Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1980 г., вып.20

УДК 519.854.2

ПРИБЛИЖЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ В ЗАДАЧАХ ДЖОНСОНА И СУММИРОВАНИЯ ВЕКТОРОВ

С.В.Севастьянов

В § I излагается алгоритм компактного суммирования векторов при более общих, чем в [I], условиях на векторы. Теорема I, доказываемая конструктивно в § I, обобщает основной результат работы [2]. В § 2 излагаются различные методы получения приближенных решений задачи Джонсона с оценками точности, улучшающими аналогичные оценки работ [3, 4], при этом используется алгоритм § I.

§ I. Теорема о компактном суммировании векторов

Теорема I. Пусть $\{x_1,\dots,x_n\}\subset Ш\subset R^m$, $Ш$ выпукло. Тогда существует перестановка $\pi=(\pi(1),\dots,\pi(n))$ чисел $\{1,\dots,n\}=\mathcal{N}$ такая, что

$$\sum_{j=1}^{k} x_{\pi(j)}-\frac{k-m}{n}x\in mШ,\quad k=\overline{1,n}, \qquad /I/$$

где $x=\sum_j x_j$

Доказательство. Построим последовательность множеств $\mathcal{N}=A_n\supset A_{n-1}\supset\dots\supset A_m$ и множества $\{\lambda_j^k, j\in A_k\}$, $m\leqslant k\leqslant n$, такие, что

$$|A_k| = k, \qquad /2/$$

$$\sum_{j\in A_k}\lambda_j^k x_j=\frac{k-m}{n}x, \qquad /3/$$

$$\sum_{j\in A_k}\lambda_j^k = k-m, \qquad /4/$$

$$0\leqslant \lambda_j^k\leqslant 1. \qquad /5/$$

Положив $\{\pi(j)\}=A_j\setminus A_{j-1}$, $j=\overline{m+1;n}$, и доопределив $\pi(j)$ для $j\leqslant m$ произвольно, для $k>m$ будем иметь

$$\sum_{j=1}^{k} x_{\pi(j)} - \frac{k-m}{n}x = \sum_{j\in A_k}(1-\lambda_j^k)x_j \in \sum_{j\in A_k}(1-\lambda_j^k)\,Ш =$$

$$= Ш\sum_{j\in A_k}(1-\lambda_j^k) = m\,Ш .$$

При $k \leqslant m$ свойство /I/ проверяется непосредственно.

Искомые множества будем строить индукцией по k.

$\underline{k=n}$. $A_n = N$; $\lambda_j^n = \dfrac{n-m}{n}$, $j\in A_n$.

$\underline{k+1 \to k}$, $k \geqslant m$. Пусть A_{k+1} и $\{\lambda_j^{k+1}, j\in A_{k+1}\}$ - множества, удовлетворяющие /2/-/5/. Определим векторы $\overline{x}_j \in R^{m+1}$, $j\in N$, такие, что $\overline{x}_j = (x_j(1),\dots,x_j(m),1)$, и вектор $\overline{x} = \sum \overline{x}_j$. Тогда из /3/, /4/ следует, что

$$\sum_{j\in A_{k+1}} \lambda_j^{k+1}\overline{x}_j = \frac{k+1-m}{n}\overline{x},$$

откуда

$$\sum_{j\in A_{k+1}} \overline{\lambda}_j \overline{x}_j = \frac{k-m}{n}\overline{x}, \qquad /6/$$

где $\overline{\lambda}_j = \lambda_j^{k+1}(k-m)/(k+1-m)$. Поскольку $k \geqslant m$, то свойство /5/ для коэффициентов $\overline{\lambda}_j$ выполнено. В[5] показано, что за $O(m^2 n)$ операций можно осуществить перестройку коэффициентов $\{\overline{\lambda}_j, j\in A_{k+1}\}$ в $\{\lambda'_j, j\in A_{k+1}\}$ с сохранением свойств /5/, /6/ так, чтобы при этом мощность множества $\mathcal{J}=\{j\in A_{k+1}, 0<\lambda'_j<1\}$ не превышала размерности пространства векторов $\{\overline{x}_j\}$, иначе говоря,

$$|\mathcal{J}| \leqslant m+1 . \qquad /7/$$

Для $j\in A_{k+1}\setminus\mathcal{J}$ верно $\lambda'_j \in \{0,1\}$. Поскольку из /6/ следует, что

$$\sum_{j\in A_{k+1}} \lambda'_j = k-m,$$

а из /2/, /7/ вытекает $|A_{k+1}\setminus\mathcal{J}| \geqslant k-m$, то в случае $\lambda'_j = 1$ для всех $j\in A_{k+1}\setminus\mathcal{J}$ мы получили бы $|\mathcal{J}| = m+1$ и $\lambda'_j = 0$, $j\in\mathcal{J}$, что невозможно в силу определения $\mathcal{J}$. Таким образом, для некоторого $j^*\in A_{k+1}\setminus\mathcal{J}$ верно $\lambda'_{j^*} = 0$. Полагаем $A_k = A_{k+1}\setminus\{j^*\}$ и $\lambda_j^k = \lambda'_j$, $j\in A_k$. Заметим, что процесс перестройки коэффициентов $\{\overline{\lambda}_j\}$ в $\{\lambda'_j\}$, как он описан в[5], можно проводить не до конца, а лишь до появления первого коэффициента $\lambda'_j = 0$.

§ 2. Задача Джонсона

Изложим несколько алгоритмов получения приближенного решения задачи Джонсона в следующей формулировке.

З а д а ч а I. Найти оптимальный по времени порядок обработки n деталей на m станках при условии, что

а) все детали проходят станки в одной и той же технологической последовательности, в которой каждый станок встречается лишь один раз (прохождение некоторых деталей по некоторым станкам может быть фиктивным);

б) одновременно деталь не может обрабатываться более чем на одном станке, а на одном станке - более одной детали;

в) задана матрица длительностей обработки деталей на станках

$$A = (a_{ij})\ \begin{matrix} i = \overline{1,m} \\ j = \overline{1,n} \end{matrix}$$

такая, что

$$a_{ij} \geq 0 . \qquad /8/$$

Указанная формулировка не исключает случаев, когда

г) процесс обработки детали на станке разрывен;

д) деталь j_1 перескакивает через станок i в то время, когда на нем обрабатывается деталь j_2 , если $a_{ij_1} = 0$;

е) для различных станков порядок прохождения через них деталей (определяемый по времени начала обработки) может быть не одинаков.

Для любого допустимого расписания p задачи I верна оценка

$$f(p) \geq b^* = \max_i \sum_i a_{ij}, \qquad /9/$$

где f - функционал задачи Джонсона, $f(p)$ - величина временного интервала, внутри которого происходит процесс обработки исходной совокупности деталей согласно расписанию p . Последнее однозначно определяется количеством временных интервалов, на которые разбивается процесс обработки j-й детали на i-м станке, а также заданием самих интервалов.

Вместо задачи I обычно рассматривается задача I$'$, отличающаяся тем, что случаи г)-е) запрещены. При этом область допустимых решений сужается, а величина оптимума задачи увеличивается. Будем искать приближенное решение задачи I среди допустимых неуплотняемых (см. определение в [3 , с.43]) расписаний задачи I$'$. Последние однозначно определяются какой-либо перестановкой $\pi = (\pi(1),\ldots,\pi(n))$, и значение функционала для таких расписаний вычисляется по известной формуле ([3 , с.43], [4 , с.251]):

$$f(\pi) = \max_{1=k_0\leq k_1\leq\ldots\leq k_m=n} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=k_{i-1}}^{k} a_{i,\pi(j)} . \qquad /10/$$

Для удобства изложения в дальнейшем будем придерживаться следующих обозначений:

$x(i)$ - i-я координата вектора x ;

$a_j = (a_{1j}, \ldots, a_{mj})$ - j-й столбец матрицы A ;

$a_i^* = \max_j a_{ij}$; $\bar{a}_i = \sum_j a_{ij} / n$; $a^* = \max_{i,j} a_{ij}$;

$b = \sum_j a_j$; $b^* = \max_i b(i)$; $x^{s,\pi} = \sum_{j=1}^{s} x_{\pi(j)}$, $x^{0,\pi} = 0$;

$\mathcal{K} = \{K = (K_0, K_1, \ldots, K_m)$, K_i - целые, $0 = K_0 \leqslant K_1 \leqslant \ldots \leqslant K_m = n\}$.

Для $i = \overline{1,m}$ и $K \in \mathcal{K}$ обозначим $x^{K,\pi,i} = (x^{K_i,\pi} - x^{K_{i-1},\pi})(i)$.

Не ограничивая общности задачи, будем считать выполненным

$$b(i) > 0, \quad i = \overline{1,m} . \tag{11}$$

Вместо функционала /10/ удобнее иметь дело с функционалом

$$f'(\pi) = \max_{K \in \mathcal{K}} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=K_{i-1}+1}^{K_i} a_{i,\pi(j)} = \max_{K \in \mathcal{K}} \sum_{i=1}^{m} (a^{K_i,\pi} - a^{K_{i-1},\pi})(i) = \max_{K \in \mathcal{K}} \sum_{i=1}^{m} a^{K,\pi,i} , \tag{12}$$

связанным с $f(\pi)$ соотношением

$$f'(\pi) \leqslant f(\pi) \leqslant \sum_{i=1}^{m} a_i^* - a^* + f'(\pi) . \tag{13}$$

В качестве составных частей алгоритмов будут использованы 2 типа операций преобразования матрицы A и операция проецирования.

<u>Операция преобразования матрицы A</u> по первому типу состоит в нахождении матрицы

$$A' = (a'_{ij})_{j=\overline{1,n}}^{i=\overline{1,m}}$$

такой, что

$$a_{ij} \leqslant a'_{ij} \leqslant a_i^* , \tag{14}$$

$$b'(m) = b(m),$$

$$b'(K) = \max\{b(K), \min\{b'(K+1), n a_K^*\}\}, \quad K = \overline{1,m-1}, \tag{15}$$

или, что то же самое,

$$\bar{a}'_K = \max\{\bar{a}_K, \min\{\bar{a}'_{K+1}, a_K^*\}\}, \tag{16}$$

откуда видно, что

$$\bar{a}'_{\kappa} \leq a^{*}_{\kappa} . \qquad /17/$$

Операция преобразования матрицы A по второму типу состоит в нахождении матрицы A' такой, что

$$a_{ij} \leqslant a'_{ij} \leqslant a^{*}_{i}, \qquad /18/$$

$$b'(\kappa) = b^{*}, \ \kappa = \overline{1, m}. \qquad /19/$$

Указанные операции нетрудно осуществить с трудоемкостью $O(mn)$, как это делается, например, в работе [4]. Из свойства $a'_{ij} \geqslant a_{ij}$ и вида функционала /10/ вытекает, что

$$f_{A'}(\pi) \geqslant f_{A}(\pi) \qquad /20/$$

для любой перестановки π .

<u>Операция проецирования</u> состоит в нахождении для векторов $a \in R^{m}$ представления

$$a = p_1 a + p_2 a, \qquad /21/$$

$$p_1 a(i^{*}) = 0, \qquad /22/$$

$$p_2 a = \lambda(a) \cdot b, \qquad /23/$$

где i^{*} - некоторая координата, $\lambda(a) \in R$.
Из /11/, /21/-/23/ следует, что

$$p_1 a = a - \frac{a(i^{*})}{b(i^{*})} b, \qquad /24/$$

откуда, обозначая $c_j = p_1 a_j$, получаем

$$\sum_{j} c_j = 0. \qquad /25/$$

Для произвольного $i = \overline{1, m-1}$ из /24/ имеем

$$\max_{j} (c_j(i) - c_j(i+1)) =$$

$$= \max_{j} (a_j(i) - a_j(i+1) + (b(i+1) - b(i)) \frac{a_j(i^{*})}{b(i^{*})}) \leqslant$$

$$\leqslant a^{*}_{i} + \max\{b(i+1) - b(i), 0\} \cdot a^{*}_{i^{*}} / b(i^{*}). \qquad /26/$$

Перейдем к изложению алгоритмов.

<u>Алгоритм 1</u> состоит в непосредственном обращении к алгорит-

му § I, когда $x_j = a_j$. Согласно теореме I, находим перестановку π такую, что

$$a^{j,\pi} = \frac{(j-m)}{n} b + \Delta_j, \quad j = \overline{1,n}; \qquad /27/$$

$$\Delta_j = \frac{m}{n} b, \quad j \in \{0, n\}, \qquad /28/$$

$$\Delta_j \in m Ш, \quad j = \overline{1,n}, \qquad /29/$$

где $Ш$ - выпуклая оболочка векторов a_j.

Обозначим $\delta_i = \Delta_{k_i}(i) - \Delta_{k_{i-1}}(i)$, тогда из /28/, /29/ получаем, что

$$\delta_i \in m I_i, \qquad /30/$$

где

$$I_i = \begin{cases} [-\overline{a}_1, a_1^* - \overline{a}_1], & i = 1, \\ [\overline{a}_m - a_m^*, \overline{a}_m], & i = m, \\ [-a_i^*, a_i^*] & , i = \overline{2, m-1}. \end{cases} \qquad /31/$$

Из /27/ следует, что

$$a^{k,\pi,i} = (k_i - k_{i-1})\overline{a}_i + \delta_i, \qquad /32/$$

откуда, используя очевидное соотношение $a^{k,\pi,i} \leqslant (k_i - k_{i-1}) a_i^*$, получаем

$$\delta_i \leqslant 0 \quad \text{при} \quad a_i^* = \overline{a}_i, \qquad /33/$$

$$k_i - k_{i-1} \geqslant \tau_i, \qquad /34/$$

где

$$\tau_i = \begin{cases} 0, \text{ если } a_i^* = \overline{a}_i \text{ либо } \delta_i < 0; \\ \delta_i / (a_i^* - \overline{a}_i) \quad \text{- в противном случае.} \end{cases}$$

Из /12/, /32/, /34/, /30/ получаем оценку

$$f'(\pi) = \max_{k \in K} \left\{ b^* + \sum_{i=1}^{m} \left(\delta_i + \frac{k_i - k_{i-1}}{n} (b(i) - b^*) \right) \right\} \leqslant$$

$$\leqslant b^* + \sum_{i=1}^{m} \max_{\delta_i \in m I_i} \left\{ \delta_i + \frac{\tau_i}{n} (b(i) - b^*) \right\}. \qquad /35/$$

Поскольку при $\delta_i \leqslant 0$ верно $\tau_i = 0$, то в правой части /35/ интервалы I_i можно заменить на $I_i' = I_i \cap [0,\infty)$. Учитывая /33/, заметим, что при $\delta_i \geqslant 0$ верно

$$\delta_i + \frac{\tau_i}{n}(b(i) - b^*) = \begin{cases} 0, \text{ если } a_i^* = \bar{a}_i ; \\ \delta_i (n a_i^* - b^*)/(n a_i^* - b(i)) - \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом,

$$f'(\pi) \leqslant b^* + \sum_{i=1}^{m} (\max_{\delta_i \in m I_i'} \delta_i) \cdot t_i , \qquad /36/$$

где

$$t_i = \begin{cases} 0, \text{ если } n a_i^* \leqslant b^* ; \\ (n a_i^* - b^*)/(n a_i^* - b(i)) - \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Из /31/, /36/ вытекает оценка

$$f'(\pi) \leqslant b^* + m\left(\sum_{i=1}^{m} a_i^* t_i - \bar{a}_1 t_1 - \max\{0, a_m^* - b^*/n\}\right). \qquad /37/$$

Заметим, что $t_i \in [0,1]$ при всех $i = \overline{1,m}$ и при определенных свойствах матрицы A величины t_i могут быть очень малы. Так например, если для всех i, кроме одного, верно $a_i^* \leqslant b^*/n$, то получаемое решение имеет оценку

$$f(\pi) \leqslant b^* + \sum_{i=1}^{m} a_i^* + (m-1)a^* .$$

Из /12/, /27/-/29/ можно получить и другую оценку функционала $f'(\pi)$:

$$f'(\pi) \leqslant \max_{k \in \mathcal{K}} \Big\{ \sum_{i=1}^{m} \frac{k_i - k_{i-1}}{n} b(i) +$$

$$+ m(\bar{a}_m - \bar{a}_1) + \sum_{i=1}^{m-1} (\Delta_{k_i}(i) - \Delta_{k_i}(i+1)) \Big\} \leqslant$$

$$\leqslant b^* + m(\bar{a}_m - \bar{a}_1) + m \sum_{i=1}^{m-1} \max_j (a_j(i) - a_j(i+1)). \qquad /38/$$

Некоторые члены суммы в правой части /38/ могут быть и отрицательными.

Алгоритм 2 состоит в последовательном выполнении преобразования матрицы A по первому типу, проецирования векторов a_j на плоскость $x(i^*) = 0$ и вектор $b' = \sum a_j'$, алгоритма § I по отношению к векторам $c_j = P_1 a_j'$.

Алгоритм 3 отличается от алгоритма 2 тем, что преобразование матрицы A ведется не по первому, а по второму типу. В силу соотношений /I4/, /I8/, /I9/ оценка /26/ переходит (для алгоритмов 2 и 3 соответственно) в оценки

$$\max_j (c_j(i) - c_j(i+1)) \leq a_i^* + $$
$$+ (a_{i^*}^* / b'(i^*)) \cdot \max\{0, b'(i+1) - b'(i)\}, \qquad /39/$$

$$\max_j (c_j(i) - c_j(i+1)) \leq a^*. \qquad /40/$$

В качестве i^* можно взять координату, для которой величина $a_i^* / b'(i)$ минимальна. Если при некотором i верно $b'(i+1) > b'(i)$, то из /I5/ получим $b'(i) = n a_i^*$ и $a_{i^*}^* / b'(i^*) = 1/n$. Таким образом, из /39/ получаем оценку

$$\max_j (c_j(i) - c_j(i+1)) \leq \max_j \{a_i^*, \bar{a}'_{i+1}\}. \qquad /4I/$$

Последовательно учитывая соотношения /20/, /I2/, /2I/, /24/,/25/, /8/, /I/, /4I/, получаем оценку функционала

$$f'(\pi) \leq \max_{K \in \mathcal{K}} \Big\{ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=K_{i-1}+1}^{K_i} (p_2 a'_{\pi(j)} + c_{\pi(j)})(i) \Big\} \leq$$
$$\leq \max_{K \in \mathcal{K}} \Big\{ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=K_{i-1}+1}^{K_i} \frac{a'_{\pi(j)}(i^*)}{b'(i^*)} b^* + \sum_{i=1}^{m} (c^{K_i,\pi} - c^{K_{i-1},\pi})(i) \Big\} =$$
$$= b^* + \max_{K \in \mathcal{K}} \sum_{i=1}^{m-1} (c^{K_i,\pi}(i) - c^{K_i,\pi}(i+1)) \leq$$
$$\leq b^* + (m-1) \sum_{i=1}^{m-1} \max\{a_i^*, \bar{a}'_{i+1}\}, \qquad /42/$$

где величины $\bar{a}'_i$ определены согласно /I6/, $i = \overline{1, m-1}$; $\bar{a}'_m = \bar{a}_m$.

Для алгоритма 3 получаем аналогичную оценку, используя /40/ вместо /4I/ и уточняя соотношение /I/:

$$f'(\pi) \leq b^* + (m-1)\, a^* \, C_Ш \,(m-1), \qquad /43/$$

где $C_Ш\,(m-1)$ - константа Штейница для нормы, единичный шар Ш которой есть выпуклая оболочка положительного и отрицательного ортантов единичного куба (на рисунке ниже изображен такой шар в 2-мерном пространстве).

Из /I3/, /43/ и теоремы I вытекает

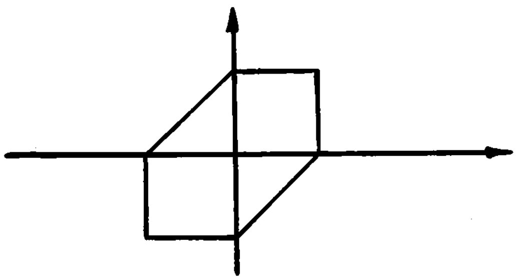
Теорема 2. Существует расписание задачи Джонсона I, порождаемое некоторой перестановкой π, такое, что

$$f(\pi) \leqslant b^* + m(m-1)a^* . \qquad /44/$$

Из /9/ и /44/ получаем оценку точности такого расписания:

$$f(\pi) - f(p_0) \leqslant m(m-1)a^* ,$$

где p_0 - оптимальное расписание задачи.



Замечание I. С учетом /I7/, оценка /42/ лучше оценки /44/.

Замечание 2. Оценка /44/ может быть улучшена, если удастся учесть конкретный вид нормы $Ш$. Так например, уже сейчас можно утверждать, что $C_Ш(2) \leqslant 1.5$, откуда при $m = 3$ получаем оценку $f(\pi) \leqslant b^* + 5a^*$.

Замечание 3. Функционал f обладает свойством инверсии, т.е. $f(\pi) = f_n(\pi^{-1})$, где f_n представляет собой функционал f на инверсированной матрице A (строки которой идут в обратном порядке). Таким образом, решая инверсированную задачу, мы можем получать хорошие решения прямой задачи. Поскольку в ряде случаев получаемые оценки точности различаются для прямой и инверсированной задач (например, оценки /38/, /42/ и в незначительной степени - /37/), то имеет смысл решать обе задачи, чтобы затем из полученных решений выбрать минимальное.

Замечание 4. Все описанные здесь алгоритмы дают приближенное решение задачи Джонсона I с трудоемкостью $O(m^2n^2)$ операций.

Поступила в ред.-изд.отдел
25 марта 1980 г.

Литература

I. Севастьянов С.В. О приближенном решении некоторых задач теории расписаний. - Дискретный анализ. 1978, вып. 32, с. 66-75.

2. Гринберг В.С., Севастьянов С.В. О величине константы Штейница. - Функциональный анализ, 1980, т.I4, вып.2.

3. Севастьянов С.В. Об асимптотическом подходе к некоторым

задачам теории расписаний. - Управляемые системы, 1975, вып. 14, с. 40-51.

4. Белов И.С., Столин Я.Н. Алгоритм в одномаршрутной задаче календарного планирования. - в кн.: Мат.экономика и функциональный анализ.- М: Наука, 1974, с. 248-257.

5. Севастьянов С.В. О приближенном решении задачи календарного распределения. - Настоящий сборник , 49.