Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1981 г., вып. 21.
УДК 519.854.3

АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ВЫБОРА ОБОРУДОВАНИЯ

А.С.Кузнецов

Неформальное описание алгоритма $\mathcal{D}$. В [1] рассматривалась задача выбора оборудования многоразового использования в следующей математической постановке:

$$F(x,y)=\sum_{i\in M} c_i y_i+\sum_{i\in M}\sum_{j\in N}\sum_{t\in P} g_{ij}^t x_{ij}^t \longrightarrow \min_{(y_i)\,(x_{ij}^t)} \qquad /1/$$

при ограничениях:

$$\sum_{j\in M} x_{ij}^t = 1, \quad j\in N, \ t\in P; \qquad /2/$$

$$\sum_{j\in N} x_{ij}^t \le y_i, \quad i\in M, \ t\in P; \qquad /3/$$

$$x_{ij}^t \ge 0, \quad i\in M, \ j\in N, \ t\in P; \qquad /4/$$

$$x_{ij}^t \quad \text{- целые.} \qquad /5/$$

Там же приводится описание алгоритма $\mathcal{A}$, позволяющего находить приближенное решение данной задачи. Возникает необходимость определения оценки точности получаемого решения. Эта оценка может быть получена с помощью двойственной задачи к /1/ - /4/:

$$\Phi(u)=\sum_{j\in N}\sum_{t\in P}\min_{i\in M}\,(g_{ij}^t+u_{it}) \longrightarrow \max_{(u_{it})}; \qquad /6/$$

$$\sum_{t\in P} u_{it} \le c_i, \quad i\in M; \qquad /7/$$

$$u_{it} \ge 0, \quad i\in M, \ t\in P. \qquad /8/$$

В качестве приближенного решения задачи /6/ - /8/ можно использовать решение (u_i), полученное с помощью алгоритма $\mathcal{A}$. Однако, как показали результаты численных расчетов, оценка оказы-

вается более точной, если для решения задачи /6/ - /8/ применить идею групповой оптимизации. В алгоритме $\mathcal{D}$, использующем эту идею, обобщается метод, описанный в [2].

Алгоритм $\mathcal{D}$ представляет собой вычислительный процесс, на каждой итерации которого значение функции $\Phi(u)$ увеличивается за счет изменения значений только одной группы переменных u_{it}, $i \in M$, с некоторым фиксированным номером $t' \in P$, при котором достигается максимум отношения приращения целевой функции задачи /6/ - /8/ к суммарному приращению аргументов, т.е. для определения номера используется критерий

$$\max_{\{\Delta u_{it}\}_{i=1}^{m}} \frac{\Phi(u+\Delta u)-\Phi(u)}{\sum\limits_{i \in M} \Delta u_{it}} \longrightarrow \max_{t \in P} \qquad /9/$$

при условиях:

$$0 \le \Delta u_{it} \le c_i - \sum_{\tau \in P} u_{i\tau}, \quad \sum_{i \in M} \Delta u_{it} > 0.$$

Рассмотрим отношение

$$\frac{\Delta \Phi_t^{(K)}}{\sum\limits_i \Delta u_{it}^{(K)}} = \frac{\sum\limits_{j \in N} \min\limits_{i \in M} (g_{ij}^t + u_{it}^{(K-1)} + \Delta u_{it}^{(K)}) - \sum\limits_{j \in N} v_{jt}^{(K-1)}}{\sum\limits_i \Delta u_{it}^{(K)}},$$

где K - номер итераций, $v_{jt}^{(K)} = \min\limits_{i \in M} (g_{ij}^t + u_{it}^{(K)})$.

Условимся, что на каждой итерации Δu_{it} будут принимать только два значения:

$$\Delta u_{it}^{(K)} = \begin{cases} d_t^{(K)}, & \text{если } i \in \mathcal{M}_t^{(K)}, \text{ причем } d_t^{(K)} \text{ заранее не определено;} \\ 0, & \text{если } i \in M \setminus \mathcal{M}_t^{(K)}, \end{cases}$$

где $\mathcal{M}_t^K$ - некоторое подмножество множества M.

Обозначим

$$\alpha_{ijt}^{(K)} = \begin{cases} 0, & \text{если } g_{ij}^t + u_{it}^{(K)} = v_{jt}^{(K)}, \\ 1 & \text{- в противном случае;} \end{cases}$$

$$z_{it}^{(K)} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in \mathcal{M}_t^{(K)}, \\ 0 & \text{- в противном случае;} \end{cases}$$

и введем множества $J_{jt}^{(K)} = \{ i \,/\, \alpha_{ijt}^{(K)} = 0 \}$.

Определение I. Множество $\mathcal{M}_t^{(K)}$ покрывает столбец j, если $J_{jt}^{(K-1)} \subseteq \mathcal{M}_t^{(K)}$.

Очевидно следующее

Утверждение I. Столбец j покрывается множеством $\mathcal{M}_t^{(K)}$, если $\min\limits_{i \in M \setminus \mathcal{M}_t^{(K)}} \alpha_{ijt}^{(K-1)} = 1$, и не покрывается, если данный минимум равен 0.

Отсюда

$$v_{jt}^{(\kappa)} = \begin{cases} v_{jt}^{(\kappa-1)} + d_t^{(\kappa)}, & \text{если} \quad \min\limits_{i\in M} (d_{ijt}^{(\kappa-1)} + z_{it}^{(\kappa)}) = 1, \\ v_{jt}^{(\kappa-1)}, & \text{если} \quad \min\limits_{i\in M} (d_{ijt}^{(\kappa-1)} + z_{it}^{(\kappa)}) = 0. \end{cases}$$

С учетом сказанного имеем

$$\frac{\Delta \Phi_t^{(\kappa)}}{\sum\limits_{i\in M} \Delta u_{it}^{(\kappa)}} = \frac{\sum\limits_{j\in N} \left(v_{jt}^{(\kappa)} - v_{jt}^{(\kappa-1)}\right)}{\sum\limits_{i\in M} d_t^{(\kappa)} z_{it}^{(\kappa)}} = \frac{\sum\limits_{j\in N} \min\limits_{i\in M} \left(d_{ijt}^{(\kappa-1)} + z_{it}^{(\kappa)}\right)}{\sum\limits_{i\in M} z_{it}^{(\kappa)}},$$

и критерий /9/ можно записать в виде

$$\max_{\ell_t^{(\kappa)}\in M} \frac{\max\left\{\sum\limits_{j\in N} \min\limits_{i\in M} \left(d_{ijt}^{(\kappa-1)} + z_{it}^{(\kappa)}\right) \Big/ \sum\limits_{i\in M} z_{it}^{(\kappa)} = \ell_t^{(\kappa)}\right\}}{\ell_t^{(\kappa)}} \longrightarrow \max_{t\in P}.$$

Таким образом, задача выбора номера t' свелась к задаче поиска такого подмножества $\mathcal{M}_{t'} \subset M$, при котором увеличением значений переменных $u_{it'}$, $i \in \mathcal{M}_{t'}$, достигается максимальное отношение числа покрытых столбцов к числу элементов множества $\mathcal{M}_{t'}$. Опуская индексы t и K, рассмотрим задачу $P(\ell)$:

$$S^{\ell}(z) = \sum_{j\in N} \min_{i\in M} (d_{ij} + z_i) \longrightarrow \max_{(z_i)};$$

$$\sum_{i\in M} z_i = \ell;$$

$$z_i \in \{0,1\}, \quad i \in M.$$

Пусть имеется точное или приближенное решение задачи $P(\ell+1)$, т.е. из множества M выделено некоторое подмножество $\mathcal{M}^{\ell+1}$ мощности $\ell+1$, покрывающее некоторое число $S^{\ell+1}$ столбцов матрицы (d_{ij}). Требуется найти множество $\mathcal{M}^{\ell}$ мощности ℓ, покрывающее возможно бо́льшее число столбцов.

Исключив из множества $\mathcal{M}^{\ell+1}$ тот номер i_ℓ, удаление которого приводит к наименьшему отклонению S^{ℓ} от значения $S^{\ell+1}$, мы получим множество $\mathcal{M}^{\ell}$ и вместе с тем приближенное решение (z_i) задачи $P(\ell)$ (z_i равно I, если $i \in \mathcal{M}^{\ell}$ и, 0 - в противном случае).

<u>Формальное описание алгоритма решения последовательности задач</u> $P(\ell)$, $\ell \in M$. В начале работы алгоритма положим $\mathcal{M} = M$, $\mathcal{N} = N$, $S = |N| = n$, $a_i = \sum\limits_{j\in N} (1 - d_{ij})$ (для простоты номер итерации опускаем, $\mathcal{N}$ - множество столбцов матрицы (d_{ij}), покрываемых множеством $\mathcal{M}$, $|N|$ - мощность множества N).

Итерация $K \geq$ I. Пусть $a_{i_0} = \min\limits_{i\in \mathcal{M}} a_i$ и $J_0 = \{j \,/\, d_{i_0 j} = 0, j \in \mathcal{N}\}$. Положим $\mathcal{M} := \mathcal{M} \setminus \{i_0\}$, $\mathcal{N} := \mathcal{N} \setminus J_0$ и вычислим новые

значения a_i $(i \in \mathcal{M})$ и S по формулам:

$$S := S - a_{i_0}\,, \quad a_i := a_i - \sum_{j\in J_0} (1-\alpha_{ij})\,.$$

Если $K < m-1$, то перейдем к следующей итерации.

Трудоемкость данного алгоритма оценивается величиной $O(m^2 + mn)$, где $m = |M|$.

Итак, пусть для всех номеров t получены множества $\mathcal{M}_t$ такие, что $\dfrac{\sum\limits_{j\in N} \min\limits_{i\in M\setminus \mathcal{M}_t} \alpha_{ijt}}{|\mathcal{M}_t|} = \max\limits_{r\in M} \dfrac{S_t^r}{r} = R_t$, и определен номер t', для которого $R_{t'} = \max\limits_{t\in P} R_t$. Значение d определим по формуле

$$d = \min\left\{\min_{i\in \mathcal{M}_{t'}} \left(c_i - \sum_{t\in P} u_{it}\right);\ \min_{j\in \mathcal{N}_{t'}}\ \min_{i\in M\setminus \mathcal{M}_{t'}} \left(g_{ij}^{t'} + u_{it'} - v_{jt'}\right)\right\} \quad /10/$$

Предположим, что для некоторой пары (i_0, j_0) в результате увеличения значений $u_{it'}$, $i \in \mathcal{M}_{t'}$, и $v_{jt'}$, $j \in \mathcal{N}_{t'}$ на величину d выполняются соотношения

$$\sum_{t\in P} u_{i_0 t} = c_{i_0} \quad \text{и} \quad g_{i_0 j_0}^{t'} + u_{i_0 t'} = v_{j_0 t'}. \qquad /11/$$

Определение 2. Значение $v_{j_0 t'}$ является тупиковым, если существует номер $i_0 \in M$ такой, что выполняются соотношения /11/.

Утверждение 2. Если для некоторой пары (j, t) получено тупиковое значение v_{jt}, то его увеличение приводит к нарушению условия /7/.

Действительно, значение v_{jt} может быть увеличено только в том случае, если на некоторую величину $d > 0$ одновременно будут увеличены значения u_{it} для номеров $i \in \{r \mid g_{ij}^t + u_{rt} = v_{jt}\}$. Однако, по определению 2, существует некоторый номер i_0, принадлежащий указанному множеству, такой, что $\sum\limits_{t\in P} u_{i_0 t} = c_{i_0}$. Увеличение $u_{i_0 t}$ на $d > 0$ приводит к нарушению условий задачи /6/–/8/, т.е. значения $u_{i_0 t}$, а следовательно, и v_{jt} не могут быть увеличены.

Отсюда вытекает условие окончания работы алгоритма: если для всех пар (j, t) получены тупиковые значения v_{jt} (такое решение назовем тупиковым), то алгоритм $\mathcal{D}$ заканчивает свою работу.

Теорема. Для того чтобы алгоритм $\mathcal{D}$ был конечным, достаточно, чтобы на каждой итерации множества $\mathcal{M}_{t'}$ включали в себя только те номера i, для которых $\sum\limits_{t\in P} u_{it} < c_i$.

Доказательство. Пусть

$$\mathcal{M}_{t'} \subseteq \{i \mid \sum_t u_{it} < c_i\}\,.$$

Тогда, очевидно,

$$\min_{i\in \mathcal{M}_{t'}} (c_i - \sum_t u_{it}) > 0 .$$

Покажем, что в этом случае

$$\min_{j\in \mathcal{N}_{t'}} \min_{i\in M\setminus \mathcal{M}_{t'}} (g_{ij}^{t'} + u_{it'} - v_{jt'}) > 0 .$$

Действительно, $\mathcal{N}_{t'}$ - множество столбцов j матрицы $(d_{ijt'})$, покрываемых множеством $\mathcal{M}_{t'}$, т.е. для всякого $j\in \mathcal{N}_{t'}$ выполняется включение $\{i/g_{ij}^{t'} + u_{it'} = v_{jt'}\} \subseteq \mathcal{M}_{t'}$, следовательно, $g_{ij}^{t'} + u_{it'} > v_{jt'}$ для $i\in M\setminus \mathcal{M}_{t'}$. Отсюда получаем доказываемое. Таким образом, на каждой итерации величины u_{it} изменяются на некоторое $d>0$, что и обеспечивает конечность алгоритма.

Формальное описание алгоритма $\mathcal{D}$. Введем обозначения:

$$\mathcal{J} = \{i \mid \sum_{t\in P} u_{it} < c_i\},$$

$Q_t = \{j/v_{jt} < w_{jt}\}$ - множество номеров j, для которых еще не получены тупиковые значения v_{jt}, $w_{jt} = \min_{i\in M\setminus \mathcal{J}} (g_{ij}^t + u_{it})$;

$\mathcal{P}$ - множество номеров t, для которых должны быть определены множества $\mathcal{M}_t$.

В начале работы алгоритма положим

$$\mathcal{J} := M,\ \mathcal{P} := P,\ Q_t := N,\ w_{jt} := \infty,$$

$$v_{jt} := \min_{i\in M} g_{ij}^t,\ u_{it} := 0,\ \bar{c}_i := c_i .$$

I) Для всех номеров $t\in \mathcal{P}$ определим множества $\mathcal{M}_t \subseteq \mathcal{J}$, $\mathcal{M}_t \neq M$.

2) Найдем номер

$$t / R_t = \max_{\kappa/Q_\kappa \neq \emptyset} R_\kappa .$$

3) Вычислим

$$d = \min\left\{\min_{i\in \mathcal{M}_t} \bar{c}_i,\ \min_{j\in \mathcal{N}_t} \min_{i\in M\setminus \mathcal{M}_t} (g_{ij}^t + u_{it} - v_{jt})\right\}.$$

4) Увеличим на d значения v_{jt} $(j\in \mathcal{N}_t)$ и u_{it} $(i\in \mathcal{M}_t)$; $\bar{c}_i$ при $i\in \mathcal{M}_t$ уменьшим на d.

5) Если $\bar{c}_i > 0$, $i\in \mathcal{M}$, то положим $\mathcal{P} = \{t\}$ и перейдем к п. IO.

6) Пусть $\bar{c}_{i'} = 0$ для некоторого номера $i'\in \mathcal{M}_t$. Если $w_{j\kappa} > g_{i'j}^\kappa + u_{i'\kappa}$ $(\kappa/Q_\kappa \neq \emptyset,\ j\in Q_\kappa)$, то положим $w_{j\kappa} := g_{i'j}^\kappa + u_{i'\kappa}$.

7) Если $v_{j\kappa} = w_{j\kappa}$, $\kappa/Q_\kappa \neq \emptyset$, $j\in Q_\kappa$, то исключим из Q_κ номер j.

8) Если $Q_t = \phi\ (t \in P)$, то полученное решение является тупиковым.

9) Положим $\mathcal{P} = \{K / i' \in \mathcal{M}_K, Q_K \neq \phi\}$, исключим из $\mathcal{J}$ номер i' и перейдем к п. I.

I0) Если $\mathcal{J} = M$, то перейдем к п. I.

II) Исключим из Q_t все номера j, для которых $v_{jt} = w_{jt}$.

I2) Если $Q_t \neq \phi$, то перейдем к п. I.

I3) Если $Q_K \neq \phi$ для некоторого $K \in P$, то перейдем к п. 2, в противном случае алгоритм $\mathcal{D}$ заканчивает свою работу.

Трудоемкость алгоритма. Как уже указывалось, для получения одного множества $\mathcal{M}_t$, максимизирующего отношение числа покрытых столбцов матрицы (α_{ijt}) к мощности этого множества, требуется $O(m^2 + mn)$ действий. В процессе работы алгоритма может быть не более $(m+1)$ итераций, когда множества $\mathcal{M}_t$ определяются более чем для одного значения $t \in P$.

Действительно, такая ситуация возникает на первой итерации и на тех, когда появляется некоторый новый номер $i' \in M$, для которого $\sum\limits_t u_{i't} = c_{i'}$. А так как $|M| = m$, то таких итераций может быть не более m. Таким образом, для указанных итераций оценка трудоемкости составляет $O((m+n)\, m^2 p)$ операций, где $p = |P|$.

Если через C обозначить общее число итераций (вообще говоря, C зависит от c_i и g_{ij}^t), то трудоемкость всех оставшихся итераций оценится величиной порядка $C_0 (m^2 + mn + p)$, где $C_0 = C - m$. Следовательно, число операций, затрачиваемых на получение тупикового решения, составляет величину порядка

$$(m+n)\, m^2 p + C_0 (m^2 + mn + p).$$

Вычислительный опыт. Численные примеры решались на ЭВМ БЭСМ-6 в системе АЛЬФА-6. Основная проверка алгоритмов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{D}$ осуществлялась на задачах размерности $(m \times n \times p) = (15 \times 40 \times 10)$. Значения g_{ij}^t и c_i генерировались случайным образом из интервалов (0,I00) и (I0, $\bar{C}$) соответственно. Для $\bar{C}$ задавались значения I00 и I50, и соответственно для каждого решалось по 25 задач. Оценка погрешности $\mathcal{E}$ решений (x, y) и u, полученных с помощью алгоритмов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{D}$, вычислялась по формуле

$$\mathcal{E} = \frac{F(x, y) - \Phi(u)}{\Phi(u)}.$$

Численные эксперименты показали, что более точное решение задачи /6/ - /8/ получается, если в качестве начального приближения для алгоритма $\mathcal{D}$ брать значения u_{it}, полученные в результате работы алгоритма $\mathcal{A}$. Тогда для указанных двух классов задач максимальная оценка погрешности $\mathcal{E}$ равна 0,0I23; в 47 случаях (из 50) $\mathcal{E} < 0{,}0I$, т.е. доля случаев, в которых относительное отклонение результата работы алгоритма $\mathcal{A}$ от оптимума (по функционалу) не превысит 0,0I, равна 0,94.

Среднее время работы алгоритма $\mathcal{A}$ для указанных задач составило 8,2 сек., алгоритма $\mathcal{D}$ при нулевом начальном приближении – 13,6 сек. Среднее время совместной работы алгоритмов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{D}$ (результат алгоритма $\mathcal{A}$ используется в качестве начального приближения для $\mathcal{D}$) – 12,4 сек.

Поступила в ред.-изд.отдел
30 ноября 1979 г.

Литература

1. Кузнецов А.С. Задача выбора оборудования многоразового использования. – Управляемые системы, 1978, вып. 19, с. 40–50.

2. Гимади Э.Х. и др. Об одном методе построения нижней оценки и приближенного решения с апостериорной оценкой точности для задачи стандартизации. – Управляемые системы, 1974, вып. 13, с. 26–31.