Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1982 г., вып.22

УДК 621.317.080

О РАЗМЕЩЕНИИ ТОЧЕК НА СФЕРЕ

Б.А.Беседин

Пусть G – диагональная $(n\times n)$-матрица с элементами $q_K>0$, $K=\overline{1,n}$, а $X=(x_{Kj})$- произвольная $(n\times m)$-матрица, $n\geq m\geq 2$. Строки и столбцы матрицы X обозначим соответственно вектор-столбцами $x_K\in E^m$, $x^i\in E^n$.

I. Будем искать

$$\max_X |X^+GX| \qquad /I/$$

при условиях

$$x_K^+x_K=1,\ K=\overline{1,n}, \qquad /2/$$

где $(+)$ – знак транспонирования, $|\cdot|$ – определитель.

Задача /I/, /2/ близка по содержанию к задачам оптимального планирования эксперимента [I] и возникает при $\mathcal{D}$-оптимальном размещении n приборов, измеряющих с аддитивными ошибками расстояния до точки $\theta\in E^m$, по результатам которых строится наилучшая линеаризованная статистическая оценка [2] вектора θ.

Целью настоящей заметки является опробование одного подхода к решению подобных задач. Суть его состоит в сведении исходной задачи к более простой экстремальной задаче с функционалом, являющимся верхней (нижней) гранью исходного функционала, с последующим доказательством того, что на множестве решений задачи-оценки достигается точная грань.

В дальнейшем в /I/ используются две формы записи определителя:

$$|X^+GX|=\Big|\sum_{K=1}^{n} q_K x_K x_K^+\Big|, \qquad /3/$$

$$|X^+GX|=|(x^{i+}Gx^j)|, \qquad /4/$$

где $(x^{i+}Gx^j)$ - $(m\times m)$-матрица.

В форме /3/ задачу /I/, /2/ естественно интерпретировать как задачу $\mathcal{D}$-оптимального размещения n точек $\{x_K\}$ на m-мерной единичной сфере /2/, а в форме /4/ - как задачу о максимальном объеме [3] системы векторов $\{x^i\}$ при ограничениях /2/.

Отметим некоторые свойства решения задачи /I/, /2/. С помощью /3/ легко устанавливается

Л е м м а I. Если совокупность векторов $\{x_k\}$ является решением задачи /I/, /2/, то решением является а) любая совокупность, симметричная по части компонент; и б) совокупность $\{\bar{x}_k\}$, порождаемая произвольным вращением T в E^m, $\bar{x}_k = Tx_k$, $k=\overline{1,n}$.

В силу непрерывности вращения T имеем

С л е д с т в и е. Среди множества решений задачи /I/, /2/ существует такое решение $\{x_k^*\}$, что $x_{kj}^* \neq 0$ для всех $k=\overline{1,n}, j=\overline{1,m}$.

Л е м м а 2. Пусть P - диагональная $(n\times n)$-матрица с элементами и их суммой соответственно

$$p_k \geq 0,\ k=\overline{1,n};\ \ tr\,P = 1\ . \qquad /5/$$

Существуют целые числа n и m, $n \geq m \geq 2$, и матрица P из множества /5/ такие, что следующая система уравнений совместна:

$$x^{i+} P x^j = 0, \quad i \neq j; \qquad /6/$$

$$x^{i+} P x^i = \frac{1}{m}, \quad i = \overline{1,m}; \qquad /7/$$

$$x_k^+ x_k = 1, \quad k = \overline{1,n}. \qquad /8/$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Среди множества /5/ матриц P выберем $P = \frac{1}{n} I_n$, где I_n - единичная $(n\times n)$-матрица. (В приведенной выше интерпретации задачи этот выбор соответствует условию равноточности измерительных приборов.) Тогда при $n = m \geq 2$ уравнениям /6/-/8/ удовлетворяет любая ортогональная $(n\times n)$ -матрица X. При $n > m = 2$ уравнения /6/-/8/ совместны и решением являются координаты вершин правильного n-угольника, вписанного в единичный круг. Также непосредственно проверяется, что при $m=3$ и $n = 4,6,8,12,20$ уравнениям /6/-/8/ удовлетворяют координаты вершин правильных многогранников, вписанных в 3-мерную единичную сферу.

Построим класс решений для случаев $n > m > 2$. Проведем замену переменных $x^i = (mP)^{-\frac{1}{2}} z^i$, что равнозначно $x_k = (mp_k)^{-\frac{1}{2}} z_k$. Уравнения /6/-/8/ перепишем в следующем виде:

$$z^{i+} z^j = 0, \ j \neq i; \qquad /9/$$

$$z^{i+} z^i = 1, \ i = \overline{1,m}; \qquad /10/$$

$$z_k^+ z_k = m p_k, \ k = \overline{1,n}. \qquad /11/$$

Рассмотрим $(n\times n)$-матрицу U_n с элементами $u_{is} = \pm 1$, определяемую равенством $U_n^+ U_n = n I_n$. Существование таких матриц доказано для некоторых подмножеств целых чисел $n \equiv 0 (mod\,4)$ (см., например [3, с.144] и [4]). Нетрудно проверить, что уравнения

/9/-/II/ выполняются при $p_K = 1/n$ и $z_{Ki} = u_{Ki}/\sqrt{m}$, а следовательно, система /6/-/8/ при $P=(1/n)I_n$ имеет решение $x_{Ki} = u_{Ki}/\sqrt{m}$, $K=\overline{1,n}$, $i=\overline{1,m}$. Доказательство закончено.

Свойства решения уравнений /6/-/8/ аналогичны свойствам решения задачи /I/, /2/:

Лемма 3. Если $\{x_K\}$ удовлетворяет /6/-/8/, то и любая другая совокупность векторов, порождаемая из $\{x_K\}$, как указано в лемме I, удовлетворяет этим уравнениям.

Доказательство. Не очевидна только инвариантность уравнений /6/, /7/ относительно вращений T векторов $\{x_K\}$. Рассмотрим преобразование $\bar{x}_K = T\cdot x_K$, или в покомпонентной записи

$$\bar{x}_{Ki} = \sum_{l=1}^{m} t_{il}\cdot x_{Kl}.$$

Пусть $\{x_K\}$ - решение системы /6/-/8/. Тогда с учетом ортогональности матрицы T имеем

$$\bar{x}^{i+} P \bar{x}^{j} = \sum_{K=1}^{n} p_K \Big(\sum_{l=1}^{m} t_{il}\, x_{Kl}\Big)\Big(\sum_{s=1}^{m} t_{js}\, x_{Ks}\Big) =$$

$$= \sum_{l=1}^{m}\sum_{s=1}^{m} t_{il}\, t_{js}\,(x^{l+} P x^{s}) = \frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m} t_{il}\, t_{jl} = \begin{cases} 0, & i\neq j, \\ \frac{1}{m}, & i=j, \end{cases}$$

что и доказывает утверждение.

Лемма 4. Пусть матрица

$$P = (\operatorname{tr} G)^{-1}\cdot G. \qquad /I2/$$

Для того чтобы $(n\times m)$-матрица X доставляла

$$\max_{X} \prod_{i=1}^{m} x^{i+} G x^{i} \qquad /I3/$$

при условиях

$$x_K^{+} x_K = 1,\; K=\overline{1,n}, \qquad /I4/$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$x^{i+} P x^{i} = \frac{1}{m},\; i=\overline{1,m};$$
$$x_K^{+} x_K = 1,\; K=\overline{1,n}. \qquad /I5/$$

Доказательство. Используя неравенство между арифметическим и геометрическим средними, с учетом /I4/ получаем

$$\prod_{i=1}^{m} x^{i+} G x^{i} \leq \Big(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x^{i+} G x^{i}\Big)^{m} = \Big(\frac{1}{m}\sum_{K=1}^{n} q_K\, x_K^{+} x_K\Big)^{m} =$$

$$= \Big(\frac{1}{m}\sum_{K=1}^{m} q_K\Big)^{m} = \Big(\frac{1}{m}\operatorname{tr} G\Big)^{m}. \qquad /I6/$$

Нетрудно видеть, что система /I5/ совместна. Для любого ее решения $\{\bar{x}_k\}$ имеем

$$\prod_{i=1}^{m} \bar{x}^{i+} G \bar{x}^{i} = \left(\frac{1}{m} \operatorname{tr} G\right)^{m}. \qquad /I7/$$

Из /I6/, /I7/ непосредственно вытекает, что

$$\max_{X} \prod_{i=1}^{m} x^{i+} G x^{i} = \prod_{i=1}^{m} \bar{x}^{i+} G \bar{x}^{i} = \left(\frac{1}{m} \operatorname{tr} G\right)^{m}. \qquad /I8/$$

Теперь утверждение леммы следует из /I8/ и того факта, что равенство в /I6/ достигается только при равных сомножителях.

Т е о р е м а I. Пусть P и G - диагональные матрицы, связанные соотношением /I2/. Тогда при совместности уравнений /6/-/8/ множество решений задачи /I/, /2/ равно множеству решений /6/-/8/, при этом

$$\max_{X} \left(|X^{+} G X| \;\middle|\; x_k^{+} x_k = 1, \ k = \overline{1,n} \right) = \left(\frac{1}{m} \operatorname{tr} G\right)^{m}. \qquad /I9/$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При условиях /2/ существует, очевидно, матрица X, для которой $|X^{+} G X| > 0$, т.е. $X^{+} G X$ - симметричная положительно определенная $(m \times m)$-матрица. Согласно неравенству Адамара [5] , для определителя в форме /4/ имеем

$$|(x^{i+} G x^{j})| \leq \prod_{i=1}^{m} x^{i+} G x^{i} \qquad /20/$$

для всех $x^{i}, x^{j} \in E^{m}, \ i,j = \overline{1,m}, \ n \geq m \geq 2$.

Следовательно, решение задачи /I3/, /I4/ дает верхнюю по функционалу оценку для задачи /I/, /2/.

Нетривиальное равенство в /20/ достигается лишь при условиях

$$x^{i+} G x^{j} = 0, \quad i \neq j, \quad i,j = \overline{1,m}. \qquad /2I/$$

Очевидно, что если множество решений /I5/ задачи /I3/, /I4/ содержит матрицу X, удовлетворяющую и условиям /2I/, то задачи /I/, /2/ и /I3/, /I4/ эквивалентны. Иначе говоря, в случаях совместности системы /6/-/8/ множество ее решений совпадает с множеством решений исходной экстремальной задачи.

Выражение /I9/ следует из /I8/ и /20/.

Теорема доказана.

2. Рассмотрим задачу об A-оптимальном [I] размещении точек на сфере, которая имеет прежнюю интерпретацию.

Будем искать

$$\min_{X} \operatorname{tr} (X^{+} G X)^{-1} \qquad /22/$$

при условиях

$$x_k^{+} x_k = 1, \quad k = \overline{1,n}. \qquad /23/$$

Для решения этой задачи потребуется следующая

Лемма 5. Если $(m \times m)$-матрица A положительно определенная, то

$$tr\, A^{-1} \geq \frac{m^2}{tr\, A} \qquad /24/$$

и равенство достигается только при одинаковых собственных значениях $\lambda_i(A) \equiv \lambda$.

Доказательство. Согласно неравенству между арифметическим и гармоническим средними при положительных a_i имеем

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} a_i \geq \frac{m}{\sum\limits_{i=1}^{m} a_i^{-1}},$$

где равенство возможно только при $a_i \equiv a > 0$. По условию леммы, $\lambda_i(A) > 0$, $i = \overline{1,m}$, поэтому

$$tr\, A^{-1} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\lambda_i(A)} \geq \frac{m^2}{\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i(A)} = \frac{m^2}{tr\, A},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2. Пусть P и G – диагональные матрицы, связанные соотношением /12/. Тогда при совместности системы /6/-/8/ множество решений задачи /22/, /23/ совпадает с множеством решений уравнений /6/-/8/, при этом

$$\min_X \left[tr(X^+ G X)^{-1} \mid x_k^+ x_k = 1,\ k = \overline{1,n}\right] = \frac{m^2}{tr\, G} \qquad /25/$$

Доказательство. Неравенство /24/ позволяет построить для экстремальной задачи /22/, /23/ задачу-оценку: при условиях /23/ справедливо

$$\min_X tr(X^+ G X)^{-1} \geq \min_X \frac{m^2}{\sum\limits_{i=1}^{m} x^{i+} G x^i}.$$

Учитывая /23/, имеем:

$$\sum_{i=1}^{m} x^{i+} G x^i = \sum_{k=1}^{n} q_k x_k^+ x_k = \sum_{k=1}^{n} q_k = tr\, G.$$

Следовательно,

$$\min_X \left(\frac{m^2}{\sum\limits_{i=1}^{m} x^{i+} G x^i} \Big/ x_k^+ x_k = 1,\ k = \overline{1,n}\right) = \frac{m^2}{tr\, G}.$$

В задаче-оценке и задаче /22/, /23/ множества решений и оптимальные значения совпадают, если найдется диагональная матрица X^+GX с элементами $(1/m)\,tr\,G$. Это равнозначно совместности системы /6/-/8/. Доказательство закончено.

Заметим, что при условиях /6/-/8/

$$X^+GX = \frac{1}{m}(tr\,G)I_m,$$

поэтому

$$\alpha(X^+GX)^{-1} = (X^+GX)^{-2}, \quad tr(X^+GX)^{-1} = \alpha m, \quad \alpha = \frac{m}{tr\,G}.$$

Эти равенства являются аналогами условий одновременного $\mathcal{D}$- и Δ-оптимального размещения в классе непрерывных планов эксперимента, которые выводятся на базе теорем эквивалентности непрерывных планов и предполагают еще максимизацию (минимизацию) по матрице (см. [I, с. 150]).

Сведение исходной экстремальной задачи к задаче-оценке упрощает решение и в ряде других случаев размещения точек. Это особенно ценно в задачах оптимального размещения измерительных приборов и планирования экспериментов, когда число размещаемых точек невелико и переход к непрерывным планам недопустим.

Поступила в ред.-изд.отдел
II марта 1982 г.

Литература

I. Федоров В.В. Теория оптимального эксперимента.- М.: Наука, 1971. - 312 с.

2. Абдулаев Ш.-С.О., Беседин Б.А. О синтезе оптимальных фильтрующих и сглаживающих информационно-измерительных систем. - Автометрия, 1974, № 2, с. 10-18.

3. Глазман И.М., Любич Ю.И. Конечномерный линейный анализ.- М.: Наука, 1969. - 475 с.

4. Бродский В.З. Введение в факторное планирование эксперимента. - М.: Наука, 1976. - 222 с.

5. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. - М.: Мир, 1965. - 276 с.