Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1981 г., вып. 21.
УДК 519.854

О МИНИМИЗАЦИИ НЕКОТОРЫХ ПОЛИНОМОВ ОТ БУЛЕВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

А.А.Агеев

1. В проблеме минимизации полиномов от булевых переменных важное место занимает вопрос о выделении классов полиномов, специфика которых позволяет строить эффективные алгоритмы их минимизации. Некоторые классы таких полиномов рассмотрены, например, в [1, 2]. В настоящей работе рассматриваются полиномы, минимизация которых сводится к отысканию минимального разреза двухполюсной сети.

2. Пусть задана произвольная ориентированная конечная двухполюсная сеть $G=(V,E)$ с множеством вершин V, множеством дуг E, источником s и стоком t. Для каждой дуги $e\in E$ задана пропускная способность $a_e \geq 0$. Разрезом $V_s \to V_t$ называют разбиение множества вершин сети на два непересекающихся множества V_s и V_t такие, что $s\in V_s$, $t\in V_t$. Пропускной способностью $\gamma(V_s\to V_t)$ разреза $V_s\to V_t$ называется сумма пропускных способностей всех дуг сети, начальные вершины которых лежат в V_s, а конечные - в V_t:

$$\gamma(V_s\to V_t)=\sum_{\substack{e=(v_1,v_2)\in E\\ v_1\in V_s,\ v_2\in V_t}} a_e .$$

Разрез с минимальной пропускной способностью называется минимальным.

3. Рассмотрим полином P от булевых переменных x_i, $i=1,\dots,n$, вида

$$P((x_k))=\sum_{i=1}^{n} b_i x_i-\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} c_{ij}x_i x_j ,$$

где $b_i\geq 0$, $c_{ij}\geq 0$, $i=1,\dots,n$, $j=i+1,\dots,n$.

Теорема 1. Задача минимизации полинома P эквивалентна задаче поиска минимального разреза.

Доказательство. Пусть $G=(V,E)$ - двухполюсная сеть. Поставим в соответствие ей полином G от булевых переменных x_v, $v\in V$, вида

$$G((x_v))=\sum_{e=(v_1,v_2)\in E} a_e x_{v_2}(1-x_{v_1})$$

и рассмотрим задачу

$$G((x_v)) \to \min_{(x_v)}, \qquad /1/$$

$$x_s = 0, \ x_t = 1. \qquad /2/$$

Разрез $V_s \to V_t$ сети G и допустимое решение задачи /1/, /2/ назовем соответствующими, когда

$$x_v = \begin{cases} 0, \text{ если } v \in V_s, \\ 1, \text{ если } v \in V_t. \end{cases}$$

Заметим, что поскольку для соответствующих разреза $V_s \to V_t$ и допустимого решения (x_v) равенство $x_{v_2}(1-x_{v_1}) = 1$ возможно тогда и только тогда, когда $v_1 \in V_s$, $v_2 \in V_t$, то

$$G((x_v)) = \sum_{\substack{e=(v_1,v_2)\in E \\ v_1 \in V_s,\, v_2 \in V_t}} a_e = \gamma(V_s \to V_t).$$

Отсюда следует, что если $V_s \to V_t$ - минимальный разрез, то (x_v) - оптимальное решение, и наоборот.

Для доказательства требуемой эквивалентности остается только заметить, что полином P можно представить в виде полинома G, а полином G - в виде полинома P (с точностью до постоянного слагаемого).

Из доказанного следует, что оптимальное решение задачи минимизации полинома P может быть эффективно найдено. Для этого можно, в частности, использовать алгоритм (см. [3]) тупиковых потоков трудоемкости $O(n^3)$.

4. Приведем некоторые полиномы от булевых переменных, задачи минимизации которых сводятся к задаче минимизации полинома P. В [4] рассматривался следующий полином от булевых переменных:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i(1-x_i) + \sum_{j=1}^{n} b_j(1-y_j) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_i\, y_j, \qquad /3/$$

где $a_i \geq 0$, $b_j \geq 0$, $c_{ij} \geq 0$, $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,n$.
В виде задачи минимизации такого полинома формулируется математическая постановка некоторой двухуровневой задачи стандартизации. Нетрудно видеть, что полином /3/ является частным случаем полинома P, так что задача минимизации полинома /3/ сводится к задаче минимизации полинома P.

Пусть α_j, $j = 1,\dots,n$ - некоторые подмножества множества $\{1,\dots,m\}$, $|\alpha_j| \geq 2$. Рассмотрим полином от булевых переменных вида

$$\sum_{i=1}^{m} a_i x_i + \sum_{j=1}^{n} b_j \Big(1 - \prod_{i\in\alpha_j} x_i\Big), \qquad /4/$$

где $a_i \geq 0$, $b_j \geq 0$, $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,n$.

Теорема 2. Задача минимизации полинома /4/ сводится к задаче минимизации полинома P.

Доказательство. Поставим в соответствие рассматриваемому полиному /4/ следующий полином от булевых переменных $\tilde{x}_i$, $i = 1,\dots,m$, $\tilde{y}_j$, $j = 1,\dots,n$:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i(1-\tilde{x}_i) + \sum_{j=1}^{n} b_j(1-\tilde{y}_j) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\,\tilde{x}_i\,\tilde{y}_j\,, \qquad /5/$$

где

$$c_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ если } i \notin \alpha_j, \\ R, \text{ если } i \in \alpha_j, \end{cases}$$

и

$$R > \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{j=1}^{n} b_j\,.$$

Данный полином является полиномом вида /3/. Пусть $(\tilde{x}_i^*)$, $(\tilde{y}_j^*)$ - оптимальное решение задачи минимизации этого полинома. Покажем, что имеет место соотношение

$$\tilde{y}_j^* = \prod_{i \in \alpha_j} (1 - \tilde{x}_i^*)\,.$$

В самом деле, если существует $i \in \alpha_j$ такой, что $\tilde{x}_i^* = 1$, то, в силу оптимальности рассматриваемого решения, $\tilde{y}_j^* = 0$, а если $\tilde{x}_i^* = 0$ для всякого $i \in \alpha_j$, то по той же причине $y_j^* = 1$.

Отсюда получаем, что переменные $\tilde{y}_j$ в полиноме /5/ можно выразить через переменные $\tilde{x}_i$, и, следовательно, если $(\tilde{x}_i^*)$, $(\tilde{y}_j^*)$ - вектор, минимизирующий полином /5/, то (x_i^*), где $x_i^* = 1 - \tilde{x}_i^*$, $i = 1,\dots,m$,- оптимальное решение задачи минимизации исходного полинома. Теорема доказана.

Утверждение теоремы позволяет построить эффективный алгоритм минимизации полинома /4/. Трудоемкость его будет полиномиально зависеть от числа ненулевых коэффициентов в полиноме.

Поступила в ред.-изд.отдел
4 декабря 1980 г.

Литература

1. Береснев В.Л., Гимади Э.Х., Дементьев В.Т. Экстремальные задачи стандартизации. - Новосибирск: Наука, 1978.-333с.

2. Береснев В.Л. Алгоритмы минимизации полиномов от булевых переменных. - Проблемы кибернетики, 1979, вып.36, с.225-246.

3. Адельсон-Вельский Г.М., Диниц Е.А., Карзанов А.В. Потоковые алгоритмы. - М.: Наука, 1975.- 119с.

4. Агеев А.А. Об одной двухуровневой задаче стандартизации. - В кн.: Материалы Всесоюзной научной студенческой конференции. Математика. - Новосибирск. 1979, с. 3-8.