Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1981 г., вып. 21.
УДК 519.8

НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ АЛГОРИТМА ПОКООРДИНАТНОГО СПУСКА ДЛЯ МАТРОИДА

Н.В.Колмычевская

Известно [1,2], что задача нахождения кратчайшей связывающей сети может быть решена посредством алгоритмов покоординатного спуска. Позднее Радо [3] показал: аналогичный алгоритм может быть использован для решения более общей задачи отыскания базы матроида, имеющей минимальный вес.

В данной статье для нахождения базы матроида вводится в рассмотрение некоторый класс алгоритмов типа покоординатного спуска. В пределах этого класса дается описание подкласса алгоритмов, позволяющих решать задачу нахождения базы матроида минимального веса.

Если не сделано никаких оговорок, под вектором будем понимать булевой n-мерный вектор.

Введем следующие обозначения:

$0 = (0,\dots,0)$; $I = (1,\dots,1)$; $\delta_j = (0,\dots,0,1_j,0,\dots,0)$;

$\tilde{M} = \{x \in M / x + \delta_j \notin M,\ j = \overline{1,n}\}$ – множество максимальных векторов множества M;

$xy = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$ – скалярное произведение векторов x и y.

Будем говорить, что:

$x \leqslant y$, если $x_j \leqslant y_j$, $j = \overline{1,n}$;

$x \cap y = z$, если $z_j = \min(x_j, y_j)$, $j = \overline{1,n}$;

$x \cup y = z$, если $z_j = \max(x_j, y_j)$, $j = \overline{1,n}$.

Пусть M – подмножество n-мерных булевых векторов.

Определение 1. Множество M называется <u>матроидом</u>, если:

1) из $x \in M$ и $y \leqslant x$ следует $y \in M$;

2) из $x, y \in M$ и $Ix < Iy$ следует существование номера j такого, что $x_j < y_j$ и $x + \delta_j \in M$.

Определение 2. Вектор z называется <u>циклом</u> матроида M, если:

1) $z \notin M$;

2) для каждого j такого, что $z_j \neq 0$, выполняется условие $z - \delta_j \in M$.

Определение 3. Вектор y называется <u>коциклом</u> матроида M, если y – минимальный (относительно частичного порядка $\leqslant$) вектор со свойством

$$xy \geqslant 1,\quad x \in \tilde{M}. \qquad /*/$$

Определение 4. Вектор x называется базой матроида M, если $x \in \tilde{M}$.

Приведем некоторые известные свойства матроида M, которые нам потребуются в дальнейшем.

Свойство 1. Если $x \in \tilde{M}$, $y \in M$ и $Ix = Iy$, то $y \in \tilde{M}$.

Свойство 2. Если $x \in M \setminus \tilde{M}$ и $y \in \tilde{M}$, то $Ix = Iy$.

Дан некоторый матроид M и n-мерный вектор C с действительными компонентами. Пусть $Ix = m$, где x - база матроида M. Обозначим через Φ множество, элементами которого являются отображения вида

$\varphi : M \to$ {множество всех булевых n-мерных векторов}со свойствами:

1) $\varphi(x) \neq 0$, если $x \notin \tilde{M}$;

2) если $\varphi(x)_j = 1$, то $x + \delta_j \in M$.

Каждому отображению $\varphi \in \Phi$ соответствует алгоритм A_φ, который строит последовательность векторов $x^0, x^1, \ldots, x^m$ по правилу:

$$x^0 = 0,\; x^k = x^{k-1} + \delta_{j_k},\; j_k = \arg\min\{c_j / \varphi(x^{k-1})_j = 1\},\; k = \overline{1,m}.$$

Заметим, что алгоритм A_φ находит некоторую базу матроида M. В самом деле, по свойствам отображения φ, $x^m \in M$, кроме того, по построению, $Ix^m = m$. И,наконец, используя свойство 1 матроида, получаем $x^m \in \tilde{M}$.

Определение 5. База $\tilde{x}$ называется базой минимального веса, если $c\tilde{x} = \min\limits_{x \in \tilde{M}} cx$.

Возникает вопрос: каким дополнительным соотношениям должно удовлетворять отображение $\varphi \in \Phi$, чтобы алгоритм A_φ строил базу минимального веса при любом векторе C ?

Определение 6. Вектор x называется достижимым относительно отображения φ, если существует последовательность векторов $x^0, x^1, \ldots, x$ такая, что

$$x^0 = 0,\; x^k = x^{k-1} + \delta_{j_k},\; \varphi(x^{k-1})_{j_k} \neq 0,\; k = \overline{1, Ix}.$$

Ответ на поставленный выше вопрос дает следующая

Теорема. Для того чтобы алгоритм A_φ $(\varphi \in \Phi)$ строил базу минимального веса при любом векторе C, необходимо и достаточно, чтобы при любом достижимом векторе $x \in M \setminus \tilde{M}$ вектор $\varphi(x)$ был равен объединению некоторых коциклов матроида M.

Предварительно докажем несколько лемм.

Лемма 1. Для каждого цикла z и каждого коцикла y матроида M выполняется условие $zy \neq 1$.

Доказательство. Пусть $zy = 1$, $z_{j_*} = y_{j_*} = 1$. Из определений 2 и 3 следует, что $z - \delta_{j_*} \in M$ и существует база x такая, что $x_{j_*} = y_{j_*} = 1$, $(x \cap y)_j = 0$, $j \neq j_*$.

Рассмотрим максимальный вектор z' такой, что $z - \delta_{j_*} \le z' \le x \cup z - \delta_{j_*}$

$z' \in M$. Предположим, что $z' \notin \tilde{M}$. Тогда, по свойству 2 матроида, $Iz' < Ix$. Отсюда на основании определения M существует j такое, что $z'_j < x_j$, $z' + \delta_j \in M$, $j \neq j_*$. Это противоречит максимальности вектора z'. Таким образом, $z' \in \tilde{M}$, причем $z'y = 0$, что противоречит определению коцикла. Лемма доказана.

Л е м м а 2. Пусть z^1 и z^2 – циклы матроида M, $z^1 \neq z^2$, $z^1_{j^*} = z^2_{j^*} = 1$. Тогда существует цикл z^3, $z^3 \leq z^1 \cup z^2 - \delta_{j^*}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное, т.е. $z^1 \cup z^2 - \delta_{j^*} \in M$. Так как $z^1 = z^2$, то существует j', для которого $z^1_{j'} = 1$, $z^2_{j'} = 0$. Из определения 2 следует, что $z^1 - \delta_{j'} \in M$.

Рассмотрим максимальный вектор z', удовлетворяющий условиям:

$$z^1 - \delta_{j'} \leq z' \leq z^1 \cup z^2, \quad z' \in M.$$

Если $Iz' < I(z^1 \cup z^2 - \delta_{j^*})$, то существует j'' такое, что $z'_{j''} < (z^1 \cup z^2 - \delta_{j^*})_{j''}$, $z' + \delta_{j''} \in M$. Получаем противоречие с выбором z'. Таким образом, $Iz' = I(z^1 \cup z^2 - \delta_{j^*})$. Отсюда $z^2 \leq z' \in M$ и, следовательно, $z^2 \in M$, что противоречит определению цикла. Лемма доказана.

С л е д с т в и е. Пусть $x \in \tilde{M}$ и $x_j = 0$. Тогда существует единственный цикл z, $z \leq x + \delta_j$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть существуют два неравных цикла z^1 и z^2, $z^1 \leq x + \delta_j$, $z^2 \leq x + \delta_j$. Заметим, что $z^1_j = z^2_j = 1$. Тогда, по лемме 2, существует цикл z^3, $z^3 \leq z^1 \cup z^2 - \delta_j \leq x \in M$. Отсюда $z^3 \in M$, и мы получаем требуемое противоречие.

Л е м м а 3. Пусть вектор $x \in M \setminus \tilde{M}$. Тогда существует коцикл y, для которого $xy = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим вектор $\bar{y} = I - x$. Покажем, что для него выполняется условие (ж), т.е. $\bar{x}\bar{y} \geq 1$, $\bar{x} \in \tilde{M}$. Действительно, так как $x \notin \tilde{M}$, то $Ix < I\bar{x}$. Тогда существует j такое, что $\bar{x}_j = 1$, $x_j = 0$. Таким образом, $\bar{y}_j = 1$ и поэтому $\bar{x}\bar{y} \geq 1$.

Теперь очевидно, что минимальный вектор $y \leq \bar{y}$ со свойством (ж) будет искомым коциклом.

Л е м м а 4. Пусть вектор $x \in M \setminus \tilde{M}$, тогда существует коцикл y такой, что если $y_j = 1$, то $x + \delta_j \in M$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное. Тогда для каждого коцикла y матроида M существует j такое, что $y_j = 1$, $x + \delta_j \in M$. Отсюда существует цикл $z \leq x + \delta_j$, $z_j = 1$, и, по лемме I, следует существование $j' \neq j$, для которого $y_{j'} = z_{j'} = 1$. Тогда $xy \neq 0$ для каждого коцикла y, что противоречит лемме 3.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы.

<u>Достаточность</u>. Раньше мы показали, что вектор x^m, построенный алгоритмом A_φ, является базой. Осталось доказать, что x^m – база минимального веса. Предположим противное. Тогда найдется база $\bar{x}$ матроида M такая, что $\bar{x} \neq x^m$, $c\bar{x} < cx^m$.

Пусть номер k такой, что $\bar{x}_{j_k} < x^k_{j_k}$, $\bar{x}_{j_i} \geq x^i_{j_i}$, $i < k$, где последовательность номеров $j_1, \dots, j_m$ и последовательность век-

торов $x^0, x^1, \dots, x^m$ строятся алгоритмом A_φ. Так как x^{k-1} – достижимый вектор, то по условию теоремы, $\varphi(x^{k-1})$ равно объединению некоторых коциклов. Заметим, что $\varphi(x^{k-1})_{j_k} \neq 0$. Тогда найдется коцикл y, $y_{j_k} = 1$.

По определению множества $\tilde{M}$, вектор $\bar{x} + \delta_{j_k} \notin M$, поэтому существует цикл z, $z \leq \bar{x} + \delta_{j_k}$, $z_{j_k} = 1$. По лемме I, найдется номер $j' \neq j_k$ такой, что $z_{j'} = y_{j'} = 1$. Тогда $\bar{x}_{j'} = 1$, $\varphi(x^{k-1})_{j'} \neq 0$ и, следовательно, $x_j^{k-1} = 0$. А так как $j' \neq j_k$, то и $x^k_{j'} = 0$.

Рассмотрим вектор $\bar{x}' = \bar{x} + \delta_{j_k} - \delta_{j'}$. Из следствия вытекает, что $\bar{x}' \in M$, кроме того, $I\bar{x}' = m$. Значит, $\bar{x}'$ – база. Так как $\varphi(x^{k-1})_{j'} \neq 0$, $\varphi(x^{k-1})_{j_k} \neq 0$, то $c_{j_k} \leq c_{j'}$ по выбору j_k. Отсюда $c\bar{x}' = c\bar{x} + c_{j_k} - c_{j'} \leq c\bar{x}$.

Повторяя шаг за шагом эту процедуру, на основании вышесказанного можно преобразовать $\bar{x}$ в x^m, причем вес преобразованной базы на каждом шаге не увеличивается. Следовательно, $cx^m \leq c\bar{x}$, и мы получаем требуемое противоречие.

<u>Необходимость</u>. Предположим, что для некоторого вектора $x' \in M \setminus \tilde{M}$, достижимого относительно φ, $\varphi(x)$ не равно объединению никаких коциклов матроида M. Покажем, что можно так задать вектор c, что алгоритм A_φ не будет строить базы минимального веса.

Заметим, что из нашего предположения следует существование такого $\tilde{j}$, что $\varphi(x')_{\tilde{j}} = 1$ и для каждого коцикла y с условием $y_{\tilde{j}} = 1$ выполнено соотношение $y \not\leq \varphi(x')$. В самом деле, если это не так, то для каждого j такого, что $\varphi(x')_j = 1$, существует коцикл $y(j)$ со свойствами:

1) $y(j)_j = 1$;
2) $y(j) \leq \varphi(x')$.

Рассмотрим вектор $\bar{y} = \bigcup\limits_{j/\varphi(x')_j = 1} y(j)$. Нетрудно заметить, что, с одной стороны, $\varphi(x') \leq \bar{y}$, с другой – $\bar{y} \leq \varphi(x')$. Отсюда $\varphi(x') = \bar{y}$, что противоречит нашему предположению.

Зададим вектор c следующим образом:

$$c_j = \begin{cases} 3, & \text{если } j = \tilde{j}, \\ 4, & \text{если } j \neq \tilde{j} \text{ и } \varphi(x')_j = 1, \\ 0, & \text{если } x'_j = 1. \\ 2 & \text{– для остальных } j. \end{cases}$$

Пусть $\tilde{x}$ – база, которую строит алгоритм A_φ. Легко заметить, что $c\bar{x}$ нечетное.

Зададим отображение φ' следующим образом:

$$\varphi'(x) = y(x) \quad \text{для} \quad x \in M \setminus \tilde{M},$$

где вектор $y(x)$ – коцикл такой, что из $y(x)_j = 1$ следует $x + \delta_j \in M$ (существование такого коцикла доказывает лемма 4):

$$\varphi'(x) = \varphi(x) \quad \text{для} \quad x \in \tilde{M}.$$

Заметим, что $\varphi' \in \Phi$.

Пусть $\hat{x}$ – база, которую строит алгоритм $A_{\varphi'}$. На основании доказанного выше, $\hat{x}$ – база минимального веса, причем $c\hat{x}$ четное.

Следовательно, $\min\limits_{x \in \tilde{M}} cx = c\hat{x} < c\bar{x}$ и алгоритм A_φ не строит базы минимального веса. Теорема полностью доказана.

Поступила в ред.-изд.отдел.
II сентября 1979 г.

Литература

I. Kraskal J.B.JR. On the shotest spanning subtree of a graph and traveling salesman problem.-Proc.Amer.Math.Soc.,1956,v.7,p.48.

2. Прим Р.К. Кратчайшие связывающие сети и некоторые обобщения. - Кибернетический сборник, I96I, вып.2, с. 23-34.

3. Rado R. Note on independence functions.- Proc. London Math. Soc., 1957, v.7, p.300-320.