i_1', \ldots, i'_{v_1(i)}\} \text{ и } \tau_i'' = \{i_0'', i_1'', \ldots, i''_{v_2(i)}\}$$

такие, что

$$i_0' = i;\ i_s' = I(i'_{s-1}),\ s=\overline{1, V_1(i)};\ k(i'_{V_1(i)}) = 0;$$

$$i_0'' = i;\ i_s'' = J(i''_{s-1}),\ s=\overline{1, V_2(i)};\ k(i''_{V_2(i)}) = 0.$$

Тогда для любых $j \in \tau_i'$, $q \in \tau_i''$ из $k(j)=k(q)$ следует либо $j=0$ & $q=e$, либо $j=q=i$.

Доказательство основано на том, что для любого числа $j \in \tau_i' \cup \tau_i''$ в его двоичном представлении

$$j = \varkappa_1^j \varkappa_2^j \ldots \varkappa_\theta^j$$

первые $k(j)-1$ знаков совпадают с первыми $k(j)-1$ знаками в разложении числа i, откуда в случае $k(j)=k(q)\neq 0$ имеем $j=q=i$.

е) $\{i\} \cup \tau'_{I(i)} \cup \tau''_{I(i)} \cup \tau'_{J(i)} \cup \tau''_{J(i)} = \tau_i' \cup \tau_i''$.

В самом деле, из определения множеств τ_j', τ_j'' следует, что

$$\{i\} \cup \tau'_{I(i)} = \tau_i', \qquad /15/$$

$$\{i\} \cup \tau''_{J(i)} = \tau_i''. \qquad /16/$$

Кроме того, из д) вытекает, что $K(I(i)) \neq K(\mathcal{J}(i))$. В случае $K(I(i)) < K(\mathcal{J}(i))$ имеем $I(\mathcal{J}(i)) = I(i)$, откуда

$$\tau'_{\mathcal{J}(i)} \cup \{i\} = \tau'_i \cup \{\mathcal{J}(i)\}, \qquad /17/$$

а в случае $K(I(i)) > K(\mathcal{J}(i))$ аналогично получаем

$$\tau''_{I(i)} \cup \{i\} = \tau''_i \cup \{I(i)\}; \qquad /18/$$

Используя свойство в), нетрудно показать, что в случае $K(I(i)) < K(\mathcal{J}(i))$ верно

$$\tau''_{I(i)} \subset \tau''_i \cup \{I(i)\}, \qquad /19/$$

а в случае $K(I(i)) > K(\mathcal{J}(i))$ справедливо

$$\tau'_{\mathcal{J}(i)} \subset \tau'_i \cup \{\mathcal{J}(i)\}. \qquad /20/$$

Из соотношений /15/-/20/ вытекает свойство е).

Множества $\mathfrak{A}_i$ будем строить в порядке неубывания категорий их номеров, причем для каждого $i = \overline{1, \ell-1}$ при построении $\mathfrak{A}_i$ будем использовать лишь множества $\mathfrak{A}_{I(i)}$ и $\mathfrak{A}_{\mathcal{J}(i)}$, построенные раньше. Обозначим

$$B^i \doteq \sum_{a_j \in \mathfrak{A}_i} a_j. \qquad /21/$$

Вектор

$$\overline{B}^i \doteq \frac{i - I(i)}{\mathcal{J}(i) - I(i)} \left(B^{\mathcal{J}(i)} - B^{I(i)}\right)$$

представляется в виде линейной комбинации векторов множества

$$\mathfrak{A}^i = \mathfrak{A}_{\mathcal{J}(i)} \setminus \mathfrak{A}_{I(i)}$$

с коэффициентами

$$\lambda_j = \frac{i - I(i)}{\mathcal{J}(i) - I(i)}, \quad a_j \in \mathfrak{A}^i.$$

Представим вектор $\overline{B}^i$ в виде

$$\overline{B}^i = \sum_{a_j \in \mathfrak{A}^i} \lambda'_j a_j, \qquad /22/$$

где

$$0 \leq \lambda'_j \leq 1,$$

и

$$|\hat{\mathfrak{A}}^i| \leq m, \qquad /23/$$

где
$$\hat{\mathfrak{A}}^i = \{a_j \in \mathfrak{A}^i \mid \lambda'_j \notin \{0,1\}\}.$$

Искомое представление /22/, /23/ получим за $O(m^2 |\mathfrak{A}^i|)$ операций следующим образом. Положим

$$\lambda'_j = \lambda_j, \; a_j \in \mathfrak{A}^i; \; \hat{\mathfrak{A}}^i := \emptyset; \; \overline{\mathfrak{A}}^i := \mathfrak{A}^i.$$

Пусть $\hat{\mathfrak{A}}^i$ уже содержит s линейно-независимых векторов $\{a_{j_1}, \ldots, a_{j_s}\}$, а в пространстве $\Pi(a_{j_1}, \ldots, a_{j_s})$ найдены s векторов $\{b_1, \ldots, b_s\}$ таких, что для некоторой перестановки $\pi = (\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(m))$ чисел $\{1, 2, \ldots, m\}$ выполняются

$$b_t(\pi(k)) = 0, \; k = \overline{1, t-1}, \; t = \overline{1, s};$$
$$b_t(\pi(t)) \neq 0, \; t = \overline{1, s}$$

($\pi(t)$ определена для $t = \overline{1, s}$).
Известна также матрица $C = (c_{kt})_{m \times m}$ такая, что

$$b_k = \sum_{t=1}^{s} c_{kt} a_{j_t}, \; k = \overline{1, s}. \qquad /24/$$

Алгоритм нахождения искомого представления вектора $\overline{B}^i$ опишем в виде цикла по метке M.

M: Если $\overline{\mathfrak{A}}^i \neq \emptyset$, выберем во множестве $\overline{\mathfrak{A}}^i$ произвольный вектор a_δ и положим

$$\overline{\mathfrak{A}}^i := \overline{\mathfrak{A}}^i \setminus \{a_\delta\}; \; b := a_\delta$$

Для t от I до s выполним цикл

$$\mu_t := \frac{b(\pi(t))}{b_t(\pi(t))}; \; b := b - \mu_t b_t.$$

Тогда для вектора $b = a_\delta - \sum_{t=1}^{s} \mu_t b_t$ верно $b(\pi(t)) = 0, t = \overline{1, s}$.
Вычислим величины

$$\mu'_t = \sum_{k=1}^{s} \mu_k c_{kt}, \; t = \overline{1, s},$$

тогда

$$b = a_\delta - \sum_{t=1}^{s} \mu'_t a_{j_t}.$$

Если для какого-либо $t \in \{1, 2, \ldots, m\} \setminus \{\pi(k) \mid k = \overline{1, s}\}$ верно $b(t) \neq 0$, то положим

$$\pi(s+1) := t; \; b_{s+1} := b; \; j_{s+1} := \delta; \; \hat{\mathfrak{A}}^i := \hat{\mathfrak{A}}^i \cup \{a_{j_{s+1}}\};$$

$$c_{s+1,t} := -\mu'_t ,\ t=\overline{1,s}\ ;\ c_{s+1,s+1} := 1;\ c_{k,s+1} := 0,\ k=\overline{1,s}.$$

Если же $b = 0$, то найдем максимальное $\varepsilon = \varepsilon^*$ такое, что

$$(0 \leqslant \lambda'_{j_t} + \varepsilon\mu'_t \leqslant 1,\ t=\overline{1,s})\ \&\ (0 \leqslant \lambda'_\delta - \varepsilon \leqslant 1),$$

и положим

$$\lambda'_{j_t} := \lambda'_{j_t} + \varepsilon^*\mu'_t ,\ t = \overline{1,s};\ \lambda'_\delta := \lambda'_\delta - \varepsilon^* .$$

Если $\lambda'_\delta \in \{0,1\}$, то идем на метку M. В противном случае найдем t такое, что $\lambda'_{j_t} \in \{0,1\}\ \&\ \mu'_t \neq 0$, положим

$$\hat{\mathcal{A}}^i := \hat{\mathcal{A}}^i \cup \{a_\delta\} \setminus \{a_{j_t}\};\ j_t = \delta;$$

$$c_{kq} := c_{kq} - \frac{c_{kt}\,\mu'_q}{\mu'_t},\ k=\overline{1,s},\ q \in \{1,2,\ldots,s\}\setminus\{t\},$$

$$c_{kt} := c_{kt}/\mu'_t,\ k = \overline{1,s}$$

(соотношения /24/ при этом сохранятся),и вернемся на метку M.

Если $\overline{\mathcal{A}}^i = \varnothing$, то $\hat{\mathcal{A}}^i := \{a_j \in \hat{\mathcal{A}}^i \mid \lambda'_j \notin \{0,1\}\}$.

Нетрудно проверить, что алгоритм, описанный выше, дает представление вектора $\overline{B}^i$ в виде /22/, /23/ с требуемой трудоемкостью.

Далее, согласно следствию леммы I, для вектора $b_i^* = \sum_{a_j \in \hat{\mathcal{A}}^i} \lambda'_j a_j$ (где коэффициенты λ'_j взяты из /22/) найдем вершину

$$\tilde{b}_i = \sum_{a_j \in \hat{\mathcal{A}}^i} \tilde{\lambda}_j a_j\ ;\ \tilde{\lambda}_j \in \{0,1\},\ a_j \in \hat{\mathcal{A}}^i$$

такую, что

$$\| b_i^* - \hat{b}_i \| \leqslant 1/2 \sqrt{m}\, \| A \| \qquad /25/$$

(на что потребуется $O(m^4)$ операций). И наконец, определим

$$\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{I(i)} \cup \{a_j \in \mathcal{A}^i \mid \lambda'_j = 1\} \cup \{a_j \in \hat{\mathcal{A}}^i \mid \tilde{\lambda}_j = 1\}. \qquad /26/$$

Докажем, что разбиение P, определяемое согласно /I4/, удовлетворяет оценке /I/.

Обозначим

$$\tilde{b}_i - b_i^* = b_i , \qquad /27/$$

$$B^i - B \cdot i / \ell = b^i . \qquad /28/$$

Тогда из /26/, /27/ и /22/ получаем

$$B^i = B^{I(i)} + \overline{B}^i + b_i . \qquad /29/$$

Из /28/ и /29/ следует соотношение

$$b^i = \frac{J(i)-i}{J(i)-I(i)} B^{I(i)} + \frac{i-I(i)}{J(i)-I(i)} B^{J(i)} + b_i - \frac{i}{\ell} B = \Big(\frac{I(i)}{\ell} \cdot \frac{J(i)-i}{J(i)-I(i)} +$$

$$+ \frac{J(i)}{\ell} \frac{i-I(i)}{J(i)-I(i)} - \frac{i}{\ell} \Big) B + \frac{J(i)-i}{J(i)-I(i)} b^{I(i)} + \frac{i-I(i)}{J(i)-I(i)} b^{J(i)} + b_i =$$

$$= \frac{J(i)-i}{J(i)-I(i)} b^{I(i)} + \frac{i-I(i)}{J(i)-I(i)} b^{J(i)} + b_i . \qquad /30/$$

Л е м м а 2. Для любого $i = \overline{1, \ell-1}$ справедливо

$$b^i = \sum_{j \in \tau_i' \cup \tau_i''} \lambda_j^i b_j ,$$

где $\lambda_j^i = 0$ для $j \in \{0, \ell\}$, и

$$\lambda_j^i = \begin{cases} (J(j)-i)/(J(j)-j), & \text{если } j \in \tau_i' , \\ \\ (i-I(j))/(j-I(j)), & \text{если } j \in \tau_i'' . \end{cases} \qquad /31/$$

для $j \notin \{0, \ell\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем индукцией по $K(i)$. Если $K(i) = 1$, то $I(i) = 0$, $J(i) = \ell$ и $\tau_i' \cup \tau_i'' = \{0, i, \ell\}$. Таким образом, остается показать, что

$$b^i = b_i . \qquad /32/$$

Из /28/ имеем

$$b^{I(i)} = b^0 = 0 = b^{J(i)} = b^\ell . \qquad /33/$$

Из /30/ и /33/ получаем /32/.

Пусть утверждение леммы доказано для j таких, что $K(j) < K(i)$. В частности,

$$b^{I(i)} = \sum_{j \in \tau'_{I(i)} \cup \tau''_{I(i)}} \lambda_j^{I(i)} b_j , \qquad /34/$$

$$b^{J(i)} = \sum_{j \in \tau'_{J(i)} \cup \tau''_{J(i)}} \lambda_j^{J(i)} b_j , \qquad /35/$$

где для $j \notin \{0, e\}$ выполняются соотношения

$$\lambda_j^{I(i)} = \begin{cases} \dfrac{J(j) - I(i)}{J(j) - j}, & j \in \tau'_{I(i)}, \\[2mm] \dfrac{I(i) - I(j)}{j - I(j)}, & j \in \tau''_{I(i)}, \end{cases} \qquad /36/$$

$$\lambda_j^{J(i)} = \begin{cases} \dfrac{J(j) - J(i)}{J(j) - j}, & j \in \tau'_{J(i)}, \\[2mm] \dfrac{J(i) - I(j)}{j - I(j)}, & j \in \tau''_{J(i)}. \end{cases} \qquad /37/$$

Из /30/, свойства е) и /34/-/37/ следует, что

$$b^i = \sum_{j \in \tau'_i \cup \tau''_i} \lambda_j^i b_j ,$$

$$0 \leqslant \lambda_j^i \leqslant 1 , \quad j \in \tau'_i \cup \tau''_i ;$$

$\lambda_j^i = 1$; λ_0^i , λ_e^i – любые в силу /33/.

Покажем, что коэффициенты λ_j^i удовлетворяют /31/ при $j \notin \{0, i, e\}$. В самом деле, для $j \in \tau'_i$ в этом случае имеем

$$j \in \tau'_{I(i)} , \qquad /38/$$

и если

$$K(j) < K(J(i)) , \qquad /39/$$

то также

$$j \in \tau'_{J(i)} . \qquad /40/$$

Из /30/, /34/-/38/, /40/ получаем

$$\lambda_j^i = \frac{\mathcal{J}(i)-i}{\mathcal{J}(i)-I(i)} \cdot \frac{\mathcal{J}(j)-I(i)}{\mathcal{J}(j)-j} + \frac{i-I(i)}{\mathcal{J}(i)-I(i)} \cdot \frac{\mathcal{J}(j)-\mathcal{J}(i)}{\mathcal{J}(j)-j}. \qquad /41/$$

Но из /39/ следует, что $\mathcal{J}(i) \neq \ell$, поэтому из свойства в) имеем

$$\mathcal{J}(i)-i = 2^{\sigma - \kappa(i)} = i - I(i). \qquad /42/$$

Из /41/, /42/ вытекает требуемое соотношение /31/:

$$\lambda_j^i = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\mathcal{J}(j)-I(i)-\mathcal{J}(i)}{\mathcal{J}(j)-j} = \frac{\mathcal{J}(j)-i}{\mathcal{J}(j)-j}.$$

В случае $\kappa(j) > \kappa(\mathcal{J}(i))$ имеем $j \notin \tau'_{\mathcal{J}(i)}$ и $\mathcal{J}(j)=\mathcal{J}(i)$, откуда

$$\lambda_j^i = \frac{\mathcal{J}(i)-i}{\mathcal{J}(i)-I(i)} \cdot \frac{\mathcal{J}(j)-I(i)}{\mathcal{J}(j)-j} = \frac{\mathcal{J}(j)-i}{\mathcal{J}(j)-j}.$$

Для $j \in \tau''_i$ соотношение /31/ доказывается аналогично. В самом деле, в этом случае $j \in \tau''_{\mathcal{J}(i)}$, и если $\kappa(j) < \kappa(I(i))$, то также $j \in \tau''_{I(i)}$, откуда с применением /30/ и /34/-/37/ получаем

$$\lambda_j^i = \frac{\mathcal{J}(i)-i}{\mathcal{J}(i)-I(i)} \cdot \frac{I(j)-I(i)}{j-I(j)} + \frac{i-I(i)}{\mathcal{J}(i)-I(i)} \cdot \frac{\mathcal{J}(i)-I(j)}{j-I(j)} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{I(i)-\mathcal{J}(i)-2I(j)}{j-I(j)} = \frac{i-I(j)}{j-I(j)}.$$

Если же $\kappa(j) > \kappa(I(i))$, то $j \notin \tau''_{I(i)}$ и $I(j)=I(i)$, откуда с применением /30/, /37/ получаем

$$\lambda_j^i = \frac{i-I(i)}{\mathcal{J}(i)-I(i)} \cdot \frac{\mathcal{J}(i)-I(j)}{j-I(j)} = \frac{i-I(j)}{j-I(j)}.$$

Лемма 2 доказана полностью.

Из /21/, /28/ получаем соотношение

$$f(p) = \max_{1 \leqslant s \leqslant \ell} \Big\| \sum_{i \in \mathcal{N}_s} a_i - B/\ell \Big\| =$$

$$= \max_{1 \leqslant s \leqslant \ell} \| B^s - B^{s-1} - B/\ell \| = \max_{1 \leqslant s \leqslant \ell} \| \mathcal{B}^s - \mathcal{B}^{s-1} \|. \qquad /43/$$

Оценим величину $\| \mathcal{B}^s - \mathcal{B}^{s-1} \|$. Пусть для определенности

$$\kappa(s-1) < \kappa(s). \qquad /44/$$

Тогда $\tau'_{s-1} = \tau'_s \setminus \{s\}, \tau''_{s-1} = \tau''_s \cup \{s-1\} \setminus \hat{\tau}$, где

$$\hat{\tau} = \{s, \mathcal{J}(s), \dots, \mathcal{J}^q(s)\},$$

$\mathcal{J}^0(s) = s$, $\mathcal{J}^r(s) = \mathcal{J}(\mathcal{J}^{r-1}(s))$, а q такое, что

$$\kappa(\mathcal{J}^q(s)) > \kappa(s-1) \ \& \ \kappa(\mathcal{J}^{q+1}(s)) \leq \kappa(s-1).$$

Таким образом,

$$\tau'_{s-1} \cup \tau''_{s-1} \cup \tau'_s \cup \tau''_s = (\tau'_{s-1} \cap \tau'_s) \cup (\tau''_{s-1} \cap \tau''_s) \cup \hat{\tau},$$

и множества $\hat{\tau}_1 \doteq \tau'_{s-1} \cap \tau'_s$, $\hat{\tau}_2 \doteq \tau''_{s-1} \cap \tau''_s$, $\hat{\tau}$ попарно не пересекаются, что позволяет, используя лемму 2, представить вектор $b^s - b^{s-1}$ в виде

$$b^s - b^{s-1} = \sum_{j \in \hat{\tau}_1} (\lambda_j^s - \lambda_j^{s-1}) b_j + \sum_{j \in \hat{\tau}_2} (\lambda_j^s - \lambda_j^{s-1}) b_j + \sum_{j \in \hat{\tau}} \lambda_j^s b_j. \qquad /45/$$

Для $j \in \hat{\tau}_1 \setminus \{0\}$ из леммы 2 имеем

$$\lambda_j^s - \lambda_j^{s-1} = -1/(\mathcal{J}(j) - j). \qquad /46/$$

Для $j \in \hat{\tau}_2 \setminus \{\ell\}$ имеем

$$\lambda_j^s - \lambda_j^{s-1} = 1/(j - I(j)). \qquad /47/$$

Для $j \in \hat{\tau}$ имеем $I(j) = s-1$, откуда

$$\lambda_j^s = (s - I(j))/(j - I(j)) = 1/(j - I(j)). \qquad /48/$$

Из /45/-/48/, /33/ получаем оценку

$$\| b^s - b^{s-1} \| \leq F_\ell^s \max_{1 \leq j \leq \ell} \| b_j \|, \qquad /49/$$

где

$$F_\ell^s = \sum_{j \in \tau'_s \setminus \{0,s\}} 1/(\mathcal{J}(j) - j) + \sum_{j \in \tau''_s \setminus \{\ell\}} 1/(j - I(j)). \qquad /50/$$

Аналогично оценка /49/ получается в случае $\kappa(s-1) > \kappa(s)$, поэтому условие /44/ в дальнейшем использовать не будем. Во множестве $\tau''_s \setminus \{\ell\}$ выберем число i^* с наименьшей категорией и представим множество $\tau'_s \setminus \{0,s\}$ в виде $\hat{\tau}_3 \cup \hat{\tau}_4$, где $\kappa(j) > \kappa(i^*)$ для $j \in \hat{\tau}_3$ и $\kappa(j) < \kappa(i^*)$ для $j \in \hat{\tau}_4$. Для $j \in \hat{\tau}_3$ верно

$\mathcal{J}(j) \neq \ell$, откуда, по свойству в), имеем

$$\mathcal{J}(j) - j = 2^{\sigma - \kappa(j)} . \qquad /5I/$$

Для $j \in \hat{\tau}_4$ верно $\mathcal{J}(j) = \ell$ и $j = I^{\varkappa}(i^*)$, $\varkappa > 0$. Обозначим $I^{\varkappa}(i^*) = j_{\varkappa}$, тогда для $\varkappa > 0$ имеем

$$\mathcal{J}(j_{\varkappa}) - j_{\varkappa} = \ell - I^{\varkappa}(i^*) = \ell - i^* + \sum_{\tau=1}^{\varkappa} (I^{\tau-1}(i^*) - I^{\tau}(i^*)) =$$
$$= \ell - i^* + \sum_{\tau=1}^{\varkappa} 2^{\sigma - \kappa(j_{\tau-1})} . \qquad /52/$$

Из свойств в) и д) и соотношений /50/-/52/ получаем оценку

$$F_\ell \leqslant \max_{k=0,1,\dots} \left(\sum_{\tau=0}^{k} 2^{-\tau} + \sum_{\tau=k+1}^{\infty} 1/(2^{\tau} - \Delta)\right) , \qquad /53/$$

где

$$0 < \Delta < 2^{k} , \quad k > 0 ,$$
$$F_\ell = \max_{1 \leqslant s \leqslant \ell} F_\ell^{s} . \qquad /54/$$

Максимум суммы ряда, стоящего в правой части /53/, достигается при $k = 1$, $\Delta = 1$ и равен

$$1/2 + \sum_{j=1}^{\infty} 1/(2^{j} - 1) < 2.1067. \qquad /55/$$

Из /43/, /53/-/55/, /25/ и /27/ вытекает требуемая оценка /I/.

Поскольку для практических задач параметр ℓ , как правило, невелик, то имеет смысл привести более точные оценки величины F_ℓ, для небольших значений :

ℓ	2	3,4	5,6,8	7	$\leqslant 28$
оценка F_ℓ	I	I.5	I.75	I.84	2

Оценим трудоемкость алгоритма построения множеств $\mathcal{O}\!\iota_i$. Для каждого $i = \overline{1, \ell - 1}$ она складывается из трудоемкости (T_i') представления вектора $\overline{B}^{i}$ в виде /22/, /23/ и трудоемкости (T_i'') нахождения вершины параллелепипеда $\tilde{\beta}_i$, удовлетворяющей /25/. Согласно приводимым ранее оценкам, имеем

$$T_i' = O(m^2 (|\mathcal{O}\!\iota_{\mathcal{J}(i)}| - |\mathcal{O}\!\iota_{I(i)}|)), \qquad /56/$$

$$T_i'' = O(m^4) . \qquad /57/$$

С учетом свойства категорий г) из /56/, /57/ получаем

$$\sum_{i=1}^{\ell-1} T_i' = O(m^2 n \theta) = O(m^2 n \log \ell).$$

Таким образом, общая трудоемкость алгоритма составляет $O(m^4\ell + m^2 n \log \ell)$ операций.

Примечание. При $\ell \leqslant 28$ описанный выше алгоритм гарантирует оценку $f(p) \leqslant \sqrt{m}\,\|A\|$.

Поступила в ред.-изд.отдел
10 мая 1978 г.

Литература

1. Севастьянов С.В. Об асимптотическом подходе к некоторым задачам теории расписаний. - В кн.: Управляемые системы, 1975, вып. 14, с.40-51.

2. Севастьянов С.В. О приближенном решении некоторых задач теории расписаний. - В кн.: Дискретный анализ, 1978, вып. 32, с.66-75