Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1981 г., вып. 21.
УДК 519.854

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПОЛИНОМОВ ОТ БУЛЕВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

И.Г.Белинская

Многие дискретные экстремальные задачи могут быть сформулированы как задачи минимизации полинома от булевых переменных, в частности, задачи стандартизации и размещения. В настоящее время не известно эффективных алгоритмов решения для полиномов общего вида и есть косвенные доказательства того, что такие алгоритмы построить нельзя. В этой связи приобретает важное значение вопрос об отыскании классов полиномов, специфика которых позволяет строить эффективные алгоритмы. Некоторые такие классы, например, регулярные и правильные полиномы, рассмотрены в работах [1 - 3].

В настоящей работе исследуются полиномы более общего вида чем правильные —назовем их почти правильными - и предлагаются два эффективных алгоритма: минимизации почти правильных полиномов и распознавания возможности представления произвольного полинома в виде почти правильного.

§ 1. Почти правильный полином

Функцию от булевых переменных $f(y_1,\dots,y_\alpha)$ можно представить в виде полинома

$$f(y_1,\dots,y_\alpha)=\sum_{S|S\subset A} a(S)\prod_{i\in S} y_i\,,$$

при этом выражение $a(S)\prod\limits_{i\in S} y_i$ назырают членом полинома, а число $a(S)$ - коэффициентом этого члена.

Полиному $f(y_1,\dots,y_\alpha)$ поставим в соответствие некоторую булеву матрицу $\chi(f)=(\xi_{ij})$, $i\in A$, $j\in Y$, где $Y=\{1,\dots,m\}$, а m - число членов полинома с ненулевыми коэффициентами, которую назовем характеристической. Для построения этой матрицы j -му члену полинома $a(S)\prod\limits_{i\in S} y_i$ с ненулевым коэффициентом $a(S)$ поставим в соответствие j -й столбец вида

$$\xi_{ij}=\begin{cases} 1, & \text{если } i\in S,\\ 0, & \text{если } i\notin S.\end{cases}$$

Столбец j матрицы $G=(g_{ij})$ назовем квазивыпуклым (квазивогнутым), если для любых i_1,i_2,i_3, $i_1\le i_2\le i_3$, выполняется неравенство $g_{i_2j}\le \max\{g_{i_1j},g_{i_3j}\}$, $(g_{i_2j}\ge \min\{g_{i_1j},g_{i_3j}\})$.

Матрицу G назовем квазивыпуклой, если каждый столбец этой матрицы квазивыпуклый, и назовем квазивыпукло-вогнутой, если каждый столбец этой матрицы либо квазивыпуклый, либо квазивогнутый.

Полином $f(y_1,\dots,y_\alpha)$ назовем правильным, если он может быть представлен в виде

$$f(y_1,\dots,y_\alpha)=\sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{k=i-1}^{\alpha}c_{ki}\,y_i\cdots y_k\,,$$

и почти правильным, если он может быть записан в виде

$$f(y_1,\dots,y_\alpha)=\sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{k=i-1}^{\alpha}c_{ki}\,y_i\cdots y_k+\sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{k=i+1}^{\alpha}c_{k\,i+\alpha}\,y_k\cdots y_\alpha\,y_1\cdots y_i\,.$$

Заметим, что полином f правильный тогда и только тогда, когда его характеристическая матрица квазивыпуклая, и полином f почти правильный тогда и только тогда, когда матрица $\chi(f)$ квазивыпукло-вогнутая.

Рассмотрим задачу минимизации почти правильного полинома на множестве неединичных векторов. Введем обозначения:

$$f_s(y_1,\dots,y_{s-1})=\sum_{i=1}^{s-1}\sum_{k=i-1}^{s-1}c_{ki}^{(s)}\,y_i\cdots y_k\,,$$

где

$$c_{01}^{(s)}=c_{01}+c_{s-1\,s}+\sum_{i=s+1}^{\alpha}\sum_{k=i-1}^{\alpha}c_{ki}\,;$$

$$c_{k1}^{(s)}=c_{k1}+\sum_{l=s+1}^{\alpha}c_{l\,k+\alpha}\,,\quad 1\le k\le s-1\,;$$

$$c_{ki}^{(s)}=c_{ki}\,,\quad 2\le i\le s-1,\quad i-1\le k\le s-1\,.$$

Заметим, что $f(y_1,\dots,y_{s-1},0,1,\dots,1)\equiv f_s(y_1,\dots,y_{s-1})$. Отсюда справедлива следующая

Теорема. Существует оптимальное решение задачи минимизации полинома $f(y_1,\dots,y_\alpha)$ на множестве неединичных булевых векторов такое, что для некоторого s, $1\le s\le\alpha$, имеем $y_s^*=0,\ y_{s+1}^*=\dots=y_\alpha^*=1$, а вектор $(y_1^*,\dots,y_{s-1})$ минимизирует правильный полином $f_s(y_1,\dots,y_{s-1})$. При этом $f_s(y_1^*,\dots,y_{s-1}^*)=f(y_1^*,\dots,y_\alpha^*)$.

На основании этой теоремы с использованием алгоритма минимизации правильного полинома (см. [4]) строится эффективный алгоритм минимизации почти правильного полинома.

Алгоритм состоит из α этапов. На s-м $(s=\alpha,\dots,1)$ этапе ищем вектор $(y_1^*,\dots,y_{s-1}^*)$, минимизирующий правильный полином $f_s(y_1,\dots,y_{s-1})$. Далее, сравниваем вектор $(y_1^*,\dots,y_{s-1},0,1,\dots,1)$ с наилучшим из построенных и запоминаем лучший.

Трудоемкость алгоритма минимизации правильного полинома $O(\alpha^2)$ операций при объеме памяти $O(\alpha^2)$ ячеек. Так что оценки трудоемкости и объема памяти для рассмотренного алгоритма минимизации почти правильного полинома составляют $O(\alpha^3)$ и $O(\alpha^2)$.

§ 2. Приведение произвольного полинома к почти правильному

Будем говорить, что полином $f(y_1,\dots,y_\alpha)$ приводим к почти правильному, если существует перестановка $i_1,\dots,i_\alpha$ множества A такая, что полином $f(y_{i_1},\dots,y_{i_\alpha})$ почти правильный. Аналогично, матрица $(g_{ij})(i\in A,\ j\in Y)$ приводима к матрице с некоторым свойством, если существует перестановка $i_1,\dots,i_\alpha$ множества A такая, что матрица $(g_{i_k j})\ (k=1,\dots,\alpha;\ j\in Y)$ обладает этим свойством. При этом перестановку $i_1,\dots,i_\alpha$ будем называть приводящей.

Поскольку между операцией изменения нумерации переменных полинома и операцией перестановки строк характеристической матрицы существует взаимно-однозначное соответствие, то вопрос о приведении полинома к почти правильному сводится к приведению его характеристической матрицы к квазивыпукло-вогнутой матрице.

Рассмотрим задачу отыскания перестановки, приводящей булеву матрицу $\chi=(\xi_{ij})(i\in A,\ j\in Y)$ к квазивыпукло-вогнутой.

Для матрицы χ определим преобразование " $'$ " следующим образом. Положим $\chi'=(\xi'_{ij})(i\in A,\ j\in Y)$,

где

$$\xi'_{ij}=\begin{cases}\xi_{i+1\,j} & \text{, если } i\neq\alpha;\\ \xi_{1j} & \text{, если } i=\alpha.\end{cases}$$

Несложно заметить, что если χ – квазивыпукло-вогнутая матрица, то χ' такая же. Отсюда, в частности, следует, что если χ приводима к квазивыпукло-вогнутой матрице, то существует приводящая перестановка $i_1,\dots,i_\alpha$ такая, что $i_1=1$.

Матрице χ поставим в соответствие матрицу $\bar{\chi}=(\bar{\xi}_{ij})(i\in A,\ j\in Y)$ следующим образом. Положим

$$\bar{\xi}_{ij}=\begin{cases}\xi_{ij} & \text{, если } \xi_{1j}=1;\\ 1-\xi_{ij} & \text{, если } \xi_{1j}=0.\end{cases}$$

Задачу о приведении матрицы к квазивыпукло-вогнутой позволяет выгодно переформулировать

Теорема. Матрица χ приводима к квазивыпукло-вогнутой тогда и только тогда, когда $\bar{\chi}$ приводима к квазивыпуклой.

Доказательство. Пусть χ приводима к квазивыпукло-вогнутой матрице $(\eta_{ij})(i\in A,\ j\in Y)$ и $i_1,\dots,i_\alpha$ – приводящая перестановка. Считаем, что $i_1=1$. Тогда матрица $(\bar{\eta}_{ij})(i\in A,\ j\in Y)$,

где

$$\bar{\eta}_{ij}=\begin{cases}\eta_{ij} & \text{, если } \xi_{1j}=1;\\ 1-\eta_{ij} & \text{, если } \xi_{1j}=0,\end{cases}$$

будет квазивыпуклой и приводимой к матрице $\bar{\chi}$.

Обратно. Пусть $\bar{\chi}=(\bar{\xi}_{ij})(i\in A,\ j\in Y)$ приводима к квазивыпуклой матрице $(\bar{\eta}_{ij})(i\in A,\ j\in Y)$ и $i_1,\dots,i_\alpha$ – приводящая перестановка. Поскольку $\bar{\xi}_{1j}=1$ для всякого $j\in Y$, считаем, что $i_1=1$. Рассмотрим матрицу $(\eta_{ij})(i\in A,\ j\in Y)$, где

$$\eta_{ij} = \begin{cases} \bar{\eta}_{ij} & \text{, если } \xi_{1j} = 1; \\ 1-\bar{\eta}_{ij} & \text{, если } \xi_{1j} = 0. \end{cases}$$

Матрица (η_{ij}) является квазивыпукло-вогнутой и приводима к матрице χ.

§ 3. Алгоритм приведения булевой матрицы к квазивыпуклой

В статье [5] предлагается алгоритм приведения булевой матрицы к квазивыпуклому виду. Алгоритм основан на проверке некоторых необходимых и достаточных условий существования приводящей перестановки, однако сама эта перестановка не строится.

Ниже описан алгоритм аналогичной трудоемкости, в явном виде строящий приводящую перестановку.

Пусть имеется булева матрица $\chi=(\xi_{ij})(i\in A,\ j\in Y)$ и требуется найти перестановку строк, приводящую данную матрицу к квазивыпуклой. При этом будем считать, что матрица χ не имеет единичных строк и нулевых столбцов.

Пусть $X_j = \{i\in A \mid \xi_{ij}=0\},\ j\in Y$.

Заметим, что для того, чтобы перестановка $i_1,\dots,i_\alpha$ была приводящей, необходимо и достаточно выполнения следующего условия: для всякого $j=1,\dots,m$, если $i_p, i_q \in X_j,\ p<k<q$, то $i_k\in X_j$.

Опишем алгоритм приведения. На предварительном этапе алгоритма упорядочим столбцы матрицы χ так, чтобы:

1. $|X_1| = \max\limits_{1\le j\le m} |X_j|$;
2. $\bigcup\limits_{j=1}^{m_0} X_j = A$;
3. $X_j \cap \left(\bigcup\limits_{j'=1}^{j-1} X_{j'}\right) \ne \begin{cases}\varnothing \\ X_j,\end{cases} \quad j=1,\dots,m_0.$

Отметим, что если номера m_0 с указанным свойством не существует, то исходная матрица χ представима в виде

$$\chi = \left(\begin{array}{c|c} \chi_1 & 1 \\ \hline 1 & \chi_2 \end{array}\right)$$

и задача приведения матрицы χ сводится к приведению матриц χ_1 и χ_2 к квазивыпуклому виду.

Основной этап алгоритма состоит из m шагов. На j-м шаге рассматривается очередной j-й столбец и строится последовательность попарнонепересекающихся множеств $Z_1, Z_2,\dots, Z_{s_j}\ (\bigcup\limits_{s=1}^{s_j} Z_s\subset A)$ так, что

$$X_{j'} = Z_s\cup Z_{s+1}\cup\dots\cup Z_t,\quad 1\le s<t\le s_j,$$

для всякого просмотренного j'-го столбца.

Отсюда, если $i_1,\dots,i_\alpha$ - такая перестановка, что $\{i_{\alpha_{s-1}+1},\dots,i_{\alpha_s}\} = Z_s$, $s = 1,\dots,s_j$ $(0 \le \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_s \le \alpha)$, то для нее выполняется приведенное выше необходимое и достаточное условие того, что эта перестановка является приводящей для просмотренных j столбцов матрицы X.

На первом шаге полагаем $s_1 = 1$, $Z_1 = X_1$.

Рассмотрим последовательность действий на j-м, $j \le m_0$, шаге. К началу шага имеем последовательность множеств $Z_1, Z_2, \dots, Z_{s_{j-1}}$. Положим:

$$Z = Z_1 \cup Z_2 \cup \dots \cup Z_{s_{j-1}};$$

$$Z' = X_j \setminus Z;$$

$$P_1 = \{s \le s_{j-1} \mid Z_s \cap X_j = \emptyset\};$$

$$P_2 = \{s \le s_{j-1} \mid Z_s \subset X_j\};$$

$$P_3 = \{s \le s_{j-1} \mid Z_s \cap X_j \ne \emptyset,\ Z_s \not\subset X_j\}.$$

Возможен один из следующих случаев: $1 \in P_1$, $1 \in P_2$ и $1 \in P_3$. Рассмотрим каждый из них.

I. Пусть $1 \in P_1$ и s - наименьший номер, для которого $Z_s \cap X_j \ne \emptyset$. Если для некоторого s', $s \le s' \le s_{j-1}$, имеет место $s' \in P_2$, то искомой перестановки не существует. В противном случае над последовательностью множеств проделываем следующие преобразования. В конец последовательности добавляем множество $Z' \ne \emptyset$, а множество Z_s оставляем без изменения, если $s \in P_2$, и заменяем его на множества $Z_s \setminus (Z \cap X_j)$ и $Z_s \cap X_j$ в противном случае. Переходим к следующему шагу.

2. Если $1 \in P_2$ и искомая перестановка существует, то $s_{j-1} \in P_1 \cup P_3$. Перенумеровываем последовательность $Z_1,\dots,Z_{s_{j-1}}$ в противоположном порядке и действуем согласно случаю I, полагая $s=1$, если $1 \in P_3$.

3. Допустим, $1 \in P_3$. Тогда $s_{j-1} \in P_1 \cup P_2$, и этот случай сводится к описанным ранее.

Опишем последовательность действий на j-м шаге, $j > m_0$. Она несколько отличается от первых m_0 шагов, поскольку $X_j \subset Z = A$.

Сначала рассматриваем очередной j-й столбец, ищем наименьший s_0 и наибольший s номера такие, что $s, s_0 \in P_2 \cup P_3$. Допустим, $s > s_0$. Тогда если $\bigcup_{s'=s_0+1}^{s-1} Z_{s'} \not\subset X_j$, то искомой перестановки нет, в противном случае делаем следующие преобразования: Z_{s_0} заменяем на множества $Z_{s_0} \setminus X_j$ и $X_j \cap Z_{s_0}$, если $s_0 \in P_3$, и оставляем без изменения, если $s_0 \in P_2$; Z_s аналогично заменяем на множества $X_j \cap Z_s$ и $Z_s \setminus X_j$ в случае $s \in P_3$ и оставляем без изменения, если $s \in P_2$. Переходим к следующему шагу.

Если $S_0 = S$, т.е. $X_j \subset Z_S$, то в случае $X_j = Z_S$ переходим к следующему шагу, иначе j -й столбец делаем последним и рассматриваем очередной столбец. Если при этом вернемся к уже рассмотренному на j -м шаге столбцу, то задача приведения матрицы χ к квазивыпуклой сводится к совокупности задач приведения матриц χ_S к квазивыпуклым, где χ_S - сужение χ на множество строк Z_S и множество столбцов $\{m_0 < j \le m \mid X_j \subset Z_S\}$.

Заметим, что на каждом шаге ровно один столбец матрицы приводится к квазивыпуклому виду. Таким образом, через m шагов мы получим такую последовательность $Z_1, \dots, Z_{S_m}$, что строки матрицы χ будучи расположенными в порядке принадлежности их множествам последовательности, составят искомую перестановку.

Посчитаем трудоемкость алгоритма. Для рассмотрения одного столбца требуется $O(d)$ операций. Первые m_0 столбцов рассматриваются 1 раз; последние $(m - m_0)$ столбцов - не более $(m - m_0)$ раз. Поэтому трудоемкость алгоритма составит $O(m^2 d)$ операций при объеме памяти $O(md)$.

§ 4. О задаче выбора оптимального ряда изделий

Задача выбора оптимального ряда изделий может быть записана (см. [4]) следующим образом:

$$\sum_{i \in A} g_i x_i + \sum_{i \in A} \sum_{j \in Y} g_{ij} x_{ij} \to \min_{(x_i)\,(x_{ij})};$$

$$\sum_{i \in A} x_{ij} = 1, \quad j \in Y;$$

$$x_i \geq x_{ij}, \quad i \in A, \; j \in Y;$$

$$x_i, x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i \in A, \; j \in Y.$$

Здесь Y - совокупность видов работ; A - перечень образцов изделий, каждое из которых может быть использовано для выполнения работ некоторых видов. Величины g_i выражают начальные затраты, связанные с использованием изделий i -го образца, а величины g_{ij} характеризуют затраты на выполнение изделиями i -го образца работы j -го вида.

Эта задача может быть представлена (см.[4]) как задача минимизации полинома от булевых переменных. В случае, когда матрица (g_{ij}) является квазивыпукло-вогнутой, соответствующий ей полином будет почти правильным и тем самым задача выбора оптимального ряда может быть эффективно решена.

Отметим, что класс регулярных матриц не содержит всех квазивыпукло-вогнутых матриц. В частности,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

не является регулярной матрицей. Таким образом, получено расширение класса эффективно решаемых задач типа стандартизации.

Поступила в ред.-изд.отдел
I8 марта I98I г.

Литература

I. Береснев В.Л. Об одной задаче математической теории стандартизации.- В кн.: Управляемые системы. Новосибирск, I973, вып.II, с.43-54.

2. Береснев В.Л. Об одном классе задач оптимизации параметров однородной технической системы.- В кн.: Управляемые системы. Новосибирск, I97I, вып.9, с.65-74.

3. Гимади Э.Х., Дементьев В.Т. О методах решения некоторых задач оптимизации параметрических рядов.- Стандарты и качество, I97I, № I2, с.I0-I2.

4. Береснев В.Л., Гимади Э.Х., Дементьев В.Т. Экстремальные задачи стандартизации.- Новосибирск: Наука, I978, с.90-257.

5. Fulkerson D.R. and Gross O.A. Incidence matrices and interval graphs.-Pacif. J. Math., 1965, V.15, N 3, p.835-855.