Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1981 г., вып. 21

УДК 519.854.2

НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ ЗАДАЧИ ДЖОНСОНА

С.В.Севастьянов

Рассмотрим несколько постановок задач теории расписаний, являющихся обобщениями задачи Джонсона. Для каждой из них характерно следующее:

а) для заданной совокупности деталей $\{1,2,\dots,n\}$ требуется найти расписание их обработки на заданной совокупности станков $\{1,2,\dots,m\}$;

б) для каждой детали j задан технологический маршрут, или упорядоченная совокупность станков $\pi^j=\{\pi^j(1),\dots,\pi^j(n_j)\}$, на которых деталь должна пройти обработку, где все числа $\pi^j(i)\in\{1,\dots,m\}$ различны;

в) задана матрица (a_{ij}), $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, длительностей обработки деталей на станках;

г) под расписанием понимается множество $P=\{\mathcal{U}_{ij},\ j=\overline{1,n},\ i\in\pi^j\}$, где $\mathcal{U}_{ij}$ - конечная совокупность непересекающихся интервалов действительной прямой, суммарная длина которых равна a_{ij};

д) временем обработки деталей согласно расписанию $P=\{\mathcal{U}_{ij}\}$ (или длиной расписания P) называется наименьшее $T=T(P)$ такое, что все интервалы из $\mathcal{U}_{ij}$, $\mathcal{U}_{ij}\in P$, содержатся в некотором интервале $[\underline{t}, \underline{t}+T(P)]$ длины $T(P)$;

е) требуется найти расписание наименьшей длины.

Задача, которая в одних работах называется задачей Джонсона, а в других - одномаршрутной задачей Джонсона, характеризуется следующими свойствами:

0°. Все последовательности π^j, $j=\overline{1,n}$ являются подпоследовательностями последовательности $(1,2,\dots,m)$.

1°. Обработка детали j на станке $\pi^j(i+1)$ не может начаться раньше, чем закончится обработка детали j на станке $\pi^j(i)$.

2°. Никакие две детали не могут обрабатываться на одном станке одновременно, т.е. интервалы $u'\in\mathcal{U}_{ij_1}$, $u''\in\mathcal{U}_{ij_2}$ не пересекаются.

§ 1. Предварительные понятия и теоремы

<u>Определение 1</u>. Расписание P назовем стандартным, если

а) каждое множество $\mathcal{U}_{ij}$ состоит из единственного интервала u_{ij}, (т.е. деталь обрабатывается на станке непрерывно);

б) через каждый станок детали проходят в одной и той же последовательности;

в) начало расписания $\underline{t} = 0$;

г) все работы выполняются в наиболее ранние сроки.

Определение 2. Назовем ретроспективным метод, когда технологические маршруты и порядок следования деталей меняются на противоположные.

Пусть дана матрица (x_{ij}), $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$. Обозначим

$$X(i)=\sum_{j=1}^{n} x_{ij},\quad X^*=\max_{i=\overline{1,m}} X(i),\quad x^*=\max_{i,j} x_{ij},\quad \hat{x}_i=\max_{j=\overline{1,n}}(x_{ij}-x_{i+1,j})^+.$$

Через $\underline{t}_{ij}$ и $\bar{t}_{ij}$ будем обозначать моменты начала и конца обработки j -й детали на i -м станке, а через $x(i)$ – i-ю координату вектора x.

Под R -преобразованием матрицы (x_{ij}) будем понимать процесс увеличения некоторых элементов x_{ij}, в результате которого получается равенство $X(i)=X^*$, $i=\overline{1,m}$, при том же значении величин X^*, x^*, $\hat{x}_i$. (Нетрудно организовать такой процесс с трудоемкостью $O(mn)$.)

Далее в работе используется следующая известная

Т е о р е м а I. Для стандартного расписания P_π задачи Джонсона, соответствующего последовательности деталей π, справедлива формула

$$\bar{t}_{i,\pi(j)}=\max_{1\le K_1\le\ldots\le K_{i-1}\le j}\left(\sum_{s=1}^{K_1} a_{1,\pi(s)}+\sum_{s=K_1}^{K_2} a_{2,\pi(s)}+\ldots+\sum_{s=K_{i-1}}^{j} a_{i,\pi(s)}\right). \qquad /I/$$

Сформулируем также необходимые результаты, полученные автором ранее.

Т е о р е м а 2 [I]. Пусть $\mathcal{U}\subset R^m$ выпукло, $x_j\in\mathcal{U}$, $j=\overline{1,n}$, $x=\sum_{j=1}^{n} x_j/n$. Тогда с трудоемкостью $O(n^2)$ можно построить последовательность $\pi=(\pi(1),\ldots,\pi(n))$ такую, что

$$\sum_{j=1}^{K} x_{\pi(j)}-(K-m)x\in m\,\mathcal{U},\quad K=\overline{0,n}.$$

Т е о р е м а 3 [I]. С трудоемкостью $O(n^2)$ можно построить расписание задачи Джонсона обработки n деталей на m станках с оценкой

$$T(P)\le A^*+m(m-1)a^*,$$

где $$A^*=\max_{i=\overline{1,m}}\sum_{j=1}^{n} a_{ij},\quad a^*=\max_{i,j} a_{ij}.$$

Т е о р е м а 4 [2]. Пусть $\mathcal{U}\subset R^2$ – единичный шар некоторой нормы s, $x_j\in\mathcal{U}$, $j=\overline{1,n}$, $\sum x_j=0$. Тогда с трудоемкостью $O(n^2)$ можно построить перестановку $\pi=(\pi(1),\ldots,\pi(n))$ такую, что

$$\left\|\sum_{j=1}^{K} x_{\pi(j)}\right\|_s\le\lambda(\mathcal{U}),\quad K=\overline{0,n},$$

где $\lambda(Ш)$ - такое минимальное число λ, что для любой хорды AB шара $\lambda Ш$, пересекающей $Ш$, выполняется $\|AB\|_s \geq 2$.

Пусть $Ш_0(m)$ - выпуклое тело в R^m, являющееся выпуклой оболочкой положительного и отрицательного ортантов единичного куба.

Средствами элементарной геометрии может быть доказана

Лемма 1. Справедливо $\lambda(Ш_0(2)) = 1.5$.

Достаточно показать, что для любой хорды PQ шара $1.5\,Ш_0(2)$, касающейся шара $Ш_0(2)$, верно соотношение $\|PQ\|_s \geq 2$, достигающееся на некоторых хордах, где s - норма в R^2 с единичным шаром $Ш_0(2)$.

Следствие. Пусть $\mathcal{L} = \{b_i\} \subset Ш_0(2)$, $\sum_{b_i \in \mathcal{L}} b_i = b$. Тогда с трудоемкостью $O(n^2)$ можно найти перестановку $\pi = (\pi(1), \dots, \pi(n))$, $n = |\mathcal{L}|$, такую, что

$$\sum_{j=1}^{K} b_{\pi(j)} = \delta_K b + x_K, \quad K = \overline{0,n},$$

где $\delta_K \in [0,1]$, $x_K \in 1.5\,Ш_0(2)$.

Для доказательства достаточно рассмотреть совокупность $\bar{\mathcal{L}} = \mathcal{L} \cup \{\bar{b}_j, j = \overline{1,n}\}$, где $\bar{b}_j = -b/n$. Очевидно, $\sum_{x \in \bar{\mathcal{L}}} x = 0$.

Лемма 2. С трудоемкостью $O(n)$ можно построить расписание задачи Джонсона с двумя станками с оценкой

$$T(P) \leq A^* + a^*.$$

Доказательство. Можем считать, что оба станка работают непрерывно. Пусть t_i - время начала работы i-го станка, $i = 1,2$. Вначале расположим все детали, для которых $a_{2j} \geq a_{1j}$, а затем - остальные. Если $A(2) \geq A(1)$, то для любого $K = \overline{1,n}$ верно $\sum_{j=1}^{K} a_{2j} \geq \sum_{j=1}^{K} a_{1j}$, или $a^* + \sum_{j=1}^{K-1} a_{2j} \geq \sum_{j=1}^{K} a_{1j}$, откуда $t_2 \leq t_1 + a^*$, или $T(P) \leq A(2) + a^*$. В случае $A(2) \leq A(1)$ аналогично доказывается (с использованием ретроспективного метода) неравенство $T(P) \leq A(1) + a^*$. Лемма доказана.

Теорема 5 [9]. Для любых m, n, ℓ, нормы s в пространстве R^m и совокупности векторов $\{x_j \in R^m, j = \overline{1,n}\}$ с трудоемкостью $O(n)$ можно найти такое разбиение $N = \{N_1, \dots, N_\ell\}$ множества $\{1, 2, \dots, n\}$ на ℓ подмножеств, что

$$\Big\| \sum_{j \in N_i} x_j - \sum_{j=1}^{n} x_j/\ell \Big\|_s \leq 1.06\, m \cdot \max_j \|x_j\|_s, \quad i = \overline{1,\ell}.$$

При $\ell \leq 28$ эта оценка может быть улучшена:

$$\Big\| \sum_{j \in N_i} x_j - \sum_{j=1}^{n} x_j/\ell \Big\|_s \leq m \cdot \max_j \|x_j\|_s, \quad i = \overline{1,\ell}.$$

§ 2. Задача встречных маршрутов

Эта задача отличается от задачи Джонсона лишь условием O^0, т.е. для любой детали $j=\overline{1,n}$ последовательность π^j можно дополнить до одной из двух последовательностей: $1,2,\dots,m$ или $m,m-1,\dots,1$. В соответствии с этим каждую деталь отнесем к одной из двух групп: a или b. Ясно, что для любого расписания P верна оценка $A^*\leq T(P)$. В [3] показано, что можно строить расписания длины $T(P)\leq A^*+\tau(m)a^*$, где $\tau(m)$ - некоторая экспонента от m $(\tau(m)>2\cdot 3^m)$. Наша цель состоит в изложении нетрудоемкого ($\sim n^2$ операций) алгоритма, позволяющего строить расписания с оценкой $T(P)<A^*+2m^2\cdot a^*$.

Будем предполагать, что $m\geq 3$, так как для $m=2$ имеется эффективный точный алгоритм [II]. Для удобства выкладок проведем несложные преобразования.

I. Изменением масштаба получим равенство $a^*=1$ (что возможно, когда матрица (a_{ij}) ненулевая). Таким образом, $a_{ij}\leq 1$, $A^*\leq n$.

2. Проведем R -преобразование матрицы (a_{ij}).

3. Введением фиктивных деталей с нулевым временем обработки добьемся того, чтобы группы a и b содержали по n деталей: $a=\{a_1,\dots,a_n\}, b=\{b_1,\dots,b_n\}$. Время обработки детали x_j $(x\in\{a,b\})$ на станке i обозначим x_{ij}.

<u>Обратной</u> к перестановке $\pi=(\pi(1),\dots,\pi(K))$ будем называть перестановку $\pi^-\doteq(\pi(K),\dots,\pi(1))$. Задачу, получающуюся из исходной задачи Джонсона заменой технологического маршрута на обратный, будем называть обратной. Операцию обработки детали x_j на станке i обозначим O_{ij}^x; момент окончания операции O_{ij}^x в стандартном расписании задачи Джонсона обработки деталей группы x в последовательности $\pi=(\pi(1),\dots,\pi(n))$ будем обозначать $\tau_{ij}^x(\pi)$; $\nu_{ij}^x(\pi)$ - значение величины $\tau_{ij}^x(\pi^-)$ в стандартном расписании обратной задачи Джонсона. Кроме того, введем обозначения: $I_n\doteq(1,2,\dots,n)$; $\tau_{ij}^x\doteq\tau_{ij}^x(I_n)$; $\nu_{ij}^x\doteq\nu_{ij}^x(I_n)$.

Через $\bar{x}$ будем обозначать функцию переменной x, принимающей значения из множества $\{a,b\}$: $\bar{x}=a$, если $x=b$, и $\bar{x}=b$, если $x=a$. Через $\tilde{y}$ обозначим функцию от y:

$$\tilde{y}=\begin{cases}0, & y\leq 0,\\ y, & 0<y<n,\\ n, & y\geq n.\end{cases} \qquad /2/$$

Из теоремы 2 вытекает

Утверждение I. С трудоемкостью $O(n^2)$ можно найти перестановку π_x деталей группы x такую, что

$$x_i(K)\doteq\sum_{j=1}^{K}x_{i,\pi_x(j)}=K\alpha_i^x/n+\Psi_i^x(K)-\Psi_i^x(0),\quad K=\overline{0,n}, \qquad /3/$$

где

$$\alpha_i^x=\sum_{j=1}^{n}x_{ij},$$

$$\Psi_i^x(\kappa) \in [0, m],$$

$$\Psi_i^x(0) = \Psi_i^x(n) = m a_i^x / n . \qquad /5/$$

Заметим, что

$$\alpha_i^a + \alpha_i^b = A^*, \quad i = \overline{1,m} . \qquad /6/$$

Далее считаем, что детали группы x занумерованы в порядке π_x, $x \in \{a, b\}$, т.е. $\pi_a = \pi_b = I_n$. Из теоремы I и соотношений /3/,/4/ следует, что

$$\tau_{ij}^a \le \frac{j-1}{n} \cdot \max_{s=\overline{1,i}} \alpha_s^a + \sum_{s=1}^{i} \alpha_s^a / n + mi ,$$

$$\tau_{ij}^b \le \frac{j-1}{n} \cdot \max_{s=\overline{i,m}} \alpha_s^b + \sum_{s=i}^{m} \alpha_s^b / n + m(m-i+1), \qquad /7/$$

$$\nu_{ij}^a \le \frac{n-j}{n} \cdot \max_{s=\overline{i,m}} \alpha_s^a + \sum_{s=i}^{m} \alpha_s^a / n + m(m-i+1),$$

$$\nu_{ij}^b \le \frac{n-j}{n} \cdot \max_{s=\overline{1,i}} \alpha_s^b + \sum_{s=1}^{i} \alpha_s^b / n + mi .$$

Алгоритм построения расписания будет принципиально различным в двух случаях, в одном из которых (случай I) выполнено неравенство

$$A^* \le 2mn/(n-1), \qquad /8/$$

а в другом (случай 2) - противоположное ему.

Случай I. Построение расписания

Из /8/ и неравенства $A^* \le n$ получаем, что

$$A^* \le \min\{n, 2m + 2m/(n-1)\} \le 2m + 1 . \qquad /9/$$

Применяя алгоритм теоремы 3, с трудоемкостью $O(n^2)$ построим такие расписания P_a', P_b' задачи Джонсона обработки деталей групп a и b (соответственно) на станках $1, 2, \ldots, m-2$, что $\underline{t}_a' = -T(P_a')$, $\underline{t}_b' = 0$, где $\underline{t}_x'$ - начало расписания P_x', $x \in \{a, b\}$. Применяя алгоритм леммы 2, с трудоемкостью $O(n)$ построим такие расписания P_a'', P_b'' задачи Джонсона обработки деталей групп a и b на станках $m-1$, m, что $\underline{t}_a'' = 0$, $\underline{t}_b'' = -T(P_b'')$. В силу теоремы 3 и леммы , для полученных расписаний справедливы оценки

$$T(P_x') \le A^* + (m-2)(m-3), \quad x \in \{a, b\},$$
$$T(P_x'') \le A^* + 1, \qquad\qquad x \in \{a, b\} . \qquad /10/$$

Нетрудно убедиться, что расписание P^*, составленное из P_a', P_b', P_a'', P_b'', является допустимым расписанием задачи встречных маршрутов. Из /9/ и /10/ получаем следующую оценку его длины:

$$T(P^*) \le 2A^* + 2\max\{1, (m-2)(m-3)\} \le A^* + 2m + 1 + \\ + 2\max\{1, (m-2)(m-3)\} = \begin{cases} A^* + 9, & m = 3, \\ A^* + 2m^2 - 8m + 13, & m > 3. \end{cases} \qquad /11/$$

В дальнейшем предполагаем выполненным неравенство

$$A^* > 2mn/(n-1). \qquad /12/$$

Случай 2. Принципы построения расписания

1. Каждая операция O_{ij}^x выполняется непрерывно, т.е. множество $\mathcal{U}_{ij}$ состоит из единственного интервала $u_{ij}^x = [\underline{t}_{ij}^x, \underline{t}_{ij}^x + x_{ij}] = [\bar{t}_{ij}^x - x_{ij}, \bar{t}_{ij}^x]$.

2. Каждой операции O_{ij}^x предшествуют операции O_{ik}^x, $k<j$, и $O_{is}^{\bar{x}}$, $s \le \tilde{x}_j^i$, где

$$a_j^i = j - \ell_0 + (i-1)\ell, \\ b_j^i = j - 1 + \ell_0 - (i-1)\ell, \qquad /13/$$

ℓ, ℓ_0 – параметры расписания.

3. Разобьем множество всех операций на пять непересекающихся подмножеств: $O_0 = \{O_{ij}^x : 0 < \tilde{x}_j^i < n\}$, $O_1 = \{O_{ij}^a : \tilde{a}_j^i \le 0\}$, $O_2 = \{O_{ij}^b : \tilde{b}_j^i \le 0\}$, $O_3 = \{O_{ij}^b : \tilde{b}_j^i \ge n\}$, $O_4 = \{O_{ij}^a : \tilde{a}_j^i \ge n\}$, для каждого из которых интервалы u_{ij}^x будем определять своим способом:

$$\underline{t}_{ij}^x = \underline{t}_i + x_i(j-1) + \bar{x}_i(\tilde{x}_j^i) \doteq \eta_{ij}^x \quad \text{для} \quad O_{ij}^x \in O_0, \qquad /14/$$

где $\underline{t}_i$ – параметры расписания,

$$\begin{aligned} \bar{t}_{ij}^a &= \underline{t}_1 - \delta_1 + \tau_{ij}^a && \text{для} \quad O_{ij}^a \in O_1, \qquad /15/ \\ \bar{t}_{ij}^b &= \underline{t}_m - \delta_2 + \tau_{ij}^b && \text{для} \quad O_{ij}^b \in O_2, \\ \underline{t}_{ij}^b &= \bar{t}_1 + \delta_3 - \nu_{ij}^b && \text{для} \quad O_{ij}^b \in O_3, \\ \underline{t}_{ij}^a &= \bar{t}_m + \delta_4 - \nu_{ij}^a && \text{для} \quad O_{ij}^a \in O_4, \end{aligned}$$

где $\bar{t}_i = \underline{t}_i + A^*$, $\delta_i = \max\{0, \delta_i^*\}$, δ_i^* – параметры расписания. В этом случае осталось определить параметры $\ell, \ell_0, \underline{t}_i (i = \overline{1,m}), \delta_i^* (i = \overline{1,4})$.

Выбор параметров расписания

1. Положим $\underline{t}_1 = 0, \underline{t}_{i+1} - \underline{t}_i \doteq \Delta_{i+1}$. Величины ℓ и Δ_i, $i = \overline{2,m}$, определим из условия 1° для операций из множества O_0. Заметим, что в случае $\ell \ge n$ ни для каких i, j, x не выполняется $O_{ij}^x \in O_0 \& O_{i+1,j}^x \in O_0$, и, значит, величины Δ_{i+1} могут быть выбраны произвольно.

Пусть для некоторого i найдутся детали a_k и b_s такие, что $\{O_{ik}^a, O_{i+1,k}^a, O_{is}^b, O_{i+1,s}^b\} \subseteq O_0$. Из условия 1° и /14/ получаем

$$z_1 \doteq a_i(k) + b_i(\tilde{a}_k^i) - a_{i+1}(k-1) - b_{i+1}(\tilde{a}_k^i + \ell) \le \Delta_{i+1} \le \\ \le b_i(s-1) + a_i(\tilde{b}_s^{i+1} + \ell) - b_{i+1}(s) - a_{i+1}(\tilde{b}_s^{i+1}) \doteq z_2. \qquad /16/$$

Из /3/–/6/ получаем оценки для z_1 и z_2:

$$z_1 \le [K(\alpha_i^a - \alpha_{i+1}^a) + \alpha_{i+1}^a + \tilde{a}_K^i(\alpha_i^b - \alpha_{i+1}^b) - \ell\alpha_{i+1}^b + m(\alpha_{i+1}^a + \alpha_{i+1}^b - \alpha_i^a - \alpha_i^b)]/n +$$
$$+ 2m = [(\tilde{a}_K^i - K)(\alpha_i^b - \alpha_{i+1}^b) + \alpha_{i+1}^a - \ell\alpha_{i+1}^b]/n + 2m =$$
$$= [((i-1)\ell - \ell_0)(\alpha_i^b - \alpha_{i+1}^b) + \alpha_{i+1}^a - \ell\alpha_{i+1}^b]/n + 2m \doteq z_3;$$
$$z_2 \ge [\tilde{b}_s^{i+1}(\alpha_i^a - \alpha_{i+1}^a) + \ell\alpha_i^a + (s-1)(\alpha_i^b - \alpha_{i+1}^b) - \alpha_{i+1}^b]/n - 2m =$$
$$= [(\tilde{b}_s^{i+1} - s + 1)(\alpha_i^a - \alpha_{i+1}^a) + \ell\alpha_i^a - \alpha_{i+1}^b]/n - 2m =$$
$$= [(\ell_0 - i\ell)(\alpha_i^a - \alpha_{i+1}^a) + \ell\alpha_i^a - \alpha_{i+1}^b]/n - 2m \doteq z_4.$$

Для существования значения Δ_{i+1}, удовлетворяющего /I6/, достаточно выполнения $z_3 \le z_4$, что эквивалентно соотношению

$$4mn \le (\ell_0 - i\ell)(\alpha_i^a - \alpha_{i+1}^a) + (\ell_0 - (i-1)\ell)(\alpha_i^b - \alpha_{i+1}^b) +$$
$$+ \ell\alpha_i^a + \ell\alpha_{i+1}^b - \alpha_{i+1}^b - \alpha_{i+1}^b = (\ell - 1)A^*,$$

или $\ell \ge 4mn/A^* + 1$. Положим

$$\ell = \min\left\{n, \left\lceil \frac{4mn}{A^*} + 1 \right\rceil\right\}, \qquad /I7/$$

$$\Delta_{i+1} \doteq (z_3 + z_4)/2 = [((i-1)\ell - \ell_0)(\alpha_i^b - \alpha_{i+1}^b) + (\ell_0 - i\ell)(\alpha_i^a - \alpha_{i+1}^a) +$$
$$+ \ell\alpha_i^a + \alpha_{i+1}^a - \ell\alpha_{i+1}^b - \alpha_{i+1}^b]/2n = [(2\ell_0 - (2i-1)\ell)(\alpha_i^a - \alpha_{i+1}^a) + \ell\alpha_i^a -$$
$$- \ell\alpha_{i+1}^b + \alpha_{i+1}^a - \alpha_{i+1}^b]/2n = [(\ell_0 - i\ell - 1)(\alpha_i^a - \alpha_{i+1}^a) + (\ell+1)(\alpha_i^a - A^*/2)]/n. \qquad /I8/$$

Таким образом,

$$\ell < 4mn/A^* + 2, \qquad /I9/$$

$$\sum_{s=1}^{i} \Delta_{s+1} = [(\ell_0 - 1)(\alpha_1^a - \alpha_{i+1}^a) - \ell\sum_{s=1}^{i} s(\alpha_s^a - \alpha_{s+1}^a) + (\ell+1)\sum_{s=1}^{i}(\alpha_s^a - A^*/2)]/n =$$
$$= [(\ell_0 - 1)(\alpha_1^a - \alpha_{i+1}^a) + \sum_{s=1}^{i}\alpha_s^a + \ell i\alpha_{i+1}^a - (\ell+1)iA^*/2]/n. \qquad /20/$$

Из /I2/ и /I7/ следует, что

$$\ell \ge 2mn/A^* + 1. \qquad /2I/$$

Из /2/, /I3/, /I7/ для $O_{ij}^a \in O_1$ имеем

$$\tilde{a}_j^{i+1} \ge a_j^{i+1} = j - \ell_0 + i\ell. \qquad /22/$$

2. Положим $\delta_1^* = \max\limits_{O_{ij}^a \in O_1,\, i<m} \{\underline{t}_1 + \tau_{ij}^a - \eta_{i+1,j}^a\}$, тогда для $O_{ij}^a \in O_1$ из /I6/ получаем

$$\bar{t}_{ij}^a \le \underline{t}_1 + \tau_{ij}^a - \delta_1^* \le \eta_{i+1,j}^a, \qquad /23/$$

т.е. условие I° выполняется для каждой пары операций $O_{ij}^a \in O_1$,

$O^a_{i+1,j} \in O_0$. Докажем неравенство

$$\bar{t}^a_{ij} \leq \eta^a_{ij} + a_{ij}, \quad O^a_{ij} \in O_1 \; , \qquad /24/$$

индукцией по i и j :

$\underline{i=1}.$ $\bar{t}^a_{1j} \leq \underline{t}_1 + \tau^a_{1j} = \underline{t}_1 + \sum\limits_{k=1}^{j} a_{1k} = \eta^a_{1j} + a_{1j}$;

$\underline{i>1,\ j=1}.$ $\bar{t}^a_{i1} = \bar{t}^a_{i-1,1} + a_{i1} \leq$ (из /23/) $\leq \eta^a_{i1} + a_{i1}$;

$\underline{i>1,\ j>1}.$ $\bar{t}^a_{ij} = max\{\bar{t}^a_{i-1,j}, \bar{t}^a_{i,j-1}\} + a_{ij} \leq$ (из /23/, /24/) $\leq$

$\leq max\{\eta^a_{ij}, \eta^a_{i,j-1} + a_{i,j-1}\} + a_{ij} =$ (из /14/) $= \eta^a_{ij} + a_{ij}$.

Из /24/ следует, что условие 2° выполняется на каждом станке по отношению к операциям из множества $O_0 \cup O_1$.

3. Положим

$$\delta^*_2 = \max_{O^b_{ij} \in O_2,\ i>1} \{\underline{t}_m + \tau^b_{ij} - \eta^b_{i-1,j}\},$$

$$\delta^*_3 = \max_{O^b_{ij} \in O_3,\ i<m} \{-\bar{t}_1 + \nu^b_{ij} + \eta^b_{i+1,j} + b_{i+1,j}\},$$

$$\delta^*_4 = \max_{O^a_{ij} \in O_4,\ i>1} \{-\bar{t}_m + \nu^a_{ij} + \eta^a_{i-1,j} + a_{i-1,j}\}.$$

Повторяя рассуждения п.2, приходим к выводу, что построенное расписание P^* является допустимым. Оценим его длину:

$$T(P^*) = max\{\bar{t}_1 + \delta_3, \bar{t}_m + \delta_4\} - min\{\underline{t}_1 - \delta_1, \underline{t}_m - \delta_2\} =$$

$$= A^* + max\{\delta_1 + \delta_3, \delta_2 + \delta_3 + \underline{t}_1 - \underline{t}_m, \delta_1 + \delta_4 + \underline{t}_m - t_1, \delta_2 + \delta_4\}; \qquad /25/$$

$$\delta_i + \delta_k \leq max\{0, \delta^*_i, \delta^*_k, \delta^*_i + \delta^*_k\}, \quad i \in \{1,2\},\ k \in \{3,4\}. \qquad /26/$$

Из /10/, /14/, /3/, /20/ имеем

$$\delta^*_1 \leq \max_{O^a_{ij} \in O_1,\ i<m} \Big\{\tau^a_{ij} - \sum_{k=1}^{i} \Delta_{k+1} - a_{i+1}(j-1) - b_{i+1}(\tilde{a}^{\,i+1}_j)\Big\} \leq$$

$$\leq \max_{O^a_{ij} \in O_1,\ i<m} \Big\{\frac{j-1}{n} \cdot \max_{s=\overline{1,i}} \alpha^a_s + \sum_{s=1}^{i} \alpha^a_s/n + mi - \big[(\ell_0 - 1)(\alpha^a_1 - \alpha^a_{i+1}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{i} \alpha^a_k + \ell i \alpha^a_{i+1} - (\ell+1) i A^*/2\big]/n - (j-1)\alpha^a_{i+1}/n - \psi^a_{i+1}(j-1) + \psi^a_{i+1}(0) -$$

$$- \tilde{a}^{\,i+1}_j \alpha^{\,i}_{i+1}/n - \psi^b_{i+1}(\tilde{a}^{\,i+1}_j) + \psi^b_{i+1}(0)\Big\} \leq \text{ (из /4/ - /6/)}$$

$$\leq \max_{i,j}\Big\{\frac{j-1}{n}(\max_{s=\overline{1,i}} \alpha^a_s - A^*) - (\tilde{a}^{\,i+1}_j - j + 1)\alpha^b_{i+1}/n + mi +$$

$$+ (\ell_0 - 1 - \ell i)\alpha^a_{i+1}/n - (\ell_0 - 1)\alpha^a_1/n + mA^*/n + (\ell+1) i A^*/2n\Big\} \leq$$

(из /6/, /22/)

$$\le \max_i \{(\ell_0 - i\ell - 1)A^*/n + mi + (\ell+1)iA^*/2n\} + mA^*/n - (\ell_0 - 1)\alpha_1^a/n =$$

(в силу /2I/ максимум достигается при $i = 1$)

$$= (\ell_0 - 1)\alpha_1^\ell/n + m + mA^*/n - (\ell-1)A^*/2n \doteq \bar{\delta}_1 . \qquad /27/$$

Аналогично доказываются оценки

$$\delta_2^* \le (\ell_0' - 1)\alpha_m^a/n + m + mA^*/n - (\ell-1)A^*/2n \doteq \bar{\delta}_2 , \qquad /28/$$

где

$$\ell_0' = 1 - \ell_0 + (m-1)\ell ; \qquad /29/$$

$$\delta_3^* \le (\ell_0 - 1)\alpha_1^a/n + 3m - mA^*/n - (\ell-1)A^*/2n \doteq \bar{\delta}_3 , \qquad /30/$$

$$\delta_4^* \le (\ell_0' - 1)\alpha_m^\ell/n + 3m - mA^*/n - (\ell-1)A^*/2n \doteq \bar{\delta}_4 . \qquad /3I/$$

Из /I6/ и /29/ получаем

$$\underline{t}_m - \underline{t}_1 = \sum_{s=1}^{m-1} \Delta_{s+1} = [(\ell_0 - 1)(\alpha_1^a - \alpha_m^a) + \sum_{s=1}^{m-1} \alpha_s^a + \ell(m-1)\alpha_m^a -$$

$$-(\ell+1)(m-1)A^*/2]/n = [\ell_0\alpha_1^a + \ell_0'\alpha_m^a + \sum_{s=2}^{m-1} \alpha_s^a - (\ell+1)(m-1)A^*/2]/n . \qquad /32/$$

Положим $\ell_0 = \left\lfloor \frac{(m-1)\ell+1}{2} \right\rfloor$, тогда

$$\ell_0' = \left\lceil \frac{(m-1)\ell+1}{2} \right\rceil \le \frac{(m-1)\ell+2}{2} ,$$

откуда получаем следующие оценки:

$$\bar{\delta}_1 \le (2\ell_0 - \ell - 1)A^*/2n + m + mA^*/n \le (m-2)\ell A^*/2n + 2m \le$$

$$\le (m-2)\left(\frac{4mn}{A^*} + 2\right)\frac{A^*}{2n} + 2m \le 2m(m-2) + 3m - 2 = w - 2 , \qquad /33/$$

где $w = 2m^2 - m$;

$$\bar{\delta}_2 \le w - 1.5 ; \qquad /34/$$

$$\bar{\delta}_3 \le [(m-2)\ell - 2m]A^*/2n + 3m \le 2m(m-2) - 2A^*/n + 3m \le$$

$$\le 2m^2 - m = w ; \qquad /35/$$

$$\bar{\delta}_4 \le [(m-2)\ell + 1 - 2m]A^*/2n + 3m \le 2m(m-2) - 3A^*/2 + 3m \le w ; \qquad /36/$$

$$\bar{\delta}_1 + \bar{\delta}_3 \le (\ell_0 - 1)A^*/n - (\ell-1)A^*/n + 4m \le ((m-3)\ell + 1)A^*/2n + 4m \le$$

$$\le 2m(m-3) + m - 2.5 + 4m = w - 2.5 ; \qquad /37/$$

$$\bar{\delta}_2 + \bar{\delta}_4 \le w - 2 ; \qquad /38/$$

$$\bar{\delta}_1+\underline{t}_m-\underline{t}_1\le[\ell_0+\ell_0'+m-2-(\ell+1)m/2+1+m]A^*/n+m=$$

$$=[\ell(m-1)+2m-(\ell+1)m/2]A^*/n+m=(\ell(m-2)+3m)A^*/2n+m\le$$

$$\le 2m(m-2)+(5m-4)/2+m=w+m/2-2; \qquad /39/$$

$$\bar{\delta}_4+\underline{t}_m-\underline{t}_1\le[\ell_0+\ell_0'+m-2-(\ell+1)m/2+1-m]A^*/n+3m\le$$

$$\le 2m(m-2)+(m-4)A^*/2n+3m\le\begin{cases}w, & m\le 3,\\ w+m/2-2, & m>3;\end{cases} \qquad /40/$$

$$\underline{t}_m-t_1\le[\ell_0+\ell_0'+m-2-(\ell+1)(m-1)/2]A^*/n=(\ell+1)(m-1)A^*/2n\le$$

$$\le 2m(m-1)+3(m-1)/2=w+m/2-1.5; \qquad /41/$$

$$\underline{t}_1-t_m\le(\ell+1)(m-1)A^*/2n\le w+m/2-1.5; \qquad /42/$$

$$\bar{\delta}_1+\bar{\delta}_4+\underline{t}_m-\underline{t}_1\le[\ell_0+\ell_0'+m-2-(\ell-1)-(\ell+1)(m-1)/2]A^*/n+4m=$$

$$=[(\ell+1)(m-1)/2-\ell+1]A^*/n+4m\le 2m(m-3)+(3m-5)/2+4m=$$

$$=w+m/2-2.5; \qquad /43/$$

$$\bar{\delta}_2-(\underline{t}_m-\underline{t}_1)\le[(\ell+1)(m-1)/2-(\ell-1)/2+m]A^*/n+m\le$$

$$\le 2m(m-2)+(5m-4)/2+m=w+m/2-2; \qquad /44/$$

$$\bar{\delta}_3-(\underline{t}_m-\underline{t}_1)\le[(\ell+1)(m-1)/2-(\ell-1)/2-m]A^*/n+3m\le$$

$$\le 2m(m-2)+(m-4)A^*/2n+3m\le\begin{cases}w, & m\le 3\\ w+m/2-2, & m>3;\end{cases} \qquad /45/$$

$$\bar{\delta}_2+\bar{\delta}_3-(\underline{t}_m-\underline{t}_1)\le[(\ell+1)(m-1)/2-\ell+1]A^*/n+4m\le$$

$$\le 2m(m-3)+(3m-5)/2+4m=w+m/2-2.5. \qquad /46/$$

Учитывая соотношения /25/-/46/, /II/, получаем оценку

$$T(P)\le A^*+2m^2-m/2-1.5.$$

Таким образом, доказана

Теорема 6. Для задачи встречных маршрутов с трудоемкостью $O(n^2)$ может быть построено расписание с оценкой

$$T(P^*)\le A^*+(2m^2-(m+3)/2)a^*.$$

§ 3. Задача минимизации цикла работы поточной линии

На m станках (в технологическом порядке $1,2,\ldots,m$) обрабатывается n партий деталей. Заданы матрица (a_{ij}), $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, длительностей обработки и технологические требования:

Iа°. $\underline{t}_{ij}\le\underline{t}_{i+1,j}$,

Iб°. $\bar{t}_{ij}\le\bar{t}_{i+1,j}$,

2°. В каждый момент времени на каждом станке обрабатывается не более одной детали.

3°. Каждый станок работает непрерывно.

Введем векторы $a_j \in R^{m-1}$: $a_j(i) = a_{ij} - a_{i+1,j}$, $A = \sum_{j=1}^{n} a_j$.

В [4] приведена оценка

$$T(P) \geq \sum_{i=1}^{m-1} A(i)^+ + \sum_{j=1}^{n} a_{mj} \doteq B$$

и предложен алгоритм построения расписания с оценкой

$$T(P) \leq B + (m-1)^{3/2} C_{\ell_2}(m-1) \cdot \max_{i,j} a_{ij}, \qquad /47/$$

где $C_{\ell_2}(m-1)$ - значение константы Штейница [5] для нормы ℓ_2. Нетрудно видеть, что для любого стандартного расписания, соответствующего перестановке $\pi = (\pi(1), \dots, \pi(n))$, длина расписания выражается формулой

$$T(P_\pi) = \sum_{i=1}^{m-1} \max_{K=\overline{0,n}} \sum_{j=1}^{K} a_{\pi(j)}(i) + \sum_{j=1}^{n} a_{mj}$$

Найдем перестановку π_0 векторов a_j с помощью алгоритма теоремы 2. Тогда длина стандартного расписания P_{π_0}, соответствующего этой перестановке, оценится сверху:

$$T(P_{\pi_0}) \leq \sum_{j=1}^{n} a_{mj} + \sum_{i=1}^{m-1} \max_{K=\overline{0,n}} \min \{(K-(m-1)) A(i)/n + (m-1) a^*(i), K a^*(i)\},$$

где $a^*(i) = \max_{j=\overline{1,n}} a_j(i) = \max_{j=\overline{1,n}} (a_{ij} - a_{i+1,j})$.

Выражение под знаком второй суммы обозначим z_i. Тогда

$$z_i \leq \begin{cases} A(i) + (m-1)(a^*(i) - A(i)/n), & \text{если } A(i) > 0, \\ (m-1) a^*(i), & \text{если } A(i) \leq 0 \text{ и } a^*(i) \geq 0, \\ 0, & \text{если } a^*(i) < 0, \end{cases}$$

или $z_i \leq A(i)^+ + (m-1)(a^*(i)^+ - A(i)^+/n)$, откуда

$$T(P_{\pi_0}) \leq B + (m-1) \sum_{i=1}^{m-1} (a^*(i)^+ - A(i)^+/n). \qquad /48/$$

Из /48/ вытекает более простая оценка

$$T(P_{\pi_0}) \leq B + (m-1)^2 \cdot \max_{i,j} a_{ij}. \qquad /49/$$

Так как наилучшая известная верхняя оценка для величины $C_{\ell_2}(m)$ [5] есть $C_{\ell_2}(m) \leq m$, то оценка /49/ лучше /47/ и достигается эффективным способом ($\sim n^2$ операций).

§ 4. Задача о партиях изделий

Рассматриваемая здесь задача отличается от задачи Джонсона тем, что множество всех деталей разбито на партии и при обработке

на каждом станке детали каждой партии должны идти подряд, не перемешиваясь с деталями из других партий. Таким образом, имеем некоторые ограничения на порядок следования деталей, что делает эту задачу более трудной, по сравнению с задачей Джонсона. Тем не менее можно предложить нетрудоемкий алгоритм, который при небольшом размере каждой партии дает решение, близкое к оптимальному.

Пусть S - количество партий, n_K - количество деталей в K-й партии, $K=\overline{1,S}$; $N=\sum_{K=1}^{S} n_K$; a_{ij}^{K} - длительность обработки j-й детали K-й партии на i-м станке, $j=\overline{1,n_K}$, $K=\overline{1,S}$, $i=\overline{1,m}$; $b_i^K=\sum_{j=1}^{n_K} a_{ij}^K$,

$$B(i)=\sum_{K=1}^{S} b_i^K , \quad B^*=\max_{i=\overline{1,m}} B(i), \quad a^*=\max_{i,j,K} a_{ij}^K, \quad b^*=\max_{i,K} b_i^K .$$

Как и в задаче Джонсона, для любого расписания задачи о партиях верна оценка $T(P)\geq B^*$. Определим совокупности векторов $C=\{c_t\in R^{m-1}: c_t(i)=b_i^t-b_m^t,\ t\in\overline{1,S}\}$, $\mathcal{D}_K=\{d_{Kt}\in R^{m-1}: d_{Kt}(i)=a_{it}^K-a_{mt}^K,\ t=\overline{1,n_K}\}$, $K=\overline{1,S}$. Используя формулу /I/, для любого стандартного расписания задачи о партиях, соответствующего последовательности партий $1,2,\dots,S$ и последовательности деталей в K-й партии $1,2,\dots,n_K$ $(K=\overline{1,S})$, будем иметь оценку

$$T(P)\leq(m-1)a^*+B^*+\sum_{i=1}^{m-2}\max_{K=\overline{1,S}}\max_{j=\overline{1,n_K}}\left(C^{K-1}(i)-C^{K-1}(i+1)+d_K^j(i)-d_K^j(i+1)\right)+\max_{K=\overline{1,S}}\max_{j=\overline{1,n_K}}\left(C^{K-1}(m-1)+d_K^j(m-1)\right),$$

где $C^K=\sum_{t=1}^{K} c_t$, $d_K^j=\sum_{t=1}^{j} d_{Kt}$.

В [6] рассматривалась задача компактного суммирования векторов, в которой для любой конечной совокупности векторов $\mathcal{B}=\{b_i\}\subset Ш\subset R^m$, $\sum_{b_i\in\mathcal{B}} b_i=0$, требовалось найти перестановку π ее элементов, минимизирующую функционал

$$f_{\mathcal{B}}(\pi)=\min\left\{x\geq 0: \sum_{i=1}^{K} b_{\pi(i)}\in x\,Ш,\ K=\overline{1,n}\right\},$$

где $n=|\mathcal{B}|$. На основе различных алгоритмов решения этой задачи построим несколько алгоритмов решения задачи о партиях. Каждый алгоритм будет состоять из трех этапов.

Этап I. Проведем R-преобразование матрицы (a_{ij}^K) , не увеличивая значений a^*, B^*, $\hat{a}_i$, b^*, $\hat{b}_i\doteq\max_K(b_i^K-b_{i+1}^K)^+$. Тогда

а) $C\subset b^*Ш_0(m-1)$, $\mathcal{D}_K\subset a^*Ш_0(m-1)$, где $Ш_0(m)$ определено в § I;

б) $C\subset Ш_1\doteq\{x\in R^{m-1}: x(i)-x(i+1)\leq\hat{b}_i,\ i=\overline{1,m-2},\ x(m-1)\leq\hat{b}_{m-1}\}$,
$\mathcal{D}_K\subset Ш_2\doteq\{x\in R^{m-1}: x(i)-x(i+1)\leq\hat{a}_i,\ i=\overline{1,m-2},\ x(m-1)\leq\hat{a}_{m-1}\}$.

Кроме того, заметим, что

в) $\sum_{x\in C} x=0$, $\sum_{x\in\mathcal{D}_K} x=C_K$,

г) $\varphi_i(x) \doteq x(i) - x(i+1),\ i=\overline{1,m-2},\quad \varphi_{m-1}(x) \doteq x(m-1)$ – линейные функции от $x \in R^{m-1}$,

д) $|\varphi_i(x)| \le 1$, при $x \in Ш_0(m-1),\ i=\overline{1,m-1}$.

Этап 2. Пусть имеется алгоритм, который для любой совокупности векторов $\mathcal{B} \subset Ш_0(m)$ решает задачу компактного суммирования с оценкой $f_{\mathcal{B}}(\pi) \le \mu(m)$. Применяя его к совокупностям векторов C и $\bar{\mathcal{D}}_K = \mathcal{D}_K \cup \{y_{Kt},\ t=\overline{1,n_K}\}$, где $y_{Kt} = -c_K/n_K$, и используя свойства а – д, получаем стандартное расписание P задачи о партиях с оценкой

$$T(P) \le (m-1)a^* + B^* + \sum_{i=1}^{m-1} \max_{K=\overline{1,S}} \max_{\lambda \in [0,1]} \varphi_i(\lambda c^{K-1} + (1-\lambda)c^K) +$$

$$+ (m-1)\mu(m-1)a^* \le B^* + (m-1)[a^* + \mu(m-1)(a^* + b^*)].$$

В частности, применяя алгоритм теоремы 2, получаем расписание с оценкой

$$T(P) \le B^* + (m-1)[a^* + (m-1)(a^* + b^*)].$$

При $m=3$, используя алгоритм следствия леммы I, получим расписание с оценкой

$$T(P) \le B^* + 3b^* + 5a^*.$$

Применяя алгоритм теоремы 2 к совокупностям векторов $C \subset Ш_1, \mathcal{D}_K \subset Ш_2$, получаем расписание с оценкой

$$T(P) \le B^* + (m-1)\left[a^* + \sum_{i=1}^{m-1}(\hat{a}_i + \hat{b}_i)\right] =$$

$$= B^* + (m-1)\left[a^* + \sum_{i=1}^{m-1} \max_{K,j}(a_{ij}^K - a_{i+1,j}^K)^+ + \sum_{i=1}^{m-1} \max_K (b_i^K - b_{i+1}^K)^+\right].$$

Этап 3. Возвращаясь к исходным значениям величин a_{ij}^K, получим расписания исходной задачи о партиях, для которых полученные оценки остаются в силе.

В следующем параграфе будут рассмотрены известные обобщения задачи Джонсона.

§ 5. Задачи Миттена, Набешимы и задача о редакторе

Сформулируем задачу, в которую вкладываются задача Джонсона, а также задачи Миттена [I2] и Набешимы [I?], обобщенные на случай m станков, и задача о редакторе [7, с. 56], обобщенная на случай m-кратного редактирования (список задач заимствован из [8], где они рассматривались при $m=2$).

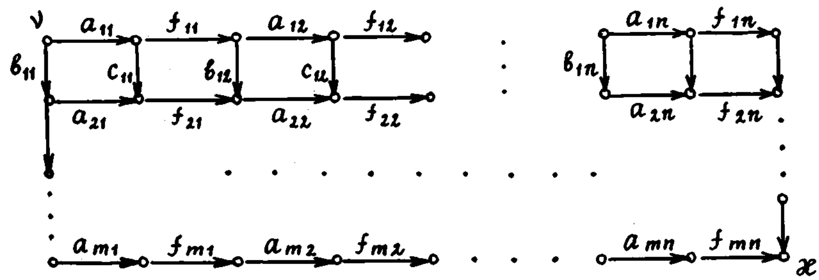
Пусть n деталей требуется обработать на m станках в технологической последовательности $1,2,\dots,m$. Заданы длительности a_{ij} обработки j-й детали на i-м станке, времена b_{ij}, c_{ij}, $i=\overline{1,m-1}$, задающие ограничения на расписание:

$$\underline{t}_{i+1,j} \geq \underline{t}_{ij} + b_{ij}, \quad \bar{t}_{i+1,j} \geq \bar{t}_{ij} + c_{ij}, \quad i = \overline{1,m-1},$$

а также времена f_{ij} переналадки станка i после обработки на нем детали j (точнее, время приведения станка в исходное состояние). Условие 2^0 выглядит для этой задачи так:

если $\underline{t}_{ij_1} \leq \underline{t}_{ij_2}$, то $\underline{t}_{ij_1} + a_{ij_1} + f_{ij_1} \leq \underline{t}_{ij_2}$.

Как и в [8], построим сетевую модель этой задачи для стандартного расписания P, соответствующего перестановке деталей $1, 2, \dots, n$ (см. рисунок):



В отличие от [8], конечным моментом расписания будем считать момент, когда все детали обработаны, а все станки приведены в исходное состояние. Было замечено [8], что длина расписания P равна длине критического пути из вершины ν в вершину $\varkappa$, откуда, обозначая $x_{ij} = a_{ij} + f_{ij}$, получаем оценку

$$T(P) \leq \max_{1 \leq K_1 \leq \dots \leq K_{m-1} \leq n} \Big(\sum_{j=1}^{K_1} x_{1j} + \sum_{j=K_1+1}^{K_2} x_{2j} + \dots + \sum_{j=K_{m-1}+1}^{n} x_{mj}\Big) + \sum_{i=1}^{m-1} \max(F_i, B_i),$$

где $F_i = \max_j (f_{i+1,j} + c_{ij} - f_{ij})$, $B_i = \max b_{ij}$. Введем векторы $x_j \in R^m$: $x_j(i) = x_{ij}$ и обозначим $X = \sum_{j=1}^{n} x_j$, $X^* = \max_{i=\overline{1,m}} X(i)$. Проведя R-преобразование матрицы (x_{ij}), получим равенство $X(i) = X^*$, $i = \overline{1,m}$, после чего, применяя алгоритм теоремы 2 для упорядочения векторов $\{y_j \in R^{m-1}: y_j(i) = x_j(i) - x_j(i+1)$, получим расписание с оценкой

$$T(P) \leq X^* + (m-1) \sum_{i=1}^{m-1} \max_j (a_{ij} + f_{ij} - a_{i+1,j} - f_{i+1,j})^+ + \sum_{i=1}^{m-1} \max(F_i, B_i).$$

В то же время для любого расписания P верна оценка $T(P) \geq X^*$.

§ 6. Задача Джонсона с ℓ станками каждого типа

Имеется n работ и m групп станков по ℓ одинаковых станков в каждой группе. Каждая работа состоит из m операций, выполняемых в последовательности $1, 2, \dots, m$, причем i-я операция выполняется на одном из станков i-й группы. В остальном постановка задачи совпадает с задачей Джонсона. Нетрудно видеть, что для любого расписа-

ния P верна оценка $T(P) \geq A^*/\ell$.

Алгоритм построения расписания этой задачи состоит из двух этапов.

Этап I. Разобьем множество всех станков на ℓ множеств: $M_1,\dots,M_\ell$, в каждом из которых содержится станок каждого типа. Пользуясь алгоритмом теоремы 5, разобьем множество всех работ $\{1,2,\dots,n\}$ на ℓ множеств $\{N_1,\dots,N_\ell\}$ так, чтобы выполнялось

$$A_K \leq A^*/\ell + 1.06\, m a^*, \quad K=\overline{1,\ell},$$

где $A_K = \max\limits_{i=\overline{1,m}} \sum\limits_{j\in N_K} a_{ij}$.

Этап 2. Решаем ℓ задач Джонсона (K-я задача состоит в нахождении расписания обработки деталей из множества N_K на станках множества M_K) с оценкой длины расписания K-й задачи:

$$T(P_K) \leq A_K + m(m-1)a^*,$$

откуда получаем оценку длины расписания исходной задачи:

$$T(P) = \max_{K=\overline{1,\ell}} T(P_K) \leq A^*/\ell + (m^2+0.06)a^*.$$

При $\ell \leq 28$ оценка может быть улучшена:

$$T(P) \leq A^*/\ell + m^2 a^*.$$

§ 7. Задача Джонсона с четырьмя станками

В [10] был предложен алгоритм трудоемкости $O(n^2)$ для построения расписания задачи Джонсона с четырьмя станками с оценкой $T(P) \leq A^* + 11a^*$.

Используя идею [10] и алгоритм теоремы 4, опишем алгоритм, который с той же трудоемкостью находит расписание P с оценкой $T(P) \leq A^* + 9a^*$. Пусть проделано R-преобразование матрицы (a_{ij}). Введем векторы $d_j \in R^{m-2}$: $d_j(i) = a_{ij} - a_{m-1,j}$ и скаляры $c_j = a_{m-1,j} - a_{m,j}$. Тогда $\sum\limits_{j=1}^{n} d_j = 0$ и $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j = 0$. Из формулы /1/ для стандартного расписания P_π, соответствующего перестановке π, справедлива оценка

$$T(P_\pi) \leq A^* + (m-1)a^* + \sum_{i=1}^{m-3} \max_{K=\overline{0,n}} \left(d_\pi^K(i) - d_\pi^K(i+1)\right) + \max_{K=\overline{0,n}} d_\pi^K(m-2) + \max_{K=\overline{0,n}} c_\pi^K,$$

где $d_\pi^K = \sum\limits_{j=1}^{K} d_{\pi(j)}$, $c_\pi^K = \sum\limits_{j=1}^{K} c_{\pi(j)}$.

Пусть $m=4$. Применяя алгоритм теоремы 4 к совокупности векторов $\mathcal{D} = \{d_j,\ j=\overline{1,n}\} \subset a^* Ш_0(2)$, найдем перестановку π, для которой, в силу замечаний г, д из § 4 и следствия леммы I справедливы неравенства

$$|d_\pi^k(1) - d_\pi^k(2)| \le 1.5\,a^*, \quad |d_\pi^k(2)| \le 1.5\,a^*, \quad k = \overline{0,n}.$$

Пусть $C_\pi^{k_0} = \max\limits_{k=\overline{0,n}} C_\pi^k$. Определим перестановку π_1 :

$$\pi_1(j) = \begin{cases} \pi(j+k_0), & j \le n-k_0, \\ \pi(j+k_0-n), & j > n-k_0. \end{cases}$$

Тогда $$C_{\pi_1}^k \le 0, \quad k = \overline{0,n},$$

$$d_{\pi_1}^k(1) - d_{\pi_1}^k(2) \le 3a^*, \quad k = \overline{0,n},$$

$$d_{\pi_1}^k(2) \le 3a^*, \quad k = \overline{0,n},$$

откуда вытекает оценка

$$T(P_{\pi_1}) \le A^* + 3a^* + 3a^* + 3a^* = A^* + 9a^*.$$

Поступила в ред.-изд.отдел
I апреля I98I г.

Л и т е р а т у р а

I. Севастьянов С.В. Приближенные алгоритмы в задачах Джонсона и суммирования векторов. - В кн.: Методы оптимального управления (Управляемые системы), Новосибирск, 1980, с.64-73.

2. Севастьянов С.В. Оценки и свойства функций Штейница. - В кн.: Методы дискретного анализа в исследовании функциональных систем. Новосибирск, I98I, с. 59-73.

3. Бабушкин А.И., Башта А.А., Белов И.С. Построение календарного плана для задачи встречных маршрутов. - Кибернетика, 1977, № 4, с.I30-I35.

4. Бабушкин А.И., Башта А.Л., Белов И.С., Душин Б.И. Минимизация цикла работы поточной линии. - Автоматика и телемеханика, 1975, 6, с.I6I-I67.

5. Гринберг В.С., Севастьянов С.В. О величине константы Штейница. - Функцион. анализ и его прил., 1980, I4, вып.2, с.56-57.

6. Севастьянов С.В. К задаче компактного суммирования векторов. - В кн.: Дискретный анализ, вып.33, Новосибирск,1979, с.77-89.

7. Бурков В.Н., Ланда Б.Д., Ловецкий С.Е. и др. Сетевые модели и задачи управления. - М.: Сов.радио, 1967,-I44с.

8. Левнер Е.В. Сетевой подход к задачам теории расписаний. - В кн.: Исследования по дискретной математике. -М.: Наука, 1973, с.I35-I50.

9. Севастьянов С.В. О приближенном решении задачи календарного распределения. - В кн.: Методы оптимального управления (Управляемые системы), Новосибирск, 1980, с.49-63.

I0. Душин Б.И. Замечание к алгоритму в одномаршрутной задаче Джонсона. - Кибернетика, 1980, 2, с.I29-I3I.

11. Szwarc W. Solution of the Akers-Friedman Problem.- Oper. Res.,1960, 8, p.782-788.

12. Mitten L.G. A Scheduling Problem. - Journ. of Industrial Engeneering, 1959, N 10, p.131-134.

13. Nabeshima I. Sequencing on Two Machines with Start Lag and Stop Lag.- Journal of the Oper. Res. Soc. of Japan, 1963, 5, N 3, p.97-101.