Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1980 г., вып.20

УДК.517.949.2

УПРАВЛЯЕМОСТЬ СИСТЕМ, НЕРАЗРЕШЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Т.С.Трофимчук

Получены необходимые и достаточные условия относительной управляемости общих дифференциальных систем с запаздыванием (при условии гибридности). При доказательстве критерия управляемости использован метод определяющего уравнения.

Постановка задачи. Основной результат. Рассмотрим систему управления

$$\mathcal{D}_1(p)\,x(t)+\mathcal{D}_2(p)\,x(t-h)=\mathcal{L}(p)\,u(t),\quad t\in(0,t_1], \qquad /1/$$

с начальными условиями, обеспечивающими единственность решения при каждом $u(t)$. Здесь x — n-вектор; u — r-вектор управления; $h=const>0$ - запаздывание; $p\equiv\frac{d}{dt}$ - оператор дифференцирования;

$$\mathcal{D}_1(p)\equiv A_0p^{\alpha}+A_1p^{\alpha-1}+\ldots+A_{\alpha};\ \mathcal{D}_2(p)\equiv C_0p^{\beta}+C_1p^{\beta-1}+\ldots+C_{\beta}; \qquad /2/$$

$\mathcal{L}(p)\equiv B_0p^{q}+B_1p^{q-1}+\cdots+B_q$; A_i, B_k, C_j - постоянные матрицы размера $n\times n$, $n\times r$, $n\times n$ соответственно, $i=0,1,\ldots,\alpha$; $k=0,1,\ldots,q$; $j=0,1,\ldots,\beta$; причем $\det A_0=0$, $\operatorname{rank}A_0=m$, $\beta\le\alpha-1$, $\alpha\ge 2$.

Допустимыми управлениями $u(t)$ являются функции, имеющие кусочно-непрерывные производные до q-го порядка включительно.

Предположим, что существуют постоянные невырожденные $n\times n$ матрицы Ω и Ω_0 такие, что

$$\Omega A_0\Omega_0=\begin{bmatrix}E_m & 0_{m\,n-m}\\ & 0_{n-m\,n}\end{bmatrix},\ \Omega A_1\Omega_0=\begin{bmatrix}\bar A_{11} & \bar A_{12}\\ \bar A_{21} & A_{22}\end{bmatrix},\ \det A_{22}\neq 0, \qquad /3/$$

где $\bar A_{11}$, $\bar A_{12}$, $\bar A_{21}$, A_{22} имеют размеры $m\times m$, $m\times[n-m]$, $[n-m]\times m$, $[n-m]\times[n-m]$ соответственно.

Определение. Систему /1/ назовем относительно управляемой на $[0,t_1]$, если для каждого начального условия и произвольного n-вектора x_1 существует допустимое управление $u(t)$ такое, что соответствующая траектория системы /1/ удовлетворяет условию $x(t_1)=x_1$.

Требуется получить необходимые и достаточные условия относительной управляемости системы /I/ при выполнении соотношения /3/, выраженные через параметры системы.

Рассматриваемая система уравнений относится к классу систем управления, которые вобрали в себя особенности непрерывных систем с последействием и дискретных систем. Как будет показано ниже, система /I/ при условии /3/ сводится к гибридной системе, т.е. системе, состоящей из дифференциально-разностных и разностных уравнений. Гибридными системами описываются многие задачи, отражающие реальные процессы управления в технике и механике, экономике и т.д. Например, задачи управляемости гибридных систем рассматривались в [3].

Основным результатом данной работы является следующая

Т е о р е м а. Для относительной управляемости системы /I/ необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{rank}\Big\{X_\kappa(s),\ \kappa=\alpha-q,\dots,(\alpha-1)n+\operatorname{rank}A_0+(r-1)q;\ s=0,h,\dots,\alpha_1 h;\ \alpha_1=\Big[\frac{t_1-0}{h}\Big]\Big\}=n, \qquad /4/$$

где $X_\kappa(s)$ – решение определяющего уравнения

$$\mathcal{D}_1(\Delta)X_\kappa(s)+\mathcal{D}_2(\Delta)X_\kappa(s-h)=\mathcal{L}(\Delta)U_\kappa(S) \qquad /5/$$

с начальными условиями

$U_0(0)=E_r;\ U_\kappa(s)\equiv 0,\ \kappa\neq 0$ или $s\neq 0;\ X_\kappa(s)\equiv 0,\ \kappa<\alpha-q$ или $s<0$; здесь $\Delta^i X_\kappa(s)\equiv X_{\kappa+i}(s)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о можно разбить на два основных этапа.

I. Исходная система сводится к гибридной стационарной системе уравнений с помощью двух невырожденных преобразований, существование которых вытекает из условия /3/.

П. К полученной гибридной системе применяется теория относительной управляемости систем с запаздыванием, разработанная в [I].

I этап. Система /I/ сводится к системе уравнений

$$M\dot{Y}(t)=AY(t)+CY(t-h)+\mathcal{L}_0(p)u(t), \qquad /6/$$

где

$$Y(t)=\begin{bmatrix} x(t)\\ \dot{x}(t)\\ \vdots\\ x^{(\alpha-1)}(t)\end{bmatrix}-\alpha n\times 1;\quad M=\begin{bmatrix} E_{(\alpha-1)n} & 0_{(\alpha-1)n,n}\\ 0_{n,(\alpha-1)n} & A_0\end{bmatrix}-\alpha n\times\alpha n;$$

$$\mathcal{A}=\begin{bmatrix} 0 & E_n \dots 0 \\ 0 & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots \\ -\mathcal{A}_\alpha & -\mathcal{A}_{\alpha-1} \dots -\mathcal{A}_1 \end{bmatrix} - \alpha n \times \alpha n; \quad C=\begin{cases} \begin{bmatrix} 0_{(\alpha-1)n,\,\alpha n} \\ -C_{\alpha-1} - C_{\alpha-2} \dots - C_0 \end{bmatrix}, \beta=\alpha-1; \\ \begin{bmatrix} 0_{(\alpha-1)n,\,\alpha n} \\ -C_\beta - C_{\beta-1} \dots - C_0\, 0_{n,(\alpha-\beta-1)n} \end{bmatrix}, \beta<\alpha-1; \end{cases}$$

$$\mathcal{L}_0(p)=\begin{bmatrix} 0_{(\alpha-1)n,\,r} \\ \mathcal{L}(p) \end{bmatrix} - \alpha n \times r,$$

которая является стационарной гибридной системой [3]. Действительно, невырожденные $\alpha n \times \alpha n$ -матрицы W и W_0, определяемые равенствами

$$W=\begin{bmatrix} E_{(\alpha-1)n} & 0_{(\alpha-1)n,\,n} \\ 0_{n,(\alpha-1)n} & \Omega \end{bmatrix}, \quad W_0=\begin{bmatrix} E_{(\alpha-1)n} & 0_{(\alpha-1)n,\,n} \\ 0_{n,(\alpha-1)n} & \Omega_0 \end{bmatrix},$$

преобразуют матрицы M, $\mathcal{A}$, C к виду

$$W M W_0=\begin{bmatrix} E_{(\alpha-1)n+m} & 0_{(\alpha-1)n+m,\,n-m} \\ \multicolumn{2}{c}{0_{n-m,\,\alpha n}} \end{bmatrix},$$

$$W\mathcal{A}W_0=\begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} \\ \mathcal{A}_{21} & \mathcal{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad W C W_0=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix},$$

где $\mathcal{A}_{11}$, C_{11} – $[(\alpha-1)n+m]\times[(\alpha-1)n+m]$ -матрица; $\mathcal{A}_{12}, C_{12}$ – $[(\alpha-1)n+m]\times[n-m]$ – матрицы; $\mathcal{A}_{21}$, C_{21} – $[n-m]\times[(\alpha-1)n+m]$ – матрицы; $\mathcal{A}_{22}$, C_{22} – $[n-m]\times[n-m]$-матрицы, причем $\det \mathcal{A}_{22} \neq 0$.

$W_0^{-1}Y(t)=\begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$, где $y(t)$, $z(t)$ – вектора размерностей

$(\alpha-1)n+m$ и $(n-m)$;

$W\mathcal{L}_0(p)=\begin{bmatrix} K_1(p) \\ K_2(p) \end{bmatrix}$, $K_i(p) \equiv B_0^i p^q + B_1^i p^{q-1} + \dots + B_q^i$, $i=1,2$,

где матрицы B_j^1, B_j^2 $j=0,\dots,q$ имеют размеры $[(\alpha-1)\cdot n+m]\times r$ и $(n-m)\times r$;

$P_1=-\mathcal{A}_{22}^{-1}\mathcal{A}_{21}$; $P_2=-\mathcal{A}_{22}^{-1}C_{21}$; $Q=-\mathcal{A}_{22}^{-1}C_{22}$; $K_{12}(p)\equiv-\mathcal{A}_{22}^{-1}K_2(p)$; $B_{1j}=-\mathcal{A}_{22}^{-1}B_j^2$, $j=0,\dots,q$,

систему /6/ сведем к уравнениям

$$\begin{cases} \dot y(t) = A_{11} y(t) + A_{12} z(t) + C_{11} y(t-h) + C_{12} z(t-h) + K_1(p)\, u(t), \\ z(t) = P_1 y(t) + P_2 y(t-h) + Q z(t-h) + K_{12}(p)\, u(t). \end{cases} \qquad /7/$$

Для /7/ зададим начальные условия, обеспечивающие единственность решения

$$\begin{cases} y(\tau) = \{ y_0(\tau),\ \tau \in [-h, 0);\ y(0) = y_0 \}, \\ z(\tau) = \{ z_0(\tau),\ \tau \in [-h, 0);\ z(0) = P_1 y_0 + P_2 y_0(-h) + Q z_0(-h) + \sum_{i=0}^{q} B_{1i}\, u^{(i)}(0) \}. \end{cases} \qquad /8/$$

Условимся, что

$$y(\tau) \equiv 0,\quad z(\tau) \equiv 0,\quad u(\tau+h) \equiv 0 \qquad \text{для} \quad \tau < -h. \qquad /8'/$$

Заданием матрицы W_0 и начальных условий /8/, /8'/ определяются начальные состояния и для системы /I/, последние обеспечивают необходимую единственность решения.

Для вывода условия /4/ применим стандартную процедуру получения определяющего уравнения [I], используя формулу Коши для $x(t)$. Но так как $x(t)$ и $y(t)$ связаны соотношением

$$x(t) = H_1 Y(t) = H_1 W_0 W_0^{-1} Y(t) = H_1 W_0 \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = H_1 \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = H y(t),$$

где $H_1 = [E_n\ 0_{n,(\alpha-1)n}]$, $H = [E_n\ 0_{n,(\alpha-2)n+m}]$,

то достаточно получить формулу Коши для $y(t)$. Выделим два случая: I) $\beta < \alpha - 1$; 2) $\beta = \alpha - 1$.

<u>Случай I</u>. Пусть $\beta < \alpha - 1$. Тогда в уравнениях /7/ матрицы C_{12} и Q являются нулевыми. Имеем

$$\begin{cases} \dot y(t) = (A_{11} + A_{12} P_1)\, y(t) + (C_{11} + A_{12} P_2)\, y(t-h) + [K_1(p) + A_{12} K_{12}(p)]\, u(t), \\ z(t) = P_1 y(t) + P_2 y(t-h) + K_{12}(p)\, u(t). \end{cases} \qquad /9/$$

От системы /9/ перейдем к расширенной системе [2]:

$$\dot y_1(t) = A^0 y_1(t) + A^1 y_1(t-h) + B^1 v(t),$$

где

$$y_1(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ u(t) \\ \dot u(t) \\ \vdots \\ u^{(q-1)}(t) \end{bmatrix};\quad A^0 = \begin{bmatrix} A_{11} + A_{12}P_1 & B_{2q} & B_{2,q-1} \dots & B_{21} \\ 0 & 0 & E_r \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & E_r \\ 0 & 0 & 0 \dots & 0 \end{bmatrix} - [(\alpha-1)n + m + rq] \times [(\alpha-1)n + m + rq];$$

$$\mathcal{A}^1 = \begin{bmatrix} C_{11} + \mathcal{A}_{12} P_2 & \\ & 0_{(\alpha-1)n+m+rq,\,rq} \\ 0_{rq,(\alpha-1)n+m} & \end{bmatrix}, \quad B^1 = \begin{bmatrix} B_{20} \\ 0 \\ E_r \end{bmatrix} - [(\alpha-1)n+m+rq]\times r;$$

$$B_{2i} = B_i^1 + \mathcal{A}_{12} B_{1i}, \quad i = 0,1,\ldots,q.$$

Очевидно, $y(t) = H_2 y_1(t)$, $H_2 = [E_{(\alpha-1)n+m}\ 0_{(\alpha-1)n+m,\,rq}]$.

Введем в рассмотрение матричную функцию $F(t,\tau)$ удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial F(t,\tau)}{\partial \tau} = -F(t,\tau)\mathcal{A}^0 - F(t,\tau+h)\mathcal{A}^1, \quad \tau < t,$$

$$F(t,t-0) \equiv E; \quad F(t,\tau) \equiv 0, \quad \tau > t+0.$$

Тогда для $y_1(t)$ имеем

$$y_1(t) = \varphi(t, y_{10}) + \int_0^t F(t,\tau) B^1 v(\tau)\, d\tau,$$

где $\varphi(t,y_{10}) = F(t,0)y_{10} + \int_0^h F(t,\tau)\mathcal{A}^1 y_{10}(\tau-h)\,d\tau$; $y_{10}(\tau)$ – начальная функция на отрезке $[-h,0]$, полученная из /8/. Отсюда

$$x(t) = HH_2\,\varphi(t,y_{10}) + \int_0^t HH_2 F(t,\tau) B^1 v(\tau)\,d\tau.$$

Следовательно, неявным критерием относительной управляемости системы /I/ является утверждение (см. [I]):

Для любого n -вектора g, $\|g\| \neq 0$, справедливо

$$g' HH_2 F(t_1\tau) B^1 \not\equiv 0, \quad \tau \in [0,t_1]. \qquad /10/$$

Так как

$$F^{(k)}(t_1,\tau) = (-1)^k \sum_{i=0}^{k} F(t_1,\tau+ih)\, q_k(ih), \quad k = 0,1,\ldots,$$

где $q_k(s)$ находятся из равенств

$q_{k+1}(s) = \mathcal{A}^0 q_k(s) + \mathcal{A}^1 q_k(s-h)$; $q_0(0) = B^1$; $q_k(s) \equiv 0$, $k \neq 0$ или $s \neq 0$,

то /10/ эквивалентно условию

$$\operatorname{rank}\left\{HH_2 q_k(s),\ k=0,1,\ldots,(\alpha-1)n+m+rq-1;\ s=0,h,\ldots,\alpha_1 h;\ \alpha_1 = \left[\frac{t_1-0}{h}\right]\right\} = n. \quad /11/$$

Методом индукции нетрудно показать, что $H_2 q_k(s) = Q_{k-q+1}$, или

$$q_k(s) = \begin{bmatrix} Q_{k-q+1}(s) \\ U_{k-q+1}(s) \\ \vdots \\ U_k(s) \end{bmatrix},$$

где $Q_K(s)$ удовлетворяет уравнению

$$Q_{K+1}(s)=(A_{11}+A_{12}P_1)Q_K(s)+(C_{11}+A_{12}P_2)Q(s-h)+B_{20}U_{K+q}(s)+\ldots+B_{2q}U_K(s),$$

$$U_0(0)=E_r;\ U_K(s)\equiv 0,\ K\neq 0 \ \text{ или } s\neq 0;\ Q_K(s)\equiv 0,\ K<-q \ \text{ или } s<0.$$

Заметим, что $Q_K(s)$ можно представить и как решение системы

$$\begin{cases} Q_{K+1}(s)=A_{11}Q_K(s)+A_{12}X^1_K(s)+C_{11}Q_K(s-h)+B^1_0U_{K+q}(s)+\cdots+B^1_qU_K(s),\\ X^1_K(s)=P_1Q_K(s)+P_2Q_K(s-h)+B_{10}U_{K+q}(s)+\cdots+B_{1q}U_K(s), \end{cases}$$

$$Q_K(s)\equiv 0,\ K<-q \ \text{ или } s<0;\ X^1_K(s)\equiv 0,\ K<-q \ \text{ или } s<0;$$

$$U_0(0)=E_r;\ U_K(s)\equiv 0,\ K\neq 0 \text{ или } s\neq 0.$$

Тогда $X^2_K(s)=W_0\begin{pmatrix}Q_K(s)\\ X^1_K(s)\end{pmatrix}$, в силу невырожденности W, удовлетворяет равенствам

$$MX^2_{K+1}(s)=AX^2_K(s)+CX^2_K(s-h)+\mathcal{L}_0(\Delta)U_K(s),$$

$$X^2_K(s)\equiv 0,\ K<-q \ \text{ или } s<0;\ U_0(0)=E_r;\ U_K(s)\equiv 0,\ K\neq 0 \ \text{ или } s\neq 0.$$

Нетрудно видеть, что $HQ_K(s)=H_1W_0\begin{pmatrix}Q_K(s)\\ X^1_K(s)\end{pmatrix}=H_1X^2_K(s)$. Значит, /II/ эквивалентно соотношению

$$\operatorname{rank}\{H_1X^2_K(s),\ K=-q,\ldots,(\alpha-1)n+m+(r-1)q;\ s=0,h,\ldots,\alpha_1h\}=n.$$

В свою очередь $H_1X^2_K(s)=X_K(s)$, где $X_K(s)$ - решение определяющего уравнения /5/(см[2]). Следовательно, справедлив критерий /4/.

Случай 2. Пусть $\beta=\alpha-1$. В системе /7/ матрицы C_{12} и Q теперь, вообще говоря, ненулевые. Для $z(t)$ в этом случае с учетом /8/, /8'/ имеем равенство (см. [3])

$$z(t)=P_1y(t)+\sum_{i=1}^{\alpha_1}Q^{i-1}(P_2+QP_1)y(t-ih)+\sum_{i=0}^{\alpha_1}Q^iK_{12}(p)u(t-ih)+$$
$$+\ell(t,y_0(\cdot),z_0(\cdot)).$$

Здесь $\alpha_1=\left[\dfrac{t_1-0}{h}\right]$; функция $\ell(t,y_0(\cdot),z_0(\cdot))$ зависит лишь от начальных функций /8/, /8'/. Отсюда для $y(t)$ получаем дифференциальное уравнение:

$$\dot y(t)=\sum_{i=0}^{\alpha_1}K_i\,y(t-ih)+\sum_{i=1}^{\alpha_1}N_iK_{12}(p)u(t-ih)+$$
$$+[A_{12}K_{12}(p)+K_1(p)]u(t)+\ell_1(t,y_0(\cdot),z_0(\cdot)), \qquad /12$$

где $K_0=A_{11}+A_{12}P_1;\ K_1=C_{11}+A_{12}(P_2+QP_1)+C_{12}P_1;$

$$K_i = A_{12} Q^{i-1}(P_2 + QP_1) + C_{12} Q^{i-2}(P_2 + QP_1), \quad i = 2, \dots, d_1;$$

$$N_i = A_{12} Q^i + C_{12} Q^{i-1}, \quad i = 1, \dots, d_1.$$

Как и в случае I, от /I2/ перейдем к расширенной системе относительно $y_1(t)$:

$$\dot{y}_1(t) = \sum_{i=0}^{d_1} K_i^1 y_1(t - ih) + \sum_{i=0}^{d_1} N_i^1 v(t - ih) + \ell_2(t, y_0(\cdot), z_0(\cdot)).$$

Здесь

$$K_0^1 = \begin{bmatrix} K_0 & B_{2q} & B_{2q-1} & \cdots & B_{21} \\ 0 & 0 & E_r & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & E_r \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}; \quad K_i^1 = \begin{bmatrix} K_i & N_i B_{1q} & N_i B_{1q-1} \cdots N_i B_{11} \\ \cdot & & \\ & O_{rq(d-1)n+m+rq} & \end{bmatrix}, i = 1, \dots, d_1;$$

$$N_0^1 = \begin{bmatrix} B_{20} \\ 0 \\ E_r \end{bmatrix}; \quad N_i^1 = \begin{bmatrix} N_i B_{10} \\ \\ 0 \end{bmatrix}, i = 1, \dots, d_1; \quad \ell_2(t, y_0(\cdot), z_0(\cdot)) = \begin{bmatrix} \ell_1(t, y_0(\cdot), z_0(\cdot)) \\ \\ 0 \end{bmatrix};$$

$B_{2i} = B_i^1 + A_{12} B_{1i}$, $i = 0, 1, \dots, q$; $K_i^1 - [(d-1)n + m + rq] \times [(d-1)n + m + rq]$,

$i = 0, 1, \dots, d_1$; $N_i^1 - [(d-1)n + m + rq] \times r$, $i = 0, 1, \dots, d_1$;

$\ell_2(t, y_0(\cdot), z_0(\cdot)) - [(d-1)n + m + rq] \times 1$.

Введем в рассмотрение матричную функцию $F(t,\tau)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial F(t,\tau)}{\partial \tau} = -\sum_{i=0}^{d_1} F(t, \tau + ih) K_i^1, \quad \tau \le t;$$

$$F(t, t-0) = E; \quad F(t,\tau) \equiv 0, \quad \tau > t + 0.$$

Умножая /I2/ слева на $F(t,\tau)$ и интегрируя по τ от 0 до t, получаем формулу Коши для $y_1(t)$:

$$y_1(t) = \varphi(t, y_0(\cdot), z_0(\cdot)) + \int_0^t \sum_{i=0}^{d_1} F(t, \tau + ih) N_i^1 v(\tau)\, d\tau.$$

Здесь $\varphi(t, y_0(\cdot), z_0(\cdot))$ не содержит членов с $v(\tau)$.

Введем обозначение

$$\Psi(t,\tau) = \sum_{i=0}^{d_1} F(t, \tau + ih) N_i^1.$$

Неявным критерием относительной управляемости системы /I/ явля-

ется следующее утверждение: для любого n -вектора $g, \|g\| \neq 0$, справедливо соотношение

$$g' H H_2 \Psi(t_1, \tau) \not\equiv 0, \quad \tau \in [0, t_1]. \qquad /13/$$

Получим теперь связь критерия /13/ с решениями определяющего уравнения /5/. Поскольку функции $F(t_1, \tau + ih) N_i^1$, $i = 0, 1, \dots, d_1$, удовлетворяют одному и тому же линейному дифференциальному уравнению порядка $[(d-1)n + m + rq]$, следовательно, тому же уравнению удовлетворяет и функция $\Psi(t_1, \tau)$. Для производных $\Psi^{(k)}(t_1, \tau)$ по индукции можно доказать, что

$$\Psi^{(k)}(t_1, \tau) = (-1)^k \sum_{i=0}^{(k+1)d_1} F(t_1, \tau + ih) q_{k+1}(ih), \; k = 0, 1, \dots, \qquad /14/$$

где $q_k(s)$ удовлетворяют уравнению

$$q_{k+1}(s) = \sum_{i=0}^{d_1} K_i^1 q_k(s - ih) + \sum_{i=0}^{d_1} N_i^1 v_k(s - ih),$$

$v_0(0) = E_r$; $v_k(s) \equiv 0$, при $k \neq 0$ или $s \neq 0$; $q_k(s) \equiv 0$ при $k < 0$ или $s < 0$.

Из /14/ следует, что

$$\Psi^{(k)}(t_1, t_1 - \ell h - 0) = \Psi^{(k)}(t_1, t_1 - \ell h + 0), \; k = 0, 1, \dots, \left[\frac{\ell - d_1}{d_1}\right] - 1;$$

$$\Psi^{(k)}(t_1, t_1 - \ell h - 0) = \Psi^{(k)}(t_1, t_1 - \ell h + 0) + (-1)^k q_{k+1}(\ell h), \; k = \left[\frac{\ell - d_1}{d_1}\right], \dots$$

Итак, получаем, что /13/ эквивалентно условию

$$\operatorname{rank} \{H H_2 q_k(s), \; k = 0, 1, \dots, (d-1)n + m + rq; \; s = 0, h, \dots, d_1 h\} = n /15/$$

Имеем: $H_2 q_k(s) = Q_{k-q}(s)$, где $Q_k(s)$ находятся из системы

$$Q_{k+1}(s) = \sum_{i=0}^{d_1} K_i Q_k(s - ih) + \sum_{i=0}^{d_1} N_i K_{12}(\Delta) U_k(s - ih) + [A_{12} K_{12}(\Delta) + K_1(\Delta)] U_k(s).$$

Здесь $U_0(0) = E_r$; $U_k(s) \equiv 0$ при $k \neq 0$ или $s \neq 0$, $Q_k(s) \equiv 0$ при $k < -q$ или $s < 0$. В свою очередь $Q_k(s)$ являются решением системы

$$\begin{cases} Q_{k+1}(s) = A_{11} Q_k(s) + C_{11} Q_k(s - h) + A_{12} X_k^1(s) + C_{12} X_k^1(s - h) + B_0^1 U_{k+q}(s) + \dots + B_q^1 U_k(s), \\ X_k^1(s) = P_1 Q_k(s) + P_2 Q_k(s - h) + Q X_k^1(s - h) + B_{10} U_{k+q}(s) + \dots + B_{1q} U_k(s) \end{cases}$$

с начальными условиями

$Q_k(s) \equiv 0$, $X_k^1(s) \equiv 0$ при $k < -q$ или $s < 0$; $U_0(0) = E_r$; $U_k(s) \equiv 0$ при $k \neq 0$ или $s \neq 0$.

Далее, рассуждая аналогично случаю I, завершаем доказательство теоремы.

Замечание. Для систем вида

$$\mathcal{D}_1(p)\,x(t) + \mathcal{D}_2(p)\,x(t-h) = \mathcal{L}_1(p)\,u(t) + \mathcal{L}_2(p)\,u(t-h),$$

где $\mathcal{D}_1(p)$, $\mathcal{D}_2(p)$ такие же, как и в системе /I/,

$\mathcal{L}_i(p) \equiv B_0^i\,p^q + B_1^i\,p^{q-1} + \ldots + B_q^i$, $i = 1,2$, критерий /4/ остается в силе, при этом $X_K(s)$ находятся из определяющих уравнений

$$\mathcal{D}_1(\Delta)\,X_K(s) + \mathcal{D}_2(\Delta)\,X_K(s-h) = \mathcal{L}_1(\Delta)\,U_K(s) + \mathcal{L}_2(\Delta)\,U_K(s-h),$$

$X_K(s) \equiv 0$, $K < d - q$ или $s < 0$; $U_0(0) = E_r$; $U_K(s) \equiv 0$, $K \neq 0$ или $s \neq 0$.

Поступила в ред.-изд.отдел.
21 декабря 1978 г.

Литература

1. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Качественная теория оптимальных процессов. - М.: Наука, 1971. - 507с.

2. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Крахотко В.В. Управляемость многоконтурных систем с сосредоточенными параметрами. - Автоматика и телемеханика, 1971, № 11, с.18-25.

3. Ахундов А.А. Управляемость линейных гибридных систем. - Известия АН АзССР, Серия физ.-мат.наук, 1975, № 3, с.4-10.

4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. - М.: Наука, 1966. - 491с.