Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1981 г., вып. 21.
УДК 519.8

РЕГУЛЯРНЫЕ ОТСЕЧЕНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

А.А.Колоколов

Пусть $\mathcal{M}$ - выпуклое многогранное множество в R^n, имеющее лексикографически максимальный элемент $\bar{x}$, причем $\bar{x} \bar{\in} Z^n$ (Z^n - множество всех n-мерных целочисленных векторов). Линейное неравенство $(\gamma, x) \leq \gamma_0$ называется правильным отсечением, если 1) $(\gamma,\bar{x}) > \gamma_0$; 2) $(\gamma, z) \leq \gamma_0$ для всех $z \in \mathcal{M} \cap Z^n$. Так как по первому из этих условий множество $\mathcal{M}$ изменяется слабо, то двойственные алгоритмы отсечения, относящиеся к целочисленному программированию (типа I-го алгоритма Гомори [8]) и основанные на правильных отсечениях, не всегда являются конечными [2-4, 6, 9].

В данной работе путем введения определенной меры отсечения в классе правильных отсечений выделяются линейные неравенства (регулярные отсечения), которые приводят к конечным алгоритмам. Изучаются процессы, связанные с регулярными отсечениями, условия их конечности, строится верхняя оценка числа итераций. Описание меры отсечения и основных результатов дается в терминах L-отрезков - классов эквивалентности, порождаемых в R^n лексикографическим порядком.

§ 1. L-отрезки

Определим отношение лексикографического порядка в R^n. Вектор x лексикографически больше вектора y, $x \succ y$, если $x \neq y$ и $x_p > y_p$ для $p = min\{i : x_i \neq y_i,\ i = 1,\dots,n\}$. Запись $x \succeq y$ означает, что либо $x \succ y$, либо $x = y$.

Будем говорить, что векторы x и y отделимы, если $x \neq y$ и найдется такой $z \in Z^n$, для которого выполняется одно из соотношений: либо $x \succeq z \succeq y$, либо $y \succeq z \succeq x$. Точку z назовем отделяющей. Если одна из точек x, y является целочисленной, то они, очевидно, отделимы.

Для исследования алгоритмов отсечения введем отношение эквивалентности L, порождаемое лексикографическим порядком. Будем говорить, что векторы x и y эквивалентны, если они не являются отделимыми. Отношение L разбивает любое множество Ω на непересекающиеся классы, которые будем называть L-отрезками множества Ω. Из определения следует, что любая целочисленная точка z образует отдельный L-отрезок, а остальные L-отрезки состоят только из нецелочисленных точек. Назовем L -отрезки второго типа дробными. Соответствующее фактор-множество будем обозначать Ω/L.

Установим некоторые свойства L -отрезков. Пусть $[\alpha]$ - наибольшее целое, не превышающее α; $]\alpha[$ - наименьшее целое, не меньшее α, $\alpha \in R$.

Утверждение 1. Любой дробный L -отрезок R^n представляет собой множество вида

$$V = \{x : x_i = a_i,\ i = 1,\dots,r-1,\ a_r < x_r < a_r + 1\},$$

где a_r, r - некоторые целые числа, причем $r \in \{1,\dots,n\}$.

Доказательство. Если x, $y \in V$, то они, очевидно, эквивалентны. Пусть $x' \bar{\in} V$. Покажем, что x' не эквивалентен любому $x \in V$. Если $x' \in Z^n$, то это так. Пусть $x' \bar{\in} Z^n$, $q = \min\{i : x'_i$ дробное, $i = 1,\dots,n\}$ и, для определенности, $x' \succ x$ для всех $x \in V$. Рассмотрим два случая:

1) $q \geq r$; тогда x' и любая точка из V отделяются вектором $[x'] = ([x'_1],\dots,[x'_n])$.

2) $q < r$; тогда x' и $x \in V$ отделяются точкой $]x[= (]x_1[,\dots,]x_n[)$.

Аналогично анализируется ситуация $x \succ x'$, $x \in V$. Утверждение доказано.

Таким образом, дробный L -отрезок R^n - это выпуклое множество специального строения размерности $n - r + 1$, а дробный L -отрезок множества Ω представляет собой пересечение Ω с некоторым L -отрезком типа V. Отметим, что если $V^1, V^2 \in \Omega/L$ и $x' \succ y'$ для некоторых $x' \in V^1$, $y' \in V^2$, то $x \succ y$ для всех $x \in V^1$, $y \in V^2$. В таком случае будем писать $V^1 \succ V^2$.

С L -отрезками тесно связаны лексикографически регулярные множества, введенные в [2]. Напомним, что множество $X \subset R^n$ является лексикографически регулярным, если любые два его элемента отделимы. Если взять по одному представителю из каждого L -отрезка Ω, то мы, очевидно, получим множество указанного типа. В [2] было показано, что такие множества являются дискретными. Отсюда, в частности, вытекает следующее

Утверждение 2. Если множество Ω ограничено, то Ω/L состоит из конечного числа элементов.

Это предложение можно доказать и непосредственно, погрузив Ω в параллелепипед $P = \{x : d \leq x \leq d'\}, d, d' \in Z^n$. Очевидно, что $|\Omega/L| \leq |P/L|$, а число дробных L -отрезков в P/L легко подсчитывается и равно $|P \cap Z^n| - 1$.

§ 2. Регулярные отсечения

Пусть Ω - выпуклое многогранное множество, имеющее лексикографически максимальный элемент $\bar{x}$, причем $\bar{x} \in Z^n$. Через $V_x(\Omega)$ обозначим L -отрезок множества Ω, содержащий данную точку x.

Правильное отсечение $(\gamma, x) \leq \gamma_0$ называется регулярным, если

$$(\gamma, x) > \gamma_0 \qquad \text{для всех} \qquad x \in V_{\bar{x}}(\Omega).$$

Таким образом, регулярное отсечение исключает не только $\bar{x}$, но и весь содержащий ее L-отрезок множества Ω.

Заметим, что регулярные отсечения имеются в группе отсечений первого алгоритма Гомори [5,7]. В [2] было установлено, что при определенных правилах построения отсечений соседние точки оптимизирующей последовательности, порождаемой этим алгоритмом, являются отделимыми. Это означает, что они принадлежат различным L-отрезкам и, следовательно, один из них после отсечения исключается. Если x' - последняя точка рассматриваемой последовательности, то после некоторого числа итераций лексикографического двойственного симплексного алгоритма мы либо получим оптимальное решение, либо установим отсутствие целочисленных точек в области. В обоих случаях, очевидно, L-отрезок, содержащий x', отсекается.

Нетрудно построить примеры множества Ω, у которых ни одна из $(n-1)$-мерных граней выпуклой оболочки допустимых целочисленных точек не порождает регулярное отсечение.

Рассмотрим следующую задачу целочисленной оптимизации: найти лексикографически максимальный элемент z^* множества $\mathcal{M} \cap Z^n$, т.е.

$$z^* = \operatorname{lex\,max}(\mathcal{M} \cap Z^n), \tag{/I/}$$

где $\mathcal{M} = \{x : Ax \leq b\}$, A - $(m \times n)$-матрица; b - m-вектор. Предположим, что $\mathcal{M}$ имеет лексикографически максимальный элемент $\bar{x}$, $\bar{x} \notin Z^n$. К такому виду легко приводится обычная задача целочисленного линейного программирования.

Опишем двойственный процесс отсечения для решения задачи /I/.

П р о ц е с с $\mathcal{D}$.

0) Полагаем $\mathcal{M}^{(1)} = \mathcal{M}$, $t = 1$.

1) Находим $x^t = \operatorname{lex\,max} \mathcal{M}^t$. Если либо $x^t \in Z^n$, либо $\mathcal{M}^{(t)} = \emptyset$, процесс заканчивается. В первом случае получено оптимальное решение задачи /I/, во втором - решения нет.

2) Заменяем $\mathcal{M}^{(t)}$ на $\bar{\mathcal{M}}^{(t)}$ путем исключения из текущей системы ограничений некоторых отсечений. При этом должно выполняться

$$x^{(t)} = \operatorname{lex\,max} \bar{\mathcal{M}}^{(t)}. \tag{/2/}$$

3) Строим правильное отсечение:

$$(\gamma^{(t)}, x) \leq \gamma_0^{(t)}.$$

4) Присоединяем полученное отсечение к ограничениям задачи, полагаем

$$\mathcal{M}^{(t+1)} = \bar{\mathcal{M}}^{(t)} \cap \{x : (\gamma^{(t)}, x) \leq \gamma_0^{(t)}\}, \quad t = t+1,$$

и переходим к шагу I.

Отметим некоторые свойства процесса $\mathcal{D}$. Поскольку в нем используются правильные отсечения, то для всех t имеет место $\mathcal{M} \cap Z^n \subset \mathcal{M}^{(t)}$. Условие /2/ гарантирует сохранение лексикографической монотонности процесса. Из-за отбрасывания отсечений монотонность по включению $\mathcal{M}^{(t+1)} \subset \mathcal{M}^{(t)}$ может не соблюдаться, но это на конечности процесса не отражается (она обеспечивается другими средствами), хотя и влияет на число итераций, выполняемых при решении задачи /I/. В дальнейшем мы рассмотрим соответствующий пример.

При исследовании процесса $\mathcal{D}$ наибольший интерес представляют те точки из $\mathcal{M}$, которые непременно должны быть отсечены, а именно:

$$\mathcal{M}_* = \{x : x \in \mathcal{M}, \quad x \succ z \qquad \text{для всех} \quad z \in \mathcal{M} \cap Z^n\}.$$

Из определения $\mathcal{M}_*$ следует, что в случае $\mathcal{M} \cap Z^n = \phi$ оно совпадает с $\mathcal{M}$. Множество $\mathcal{M}_*$ может быть неограниченным, а $\mathcal{M}_*/L$ - содержать бесконечное число элементов. В § 3 будут приведены примеры, показывающие, что задачи с подобными свойствами являются "плохими" для процесса $\mathcal{D}$ с точки зрения его конечности. Однако во многих практически важных ситуациях $\mathcal{M}_*$ оказывается ограниченным и, следовательно, $\mathcal{M}_*/L$ конечным (ввиду утверждения 2). Например, можно показать, что если выпуклое замкнутое множество из неотрицательного ортанта имеет лексикографически максимальный элемент, то оно ограничено.

Для исследования вопросов конечности и построения оценок числа итераций нам потребуется следующее

Утверждение 3. Если $x^{(t+1)} \bar{\in} Z^n$, а отсечение $(\gamma^{(t)}, x) \leq \gamma_0^{(t)}$ является регулярным, то точки $x^{(t)}$ и $x^{(t+1)}$ принадлежат различным L-отрезкам множества $\mathcal{M}_*$.

Доказательство. Пусть $x^{(t)} \in V$, $V \in \mathcal{M}_*/L$. В соответствии с процессом $\mathcal{D}$ имеем:

$$x^{(t)} = lex\ max\ \bar{\mathcal{M}}^{(t)},$$

$$x^{(t+1)} = lex\ max(\bar{\mathcal{M}}^{(t)} \cap \{x : (\gamma^{(t)}, x) \leq \gamma_0^{(t)}\}).$$

Отсечение регулярно, поэтому

$$(\gamma^{(t)}, x) > \gamma_0^{(t)} \qquad \text{для всех} \quad x \in V_{x^{(t)}}(\bar{\mathcal{M}}^{(t)}),$$

откуда

$$x^{(t+1)} \bar{\in} V_{x^{(t)}}(\bar{\mathcal{M}}^{(t)}). \qquad /3/$$

Представим $V_{x^{(t)}}(\bar{\mathcal{M}}^{(t)})$ в виде пересечения $V' \cap \bar{\mathcal{M}}^{(t)}$, где V' - L-отрезок R^n, содержащий $x^{(t)}$. Так как $x^{(t+1)} \in \bar{\mathcal{M}}^{(t)}$ и имеет место /3/, то $x^{(t+1)} \bar{\in} V'$. Но $V \subseteq V'$, следовательно, $x^{(t+1)} \bar{\in} V$, т.е. $x^{(t+1)}$ принадлежит некоторому L-отрезку $\tilde{V} \in \mathcal{M}_*/L$, причем $V \succ \tilde{V}$. Утверждение доказано.

Будем говорить, что процесс $\mathcal{D}$ является регулярным, если в нем используются только регулярные отсечения, и слабо регулярным, если для любого $x^{(t)} \in Z^n$ найдется такой номер $t' \geq t$, что $(\gamma^{(t)}, x) \leq \gamma_0^{(t')}$ – регулярное отсечение.

Т е о р е м а 1. Процесс $\mathcal{D}$ решает задачу /1/ с ограниченным $\mathcal{M}_*$ за конечное число итераций в том и только том случае, если он слабо регулярен.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим одну из возможных последовательностей приближений $S = \{x^{(t)}\}_{t \in T}$, $x^{(t)} \in Z^n$ (T – либо отрезок натурального ряда от 1 до τ, либо весь натуральный ряд), порождаемую слабо регулярным процессом $\mathcal{D}$. Так как $\mathcal{M}_*$ ограничено, то $\mathcal{M}_*/L$ конечно и может быть записано в виде

$$\mathcal{M}_*/L = \{V^1, \dots, V^s\},$$

где $V^i \succ V^{i+1}, i = 1, \dots, s-1$. Поскольку все x^t принадлежат $\mathcal{M}_*$, то для обоснования конечности S достаточно показать, что любой V^i содержит лишь конечное число членов последовательности S. Предположим, что это не так. Тогда ввиду лексикографической монотонности $\mathcal{D}$ найдется номер t', начиная с которого все члены последовательности S будут принадлежать некоторому L-отрезку V^{i_0}. Из слабой регулярности $\mathcal{D}$ вытекает, что через конечное число итераций после t' найдется номер t'' такой, что $x^{(t'')} \in V^{i_0}$, а отсечение $(\gamma^{(t'')}, x) \leq \gamma_0^{(t'')}$ регулярно. Применяя утверждение 3, получаем, что $x^{(t''+1)} \bar{\in} V^{i_0}$, т.е. $x^{(t''+1)} \in V^{i_1}, i_1 > i_0$. Противоречие указывает на то, что последовательность S конечна.

Вторая часть теоремы следует из замечания о том, что в любом конечном процессе $\mathcal{D}$ последнее отсечение всегда является регулярным. Теорема доказана.

Пусть $\mathcal{I}(\mathcal{M})$ – максимальное число отсечений, используемых регулярным процессом $\mathcal{D}$ при решении задачи /1/ с ограниченным $\mathcal{M}_*$.

Т е о р е м а 2. Для регулярного процесса $\mathcal{D}$ и задачи /1/ с ограниченным множеством $\mathcal{M}_*$ имеет место оценка

$$\mathcal{I}(\mathcal{M}) \leq |\mathcal{M}_*/L|. \qquad /4/$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим одну из возможных последовательностей приближений $S = \{x^{(t)}\}_{t \in T}$, $x^{(t)} \in Z^n$, порождаемую регулярным процессом $\mathcal{D}$ при решении задачи /1/. Так как $\mathcal{M}_*$ ограничено, то $\mathcal{M}_*/L = \{V^1, \dots, V^s\}$, где $V^i \succ V^{i+1}, i = 1, \dots, s-1$. Для получения оценки /4/, очевидно, достаточно установить, что любой L-отрезок V^i содержит не более одного члена последовательности S.

Действительно, пусть $x^{(k)} \in V^{i_0}$ и в S имеется $x^{(k+1)}$. Так как процесс $\mathcal{D}$ является регулярным, то к $x^{(k)}$, $x^{(k+1)}$ и отсечению $(\gamma^{(k)}, x) \leq \gamma_0^{(k)}$ можно применить утверждение 3. Следовательно, $x^{(k+1)} \in V^{i_1}$, $i_1 > i_0$. Теорема доказана.

Таким образом, каждое регулярное отсечение исключает из $\mathcal{M}_*/L$ по крайней мере один L-отрезок V^i. Поэтому можно заключить, что $|\mathcal{M}_*^{(t)}/L| \leq s-t+1$ для итерации t, где $\mathcal{M}_*^{(t)} = \mathcal{M}_* \cap \mathcal{M}^{(t)}$. Заметим, однако, что число элементов в $\mathcal{M}_*^{(t)}/L$ может изменяться немонотонно от итерации к итерации из-за отбрасывания некоторых отсечений.

В связи с оценкой /4/ представляет интерес исследование фактор-множества $\mathcal{M}/L$ для различных классов задач целочисленного программирования [I].

§ 3. Примеры

Рассмотрим процесс отсечения L-отрезков на ряде примеров.

Пример I. Область $\mathcal{M}$ задается системой ограничений: $-x_1+3x_2 \leq 1,\ 2x_1-2x_2 \leq 1,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$. Очевидно, что

$$z^* = (0,0),\ \mathcal{M}_* = \mathcal{M} \setminus \{z^*\},\ \mathcal{M}_*/L = \{V^1, V^2, V^3, V^4\},$$

где

$$V^1 = \{x:\ 1 < x_1 < 2\} \cap \mathcal{M},$$

$$V^2 = \{x:\ x_1 = 1,\ 0 < x_2 < 1\} \cap \mathcal{M},$$

$$V^3 = \{x:\ 0 < x_1 < 1\} \cap \mathcal{M},$$

$$V^4 = \{x:\ x_1 = 0,\ 0 < x_2 < 1\} \cap \mathcal{M}.$$

Сначала найдем z^* процессом $\mathcal{D}$ без исключения накапливаемых отсечений. Положим $\mathcal{M}^{(1)} = \mathcal{M},\ V_{(1)}^i = V^i,\ i = 1,\dots,4$.

<u>I-я итерация</u>. Находим $x^{(1)} = \operatorname{lex\,max} \mathcal{M}^{(1)}$, $x^{(1)} = (5/4,\ 3/4)$. Так как $x^{(1)} \notin Z^2$, то вводим отсечение $\Gamma^{(1)}:\ -x_1 + 2x_2 \leq 0$.

<u>2-я итерация</u>. Определяем $x^{(2)} = \operatorname{lex\,max} \mathcal{M}^{(2)}$, $x^{(2)} = (1,\ 1/2)$. Множество $\mathcal{M}_*^{(2)}/L$ состоит из двух элементов: $V_{(2)}^2$, $V_{(2)}^3$, причем $V_{(2)}^2 \subset V_{(1)}^2$, $V_{(2)}^3 \subset V_{(1)}^3$; L-отрезки $V_{(1)}^1$, $V_{(1)}^4$ оказались отсеченными. Вводим отсечение $\Gamma^{(2)}:\ 3x_1 + x_2 \leq 1$.

<u>3-я итерация</u>. Находим $x^{(3)} = \operatorname{lex\,max} \mathcal{M}^{(3)}$, $x^{(3)} = (1/3,\ 0)$. Очевидно, что $\mathcal{M}_*^{(3)}/L = \{V_{(3)}^3\}$, $V_{(3)}^3 \subset V_{(2)}^3$. Вводим отсечение $\Gamma^{(3)}:\ x_1 \leq 0$.

<u>4-я итерация</u>. Так как $x^4 = z^*$, то процесс завершается. Легко проверить, что все введенные отсечения регулярны. На этом примере видно, что исключение L-отрезков может происходить немонотонно, т.е. вместе с V^k возможно отсечение V^e $(e > k+1)$, а промежуточные L-отрезки остаются (см. итерацию I). Теперь решим эту задачу вариантом процесса $\mathcal{D}$, в котором после построения $\Gamma^{(2)}$ отсечение $\Gamma^{(1)}$ исключается из рассмотрения. В этом случае, начиная с третьей итерации, процесс пойдет следующим образом.

<u>3-я итерация</u>. Находим $\hat{x}^{(3)} = \operatorname{lex\,max} \hat{\mathcal{M}}^{(3)}$, где $\hat{\mathcal{M}}^{(3)} = \mathcal{M}^{(1)} \cap \{x: 3x_1 + x_2 \leq 1\}$, $\hat{x}^{(3)}$ совпадает с $x^{(3)}$. Из-за исключения $\Gamma^{(1)}$ восстанавливается L-отрезок $V_{(1)}^4$, поэтому $\hat{\mathcal{M}}_*^{(3)}/L$, в отличие от $\mathcal{M}_*^{(3)}/L$, состоит из двух элементов: $\hat{V}_{(3)}^3 \subset V_{(1)}^3$, $\hat{V}_{(3)}^4 = V_{(1)}^4$. Строим отсечение $\Gamma^{(3)}$.

4-я итерация. Находим $\hat{x}^{(4)} = \mathrm{lexmax}\,\hat{\mathcal{M}}^{(4)}$, где $\hat{\mathcal{M}}^{(4)} = \hat{\mathcal{M}}^{(3)} \cap \{x : x_1 \le 0\}$. Очевидно, что $\hat{\mathcal{M}}^{(4)}_*/L$ содержит только один L-отрезок $\hat{V}^4_{(4)} = V^4_{(1)}$. Присоединяем регулярное отсечение $\Gamma^{(4)} : x_2 \le 0$.

5-я итерация. Так как $\hat{x}^{(5)} = x^*$, то процесс заканчивается.

Таким образом, исключение отсечения $\Gamma^{(1)}$ привело к увеличению числа итераций. Но поскольку $|\mathcal{M}_*/L| = 4$, то верхняя оценка достигнута и дальнейшее увеличение числа итераций для данного примера невозможно: любой регулярный процесс $\mathcal{D}$ использует для его решения не более четырех отсечений. Из примера видно, что процесс отсечения L-отрезков может происходить медленно, т.е. по одному на каждое отсечение.

Ниже мы рассмотрим примеры задач /I/ с неограниченным $\mathcal{M}_*$, для которых регулярный процесс $\mathcal{D}$ может оказаться бесконечным.

Пример 2. Пусть $\mathcal{M} = \{x : x_1 \le 1, 2x_2 = 1\}$. Очевидно, что $\mathcal{M}_* = \mathcal{M}$ и процесс $\mathcal{D}$, определяемый отсечениями $x_1 \le 1 - t$, $t = 1, 2, \ldots$, порождает бесконечную последовательность $x^{(t)} = (2 - t, 1/2)$.

Пример 3. Рассмотрим задачу /I/ в R^3, у которой имеется x^*. Пусть $\mathcal{M} = \{x : x_1 - 2x_3 = 0, 0 \le x_1 \le 1, x_2 \le 0\}$. Легко проверить, что $x^{(1)} = (1, 0, 1/2)$, $x^* = (0,0,0)$. Исследуем последовательность отсечений $K \cdot x_1 + x_2 \le 0$, $K = 1, 2, \ldots$. Любая целочисленная точка из $\mathcal{M}$ имеет вид $x_1 = 0$, $x_2 = -d$, $x_3 = 0$, где $d = 0, 1, 2, \ldots$. Подставляя $(0, -d, 0)$ в неравенство $Kx_1 + x_2 \le 0$, получаем $-d \le 0$, т.е. оно не отсекает целочисленных точек из $\mathcal{M}$. Построим теперь точки $x^{(t)}$:

$$x^{(t)} = \mathrm{lexmax}\{x : x_1 + x_2 \le 0, 2x_1 + x_2 \le 0, \ldots, (t-1)x_1 + x_2 \le 0, x \in \mathcal{M}\}, \quad t = 2, 3, \ldots .$$

Они имеют вид

$$x^{(2)} = (1, -1, 1/2),\ x^{(3)} = (1, -2, 1/2), \ldots, x^{(t)} = (1, 1-t, 1/2)$$

и, очевидно, принадлежат различным L-отрезкам. Следовательно, данные отсечения определяют регулярный процесс $\mathcal{D}$. Однако последовательность $\{x^{(t)}\}$, $t = 1, 2, \ldots$, бесконечна.

Это свойство процесса $\mathcal{D}$ объясняет, в частности, почему для конечности первого алгоритма Гомори на задачу целочисленного программирования накладывается ограничение: либо существует оптимальная целочисленная точка, либо целевая функция ограничена снизу на многогранном множестве задачи. В [2] было показано, что в таком случае последовательность приближений содержится в ограниченной области.

В заключение рассмотрим вопрос об упорядочении переменных задачи /I/. Сначала проанализируем пример I.

Изменим порядок переменных x_1, x_2 и положим $y_1 = x_2$, $y_2 = x_1$. Тогда

$$\tilde{\mathcal{M}} = \{y : 3y_1 - y_2 \le 1, -2y_1 + 2y_2 \le 1, y_1, y_2 \ge 0\}, \tilde{\mathcal{M}}_*/L = \{\tilde{V}^1, \tilde{V}^2\},$$

где $\tilde{V}^1 = \{y : 0 < y_1 < 1\} \cap \tilde{\mathcal{M}}$, $\tilde{V}^2 = \{y : y_1 = 0, 0 < y_2 < 1\} \cap \tilde{\mathcal{M}}$.

Таким образом, для решения задачи /I/ на $\tilde{\mathcal{M}}$ потребуется не более 2(вместо 4) регулярных отсечений. В задаче из примера 3 переупорядочим переменные следующим образом: $y_1 = x_2,\ y_2 = x_3,\ y_3 = x_1$. Тогда

$$\tilde{\mathcal{M}} = \{y : -2y_2 + y_3 = 0,\ 0 \le y_3 \le 1,\ y_1 \le 0\},$$

$$y^{(1)} = (0, 1/2, 1),\quad \tilde{\mathcal{M}}_*/L = \{\tilde{V}^1\},\ \tilde{V}^1 = \{y : y_1 = 0,\ 0 < y_2 < 1\} \cap \tilde{\mathcal{M}}.$$

Таким образом, $|\tilde{\mathcal{M}}_* / L| = 1$, и задача решается одним регулярным отсечением. Аналогичный результат получается для примера 2.

Зависимость $|\mathcal{M}_* / L|$ от порядка нумерации переменных задачи объясняет чувствительность двойственных алгоритмов отсечения к подобным изменениям исходных данных, обнаруженную в вычислительных экспериментах [3, 7], и намечает путь для дальнейшего исследования этого вопроса.

Поступила в ред.-изд.отдел
20 октября 1980 г.

Литература

1. Колоколов А.А. О лексикографической структуре некоторых выпуклых многогранных множеств.- Тез. докл. 5-я Всесоюз. конф. по проблемам теоретической кибернетики. Новосибирск, 1980, с. 77-79.

2. Колоколов А.А. О числе отсекающих плоскостей в первом алгоритме Гомори.- В кн.: Проблемы анализа дискретной информации. Ч. I. Новосибирск, 1975, с. 84-96.

3. Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. Дискретное программирование.- М.: Наука, 1969. -368 с.

4. Фридман А.А., Вотяков А.А. Регулярные дискретные задачи и метод отсечения.- В кн.: Исследования по дискретной оптимизации.- М.: Наука, 1976, с. 19-50.

5. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях.- М.: Мир, 1974.-519 с.

6. Шевченко В.Н. Выпуклые многогранные конусы, системы сравнений и правильные отсечения в целочисленном программировании.- В кн.: Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике. Горький, ГГУ, 1979, с. 109-119.

7. Balinski M.L. Integer programming: methods, uses, computation.-Manag. Science, 1965, 12, N 3, p.253-313.

8. Gomory R.E. Outline of an algorithm for integer solution to linear programs.-Bull. Amer. Math. Soc., 1958, 64, N 5, p. 275-278.

9. Gomory R.E., Hoffman A.J. On the convergence of an integer programming process.-Naval Res. Log. Quart., 1963, 10, N 2, p. 121-123.