Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1982 г., вып.22
УДК 519.95:517.27

СОЧЕТАНИЕ МЕТОДА ВОЗМУЩЕНИЙ С МЕТОДОМ ШТРАФНЫХ ФУНКЦИЙ

Р.М.Ларин

Рассматривается задача минимизации функции с ограничениями типа равенств и неравенств. Путем специального преобразования [I] эту задачу можно включать в однопараметрическое семейство оптимизационных задач таких, что при некотором значении параметра, которое удобно назвать начальным, решение известно. Используя непрерывную зависимость траектории минимумов от параметра, в ряде случаев удается получить решение исходной задачи, двигаясь от известной начальной точки вдоль этой траектории.

В данной статье излагаются некоторые результаты, связанные с применением метода возмущений [I] в сочетании с методом штрафных функций. Отличие рассматриваемого подхода от применяемых другими авторами (например [2-5]), с нашей точки зрения, заключается в следующем:

I) вспомогательная параметрическая задача обладает тем преимуществом, что начальная точка есть внутренняя точка допустимого множества и известна до начала вычислений, что особенно важно для таких методов, как метод проектирования градиента, "метод центров", метод внутренних штрафных функций и т.д.;

2) известна оптимальная начальная точка, более того, она может быть задана вычислителем заранее, что существенно при использовании методов регуляризации и методов штрафных функций;

3) допустимые множества параметризованной задачи строятся так, что при некоторых естественных условиях они удовлетворяют таким условиям регулярности, как условие Слейтера, условие совпадения замыкания внутренности допустимого множества с самим множеством, даже в случае, когда исходная задача этим условиям не удовлетворяет.

Ряд других особенностей будет рассмотрен в ходе дальнейшего изложения.

Статью можно рассматривать как дальнейшее развитие методов штрафных функций.

§ I. Постановка задачи и основные обозначения

Исходная задача (задача A_1) заключается в отыскании точки $x^* \in R^n$, доставляющей минимум функции $f(x)$ при ограничениях

$$g_j(x) \leq 0, \ j=\overline{1,m}; \ h_j(x)=0, \ j=\overline{1,p}.$$

Здесь $f(x)$, $g_j(x)$, $j=\overline{1,m}$, $h_j(x)$, $j=\overline{1,p}$ - функции, определенные и непрерывные в R^n.

Обозначим множество допустимых решений задачи A_1 через M_1, т.е.

$$M_1 \triangleq \{x \in R^n \mid g_j(x) \leq 0, \ j=\overline{1,m}; \ h_j(x)=0, \ j=\overline{1,p}\},$$

а множество оптимальных решений через M_1^*:

$$M_1^* \triangleq \{x \in R^n \mid x \in M_1, \ f(x)=\min_{y \in M_1} f(y)\}.$$

Здесь и далее знак "$\triangleq$" означает "равен по определению". Включим задачу A_1 в однопараметрическое семейство задач оптимизации следующего вида: $\min\limits_{x \in M(t)} F(x,t)$, где t - параметр, $0 \leq t \leq 1$;

$$F(x,t) \triangleq \varphi_1(t) f(x) + \varphi_0(t)\Omega(x);$$

$$M(t) \triangleq \{x \in R^n \mid \alpha_j(t) g_j(x) - \beta_j(t) \leq 0, \ j=\overline{1,m}; \ \alpha_{j+m}(t) h_j(x) - \beta_{j+m}(t) \leq 0,$$
$$-\alpha_{j+m}(t) h_j(x) - \beta_{j+m}(t) \leq 0, \ j=\overline{1,p}\}. \qquad /1/$$

Здесь $\Omega(x)$ - сильно выпуклая в R^n функция. В дальнейшем рассматривается $\Omega(x)=\|x-x_0\|^2$, где $\|\cdot\|$ - евклидова норма, а x_0 - заданная точка.

Функции $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, $\alpha_j(t)$ и $\beta_j(t)$, $j=\overline{1,m+p}$, задаются вычислителем. Будем считать, что они удовлетворяют следующему условию:

I) $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, $\alpha_j(t)$, $\beta_j(t)$, $j=\overline{1,m+p}$, - непрерывные неотрицательные функции, определенные при $t \in [0,1]$, причем $\varphi_0(0)=1$, $\varphi_0(1)=0$, $\varphi_1(0)=0$, $\varphi_1(1)=1$, $\alpha_j(0)=0$, $\alpha_j(1)=1$, $\beta_j(0)=1$, $\beta_j(1)=0$, $j=\overline{1,m+p}$.

В силу этого условия, $F(x,0) \equiv \Omega(x)$, $M(0) \equiv R^n$, т.е. при $t=0$ получаем задачу (задачу A_0) минимизации $\|x-x_0\|^2$ в R^n, решение которой единственно и равно x_0; при $t=1$ получается задача A_1.

Таким образом, задачу математического программирования A_1 можно включить в семейство задач $A(t)$, $0 \leq t \leq 1$, с известным решением при $t=0$, причем в качестве такого решения заранее можно выбрать произвольную точку из R^n.

З а м е ч а н и е I. Условие симметричности функций $\alpha_j(t)$ и $\beta_j(t)$ при замене ограничений-равенств на неравенства использовано для упрощения обозначений. Вместо неравенств

$$-\alpha_{j+m}(t) h_j(x) - \beta_{j+m}(t) \leq 0, \ j=\overline{1,p},$$

можно рассматривать следующие неравенства:

$$-\alpha'_{j+m}(t) h_j(x) - \beta'_{j+m}(t) \leq 0, \ j=\overline{1,p},$$

где функции $\alpha'_{j+m}(t)$ и $\beta'_{j+m}(t)$ удовлетворяют условию I, но, вообще говоря, не равны функциям $\alpha_{j+m}(t)$ и $\beta_{j+m}(t)$ соответственно.

З а м е ч а н и е 2. Вместо приведенных выше концевых условий можно рассматривать условия

$$\varphi_0(0) = \bar{\varphi}_0, \ \varphi_0(1) = 0, \ \varphi_1(0) = 0, \ \varphi_1(1) = \bar{\varphi}_1,$$

$$\alpha_j(0) = 0, \ \alpha_j(1) = \bar{\alpha}_j, \ \beta_j(0) = \bar{\beta}_j, \ \beta_j(1) = 0, \ j = \overline{1, m+p},$$

где $\bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}_1, \bar{\alpha}_j, \bar{\beta}_j$, $j = \overline{1, m+p}$, - заданные положительные числа, которые позволяют выравнивать численные значения складываемых величин. Например, при применении итеративного алгоритма [7] в качестве $\varphi_0^K(t)$ была использована функция с концевым условием $\bar{\varphi}_0^K = |f(x_0^K) - f(x_0^{K-1})|$: $\varphi_0^K(t) = (1-t)\bar{\varphi}_0^K$, $\varphi_1^K(t) = t$ (предложено Г.М.Заикиной). Это заметно повысило скорость сходимости алгоритма в окрестности минимума и точность решения. В рассматриваемых ниже примерах концевые условия тоже иногда варьируются, что позволяет получить более простой вид решений.

З а м е ч а н и е 3. Вместо одного семейства оптимизационных задач $A(t)$ с начальной точкой x_0 иногда приходится вводить множество таких семейств, задавая различные начальные точки. Пример таких семейств дан в [I]: они используются для борьбы с ошибками вычислений, возникающими при численном переходе из начальной точки в точку x^*, $x^* \in M_1^*$, по траектории $x(t)$, где $x(t)$ - решение задачи $A(t)$, $0 \le t \le 1$.

§ 2. Некоторые свойства множества $M(t)$

Предварительно для упрощения записи введем следующие обозначения:

$$\alpha_j(t) \triangleq \alpha_{j-p}(t), \ \beta_j(t) \triangleq \beta_{j-p}(t), \quad j = \overline{m+p+1, m+2p};$$

$$v_j(x) \triangleq \begin{cases} g_j(x), & j = \overline{1,m}; \\ h_{j-m}(x), & j = \overline{m+1, m+p}; \\ -h_{j-m-p}(x), & j = \overline{m+p+1, m+2p}; \end{cases}$$

$$v_j(x,t) \triangleq \alpha_j(t)\, v_j(x) - \beta_j(t), \quad j = \overline{1, m+2p}.$$

Пусть множество $M(t)$ имеет вид /I/. Тогда справедливы следующие:

У т в е р ж д е н и е I. Для включения $M_1 \subseteq M(t)$, $t \in [0,1]$, достаточно неотрицательности функций $\alpha_j(t)$ и $\beta_j(t)$, $j = \overline{1, m+p}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из неравенств $\alpha_j(t) \ge 0$, $\beta_j(t) \ge 0$, $j = \overline{1, m+p}$, и определения множеств M_1 и $M(t)$, если ограничения-равенства $h_j(x) = 0$ представить в виде неравенств $h_j(x) \le 0$, $-h_j(x) \le 0$,

У т в е р ж д е н и е 2. Пусть функции $\alpha_j(t)$, $-\beta_j(t)$, $j = \overline{1, m+p}$, удовлетворяют условию I и не убывают в области определения. Тогда имеет место включение $M(t_2) \subseteq M(t_1)$ при $0 \le t_1 \le t_2 \le 1$.

Доказательство. Пусть $x \in M(t_2)$, тогда $v_j(x,t_2) \triangleq \triangleq \alpha_j(t_2)v_j(x) - \beta_j(t_2) \leq 0$, $j=\overline{1,m+2p}$. Так как $\alpha_j(t_2) \geq \alpha_j(t_1) \geq 0$, $\beta_j(t_1) \geq \beta_j(t_2) \geq 0$ при $t_1 \leq t_2$, то при фиксированном j имеем неравенства

$$v_j(x) \leq \frac{\beta_j(t_2)}{\alpha_j(t_2)} \leq \frac{\beta_j(t_1)}{\alpha_j(t_1)},$$

если $\alpha_j(t_1) > 0$, т.е. точка x удовлетворяет ограничению $\alpha_j(t_1)v_j(x) - \beta_j(t_1) \leq 0$. Если же $\alpha_j(t_1)=0$, то все точки из R^n удовлетворяют этому неравенству. Таким образом, из условия $x \in M(t_2)$ следуют неравенства

$$\alpha_j(t_1)v_j(x) - \beta_j(t_1) \leq 0, \quad j=\overline{1,m+2p}.$$

Значит, $x \in M(t_1)$.

Утверждение 2 доказано.

Утверждение 3. Пусть $M_1 \neq \emptyset$ и $\alpha_j(t) \geq 0$, $\beta_j(t) > 0$, $j=\overline{1,m+p}$, при $0 \leq t < 1$. Тогда

$$M_0(t) \triangleq \{x \in R^n \mid v_j(x,t) < 0, \quad j=\overline{1,m+2p}\} \neq \emptyset,$$

и $M_1 \subseteq M_0(t)$ для всех $t \in [0,1)$.

Доказательство. Возьмем произвольную точку $x \in M_1$. Она удовлетворяет условиям $g_j(x) \leq 0$, $j=\overline{1,m}$, $h_j(x) \leq 0$, $-h_j(x) \leq 0$, $j=\overline{1,p}$. Зафиксируем значение параметра t, $0 \leq t < 1$. Так как $\beta_j(t) > 0$, а $\alpha_j(t) \geq 0$, то из написанных выше условий следуют строгие неравенства $\alpha_j(t)g_j(x) - \beta_j(t) < 0$, $j=\overline{1,m}$; $\alpha_{j+m}(t)h_j(x) - \beta_{j+m}(t) < 0$, $-\alpha_{j+m}(t)h_j(x) - \beta_{j+m}(t) < 0$, $j=\overline{1,p}$, т.е. $x \in M_0(t)$. Поскольку это верно для каждого $t \in [0,1)$, то $M_0(t) \neq \emptyset$ для всех $t \in [0,1)$. Так как x - произвольная точка множества M_1, сразу же устанавливаем, что $M_1 \subseteq M_0(t)$ для тех же значений параметра.

Утверждение 3 доказано.

Обозначим через $\mathring{M}(t)$ внутренность множества $M(t)$.

Следствие 2.1. Если выполнены условия утверждения 3, то $\mathring{M}(t) \neq \emptyset$ и $M_1 \subseteq \mathring{M}(t)$ для $t \in [0,1)$.

Доказательство очевидно, так как $M_0(t) \subseteq \mathring{M}(t)$.

Обозначим через $\bar{\mathring{M}}(t)$ замыкание множества $\mathring{M}(t)$.

Утверждение 4. Пусть выполнены условия утверждения 3 и, кроме того, функции $g_j(x)$, $j=\overline{1,m}$, квазивыпуклы, а $h_j(x)$ ($j=\overline{1,p}$)-линейны, тогда $\bar{\mathring{M}}(t) = M(t)$ для всех $t \in [0,1)$.

Если, кроме того, функции $g_j(x)$, $j=\overline{1,m}$, выпуклы, то $M_0(t) = \mathring{M}(t)$, $\bar{M}_0 = M(t)$.

Доказательство. Зафиксируем значение параметра t, $0 \leq t < 1$. Множество $M(t)$ выпукло. В силу утверждения 3, оно имеет непустую внутренность. Для всякого выпуклого множества, имеющего внутренние точки, справедливо равенство $\bar{\mathring{M}}(t) = M(t)$ ([6, теорема 6.1] и [7, с. 38]).

Пусть теперь $g_j(x)$, $j=\overline{1,m}$, выпуклы. Поскольку, в силу утверждения 3, $M_0(t)\neq\emptyset$ при $t\in[0,1)$, то равенства $M_0(t)=\overset{\circ}{M}(t)$, $\overline{M}_0(t)=M(t)$ следуют из [6, теорема 7.6].

Утверждение 4 доказано.

Утверждение 5. Пусть выполнено условие I, тогда многозначное отображение $t\to M(t)$, определенное равенством /I/, замкнуто.

Доказательство следует из определения замкнутости многозначного отображения ([6], определение 4.4), так как функции $v_j(x,t)$, $j=\overline{1,m+2p}$, непрерывны по x и t.

§ 3. Метод внутренних штрафных функций

Одним из основных недостатков метода внутренних штрафных функций (метода барьеров) является необходимость иметь внутреннюю точку допустимого множества в начале вычислений, причем эта точка должна обеспечивать минимум соответствующей штрафной функции. Нахождение такой точки составляет основной объем вычислений [3, с. 186–187]. Кроме того, классический метод барьеров применим, если множество M_1 имеет не только внутренние точки, но и, более того, $\overset{\circ}{M}_1=M_1$ [5, с. 229–231]. Ниже излагается метод внутренних штрафных функций, который позволяет в ряде случаев устранить отмеченные недостатки.

Построим штрафную функцию следующего вида:

$$\Phi(x,t)\triangleq\varphi_1(t)f(x)+\varphi_0(t)\Omega(x)+\beta(t)\Psi(x,t), \qquad /2/$$

где $\Psi(x,t)$ – штрафная функция множества $M(t)$, непрерывная на $\overset{\circ}{M}(t)$ и неограниченно возрастающая при приближении к границе множества $M(t)$ для каждого $t\in[0,1]$, а $\beta(t)>0$ при $t\in[0,1)$ и $\lim\limits_{t\to 1}\beta(t)=0$. Будем считать, что $\Psi(x,t)=K(v(x,t))$, где $v(x,t)=(v_1(x,t),\ldots$ $\ldots, v_{m+2p}(x,t))$, и $K(v)$ – выпуклая возрастающая функция от v при $v<0$.

В качестве функций $\Psi(x,t)$ можно рассматривать, например, такие, ставшие уже классическими функции:

$$\Psi_1(x,t)=-\sum_{j=1}^{m+2p}\frac{1}{v_j(x,t)}, \quad \Psi_2(x,t)=-\sum_{j=1}^{m+2p}\ln(-v_j(x,t)).$$

Вариантом аналогичных утверждений [3, следствие 8] и [5, лемма 2.I] является следующая

Лемма I. Пусть S – замкнутое множество с непустой внутренностью $\overset{\circ}{S}$ и $G(x)$ – сильно выпуклая функция, непрерывная в $\overset{\circ}{S}$ и неограниченно возрастающая при приближении к границе S. Тогда существует единственная точка $\bar{x}\in\overset{\circ}{S}$ такая, что $G(\bar{x})=\min\limits_{x\in\overset{\circ}{S}}G(x)$.

Дополнительно к условию I введем в рассмотрение следующие условия:

2) $\varphi_0(t)>0$, $\varphi_1(t)>0$, $\beta_j(t)>0$, $j=\overline{1,m+p}$, при $t\in(0,1)$;

3) $\beta(t)$ - непрерывная функция, определенная на $[0,1]$, причем $\beta(t)>0$ при $t\in[0,1)$, $\beta(0)=1$, $\beta(1)=0$;

4) существует такое t' , $0\le t'<1$, что $\Psi(x,t)\geq 0$ для всех $x\in \overset{\circ}{M}(t)$ и $t\in[t',1]$;

5) для каждого фиксированного $x\in M_1$ справедливо

$$\lim_{t\to 1}\beta(t)\Psi(x,t)=0$$

(здесь и далее пределы по t рассматриваются только в области определения $[0,1]$);

6) $f(x)$, $g_j(x)$, $j=\overline{1,m}$, - выпуклые и непрерывные функции, а $h_j(x)$, $j=\overline{1,p}$, - линейные функции, определенные в R^n;

7) $M_1^*\neq\emptyset$;

8) функции $\Phi(x,t)$, $\Phi'_{x_i}(x,t)$, $\Phi''_{x_it}(x,t)$ и $\Phi''_{x_ix_j}(x,t)$, $i,j=\overline{1,n}$, непрерывны на $\overset{\circ}{M}(t)$ при $t\in[0,1]$;

9) существует решение $\bar{x}(t)$ уравнения

$$\frac{dx}{dt}=-\left(\Phi''_{xx}(x,t)\right)^{-1}\Phi''_{xt}(x,t),\ x(0)=x_0, \qquad /3/$$

определенное при $t\in[0,1)$; $\lim\limits_{t\to 1}\bar{x}(t)=\bar{x}(1)$, $\|\bar{x}(1)\|<\infty$.

Как показывают конкретно выбранные функции, условия I - 5 не являются ограничительными. Положим, например, $\varphi_0(t)=1-t$, $\varphi_1(t)=t$, $\alpha_j(t)=t$, $\beta_j(t)=1-t$, $j=\overline{1,m+p}$, $\beta(t)=(1-t)^2$. Очевидно, что данные функции удовлетворяют условиям I - 3 . Если взять $\Psi(x,t)\equiv\Psi_1(x,t)$, то условие 4 удовлетворяется при всех $t\in[0,1]$.

Покажем теперь, что выбранные нами функции обеспечивают равенство $\lim\limits_{t\to 1}\beta(t)\Psi(x,t)=0$, если $x\in M_1$. Обозначим $\Psi_j(x,t)\triangleq -\dfrac{1}{v_j(x,t)}$ и рассмотрим $\lim\limits_{t\to t}\beta(t)\Psi_j(x,t)$.

Пусть $1\le j\le m$, тогда

$$\lim_{t\to 1}\beta(t)\Psi_j(x,t)=\lim_{t\to 1}\frac{(1-t)^2}{1-t-tg_j(x)} ,$$

где $x\in M_1$, т.е. $g_j(x)\le 0$. Если $g_j(x)=0$, то очевидно, что $\lim\limits_{t\to 1}\beta(t)\Psi_j(x,t)=\lim\limits_{t\to 1}(1-t)=0$. При $g_j(x)<0$ также получаем предел, равный нулю, поскольку $1-t-tg_j(x)>0$.

Аналогично убеждаемся, что $\lim\limits_{t\to 1}\beta(t)\Psi_j(x,t)=0$ для $j=\overline{m+1,m+2p}$ и $x\in M_1$. Значит, $\lim\limits_{t\to 1}\beta(t)\Psi(x,t)=0$ для всех $x\in M_1$, и условие 5 выполнено. В рассматриваемом примере при логарифмической функции штрафа для выполнения условия 5 достаточно взять $\beta(t)=(1-t)^{\tau}$, где $\tau>0$.

Докажем теперь следующее основное утверждение данного параграфа.

Т е о р е м а I. Пусть функция $\Phi(x,t)$ определена равенством /2/ и выполнены условия I - 3, 6 - 9. Тогда $\Phi(\bar{x}(t),t)=\min\limits_{x\in \mathring{M}(t)}\Phi(x,t)$, $t\in[0,1)$, $\bar{x}(1)\in M_1^*$. Пусть, кроме того, выполнены условия 4, 5. Тогда

$$\lim_{t\to 1}\Phi(\bar{x}(t),t)=f(\bar{x}(1)).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция $\Phi(x,t)$, определенная равенством /2/, является сильно выпуклой функцией по x при $t\in[0,1)$, так как она представляет собой сумму выпуклых функций $f(x)$, $\Psi(x,t)$ (см. [3, лемма II]) и сильно выпуклой функции с неотрицательными коэффициентами, причем $\varphi_0(t)>0$.

Обозначим через $\tilde{x}(t)$ решение задачи $\min\limits_{x\in\mathring{M}(t)}\Phi(x,t)$. Согласно утверждению 3 и лемме I, такое решение существует и единственно для каждого $t\in[0,1)$.

Для решения $\bar{x}(t)$ системы /3/ после интегрирования получим

$$\Phi'_x(\bar{x}(t),t)=0,\quad t\in[0,1), \qquad /4/$$

так как $\Phi'_x(x_0,0)=0$.

Отсюда следует, что $\bar{x}(t)\in\mathring{M}(t)$ для $t\in[0,1)$. Действительно, предположим, что $\bar{x}(t')\notin\mathring{M}(t')$ при $t'<1$. Поскольку $\bar{x}(0)=x_0\in\mathring{M}(0)$, траектория $\bar{x}(t)$ непрерывна, как решение системы /3/, а многозначное отображение $t\to M(t)$ замкнуто (утверждение 5), то для некоторого t'', $0<t''\le t'$, точка $x(t'')$ принадлежит границе множества $M(t'')$, что противоречит равенствам /4/.

Множество $M(t)$ выпукло и, следовательно, связно, а $\bar{x}(t)\in\mathring{M}(t)$. Отсюда и из соотношений /4/ в силу единственности $\tilde{x}(t)$ следует, что $\bar{x}(t)=\tilde{x}(t)$ при $t\in[0,1)$, т.е. $\Phi(\bar{x}(t),t)=\min\limits_{x\in\mathring{M}(t)}\Phi(x,t)$.

Поскольку отображение $t\to M(t)$ замкнуто, функция $\bar{x}(t)$ непрерывна и $\bar{x}(t)\in\mathring{M}(t)\subset M(t)$, $t\in[0,1)$, то получаем $\bar{x}(1)\in M_1$. Покажем, что $\bar{x}(1)\in M_1^*$. Пусть $\bar{x}(1)\notin M_1^*$. Тогда найдется точка $y\in M_1^*$ такая, что $f(y)<f(\bar{x}(1))$. В силу непрерывности существует t', $0<t'<1$, такое, что $f(y)<f(\bar{x}(t))$ при $t\in[t',1]$. Отсюда сразу получаем, что $\varphi_1(t)f(y)<\varphi_1(t)f(\bar{x}(t))$, так как $\varphi_1(t)>0$ при $t>0$. Далее, учитывая, что $\varphi_0(t)$, $\beta(t)$ - непрерывные функции, стремящиеся к нулю при $t\to 1$; $\Omega(y)$, $\Psi(y,t)$ ограничены, поскольку $y\in M_1^*\le$ $\le\mathring{M}(t)$ при $t\in[t',1)$; $\Omega(\bar{x}(t))\ge 0$; $\Psi(\bar{x}(t),t)>-\infty$, так как $\bar{x}(t)\in\mathring{M}(t)$, устанавливаем, что существует такое t'', $t'\le t''<1$, что

$$\varphi_1(t)f(y)+\varphi_0(t)\Omega(y)+\beta(t)\Psi(y,t)<\varphi_1(t)f(\bar{x}(t))+\varphi_0(t)\Omega(\bar{x}(t))+$$
$$+\beta(t)\Psi(\bar{x}(t),t)$$ при $t\in[t'',1)$. Данное неравенство можно записать в виде

$$\Phi(y,t)<\Phi(\tilde{x}(t),t),\quad t\in[t'',1),$$

а это противоречит определению $\tilde{x}(t)$. Значит, $\bar{x}(1)\in M_1^*$.

Пусть выполнены условия 4, 5. Так как $\bar{x}(1)\in M_1\subseteq \mathring{M}(t)$, то $\Phi(\bar{x}(t),t)\leq \Phi(\bar{x}(1),t), t\in[0,1)$. Перейдем к пределу в данном неравенстве при $t\to 1$. В силу условия 5 и конечности $\Omega(\bar{x}(1))$, получим неравенство

$$\lim_{t\to 1}\beta(t)\,\Psi(\bar{x}(t),t)\leq 0,$$

но $\beta(t)\Psi(\bar{x}(t),t)\geq 0$ вблизи точки $t=1$ (условия 3 и 4). Значит, $\lim\limits_{t\to 1}\beta(t)\Psi(\bar{x}(t),t)=0$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{t\to 1}\Phi(\bar{x}(t),t)=f(\bar{x}(1))$.

Теорема I доказана. Заметим, что условия теоремы I являются достаточными.

Для установления факта существования решения могут оказаться полезными следующие утверждения.

Т е о р е м а 2. Пусть выполнены условия I – 3, 5 и существует такое t_0, что $0<t_0\leq 1$ и

$$\overline{\lim_{t\to t_0}}\ \inf_{x\in M(t)}\ \Phi(x,t)=\infty .$$

Тогда $M_1=\emptyset$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $M_1\neq\emptyset$. Тогда, согласно утверждению 3, $\mathring{M}(t)\neq\emptyset,\ t\in[0,1)$, и $M_1\subseteq\mathring{M}(t)\subseteq M(t)$. Отсюда следует, что для $\bar{x}\in M_1$ и $t\in[0,1)$ имеем

$$\inf_{x\in M(t)}\ \Phi(x,t)\leq\Phi(\bar{x},t). \qquad /5/$$

Так как $\bar{x}\in\mathring{M}(t_0)$ при $t_0\in[0,1)$, $\lim\limits_{t\to t_0}\beta(t)\Psi(\bar{x},t)<\infty$,

$\lim\limits_{t\to t_0}\varphi_0(t)\Omega(\bar{x})<\infty$ и $\lim\limits_{t\to 1}\beta(t)\Psi(\bar{x},t)=0$, то, переходя к пределу в неравенстве /5/, получаем

$$\lim_{t\to t_0}\ \inf_{x\in M(t)}\ \Phi(x,t)<\infty .$$

Это противоречит условию теоремы. Значит, $M_1=\emptyset$.

Теорема 2 доказана.

С л е д с т в и е 3.I. Пусть выполнены условия I – 3, 5, 6, 8; $\bar{x}(t)$ – решение системы /3/, определенное при $t\in[0,t_0')$, где $0<t_0'\leq 1$, и $\lim\limits_{t\to t_0-0}\Phi(\bar{x}(t),t)=\infty, 0<t_0\leq t_0'$. Тогда $M_1=\emptyset$.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из теорем I и 2.

Рассмотрим примеры применения метода внутренних штрафных функций. Несмотря на простоту, они показывают применимость этого метода в случаях, ранее не рассматривавшихся. Так как уравнение /3/ удобно использовать при численном, а не аналитическом решении задачи, то в примерах решается уравнение $\Phi_x'(x,t)=0$, которое представляет собой первый интеграл уравнения /3/.

Пример I. $f(x)=x$, $M_1=\{x\in R^1\,|\,g_1(x)\equiv 1-x\leq 0\}$, $M_1^*=\{0\}$.

Пусть $\varphi_0(t)=1-t$, $\varphi_1(t)=t$, $\beta_1(t)=1-t$, $\alpha_1(t)=t$, $\beta(t)=(1-t)$ и

$\Psi(x,t) = \Psi_1(x,t)$, тогда $\Phi(x,t) = tx + (1-t)(x-x_0)^2 - (1-t)\ln(1-t-t(1-x))$. Из уравнения $\Phi'_x(x,t) = 0$ при $x_0 = 0$ получим решение

$$x(t) = 2t^2/(5t^2 - 6t + 2 + \sqrt{(5t^2-6t+2)^2 + 8t^3(1-t)}).$$

Очевидно, что $x(1) = 1$. Заметим, что $x_0 = 0 \notin M_1$.

Пример 2. $f(x) = -x$, $M_1 = \{x \in R^1 | g_1(x) \equiv x^2 \leq 0\}$, $M_1^* = \{0\}$.

В этом примере множество M_1 состоит из единственной точки. Пусть $x_0 = 1 \notin M_1$, $\Phi(x,t) = -2tx + (1-t)(x-1)^2 - (1-t)\ln(1-t-tx^2)$. Здесь $\varphi_1(t) = 2t$, а остальные функции определены как в примере I.

Для функции $x(t)$ получим уравнение

$$t(1-t)x^3 - tx^2 - (1-t)x + (1-t) = 0, \qquad /6/$$

которое можно решить в явном виде. Однако если учесть ограниченность множества $M(t)$ и, следовательно, $x(t)$ при $t \in (0,1]$, то, переходя к пределу в уравнении /6/ при $t \to 1$, получим $\lim\limits_{t \to 1} x(t) = 0$.

Пример 3. $f(x) = x$, $M_1 = \{x \in R^1 | g_1(x) \equiv x^2 + 1 \leq 0\} = \emptyset$.

Воспользовавшись штрафной функцией

$$\Phi(x,t) = 2tx + (1-t)x^2 - (1-t)\ln(1-t-t(x^2+1)), \quad x_0 = 0,$$

для определения функции $x(t)$ получим уравнение

$$t(1-t)x^3 + t^2x^2 - (1-t)^2x - t(1-2t) = 0.$$

Поскольку $M(\frac{1}{2}) = \{0\}$ и $M(t) = \emptyset$ при $t > \frac{1}{2}$, то $\lim\limits_{t \to \frac{1}{2}-0} x(t) = 0$. При этом $\lim\limits_{t \to \frac{1}{2}-0} \Phi(x(t),t) = \infty$.

Пример 4. $f(x) \equiv 0$, $M_1 = \{x \in R^1 | g_1(x) \equiv e^{-x} \leq 0\} = \emptyset$.

Введя функцию $\Phi(x,t) = (1-t)x^2 - (1-t)\ln(1-t-te^{-x})$, $x_0 = 0$, для определения функции $x(t)$ получим уравнение $2(1-t)xe^x - t(1+2x) = 0$. Отсюда $\lim\limits_{t \to 1} x(t) = \infty$, так как $M(t) = [-\ln\frac{1-t}{t}, \infty)$ при $t > 0$. Из уравнения также следует, что $t = 2xe^x/(1+2x+2xe^x)$. Это взаимно-однозначная функция при $x \geq 0$. Значит, $\lim\limits_{t \to 1} \Phi(x(t),t) = \lim\limits_{x \to \infty} \Phi(x, t(x))$.

Теперь уже нетрудно показать, что $\lim\limits_{t \to 1} \Phi(x(t),t) = 0$.

Таким образом, условия теоремы 2 и следствия 3.I являются только достаточными для того, чтобы M_1 было пусто.

§ 4. Метод внешних штрафных функций

По методу внешних штрафных функций (методу внешней точки) необходимо найти начальную точку, которая доставляет минимум функции штрафа в R^n. Очевидно, что этот недостаток может быть устранен с помощью описанного приема. Однако метод внешней точки имеет одно преимущество перед методом барьеров: при заданном

значении параметра штрафа в штрафной функции, вообще говоря, присутствуют не все ограничения задачи, а только некоторые из них и, кроме того, любая точка является допустимой в процессе вычислений.

Рассмотрим следующую штрафную функцию [2]:

$$\Phi(x,t) \triangleq \beta(t)\,[\varphi_1(t)\,f(x) + \varphi_0(t)\,\Omega(x)] + \theta(x,t), \qquad /7/$$

где $\theta(x,t)$ – штрафная функция множества $M(t)$, которая удовлетворяет условию

$$\theta(x,t) > 0 \quad \text{при } x \notin M(t) \text{ и } \theta(x,t) = 0 \text{ , если } x \in M(t). \qquad /8/$$

Функция $\theta(x,t)$ может быть задана, например, следующим образом:

а) $$\theta_1(x,t) \triangleq \gamma(t)\left[\sum_{j=1}^{m}(max(0,g_j(x)))^s + \sum_{j=1}^{p} h_j^2(x)\right], \qquad /9/$$

где $s>0$, $\gamma(t)$ – непрерывная функция и $\gamma(0)=0$, $\gamma(t)>0$ при $t \in (0,1]$;

б) $$\theta_2(x,t) \triangleq \sum_{j=1}^{m+2p}(max\,(0, v_j(x,t)))^s, \quad s>0. \qquad /10/$$

Здесь вспомогательные функции те же, что и выше. Параметр s выбирается исходя из дополнительных требований к функции $\theta(x,t)$. Очевидно, что в случае "а " функция $\theta(x,t)$ также удовлетворяет требованиям /8/ при $t>0$, если учесть, что $M(t) \equiv M_1$.

Будем считать, что $\theta(x,t) \triangleq L(v(x,t))$, где $v(x,t) = (v_1(x,t),\ldots$ $\ldots, v_{m+2p}(x,t))$, и $L(v)$ – выпуклая возрастающая функция при $v>0$. Таким условиям удовлетворяют, например, функции /9/ и /10/ при $s=1,2$ и т.д. [2,3].

Введем дополнительно условие

8'). Функции $\Phi(x,t)$, $\Phi'_{x_i}(x,t)$, $\Phi''_{x_i t}(x,t)$ и $\Phi''_{x_i x_j}(x,t)$, $i,j=\overline{1,n}$, непрерывны по x и t при $x \in R^n$ и $t \in [0,1]$.

Основным результатом этого параграфа является

Т е о р е м а 3. Пусть функция $\Phi(x,t)$ определена равенством /7/ и выполнены условия I – 3 , 6 , 7 , 8' , 9 . Тогда $\bar{x}(1) \in M_1^*$ и $\lim\limits_{t\to 1}\frac{1}{\beta(t)}\,\Phi(\bar{x}(t),t) = f(\bar{x}(1))$.

Если, кроме того, $M(t) \equiv M_1$ и существует такое t' , $0 \le t' < 1$, что $\bar{x}(t) \in M_1$ при $t \in [t',1]$, то $\bar{x}(1) = x^*$, где x^* – нормальное решение, т.е. $x^* \in M_1^*$ и $\Omega(x^*) = \min\limits_{x \in M_1^*} \Omega(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Легко установить, что функция $\bar{x}(t)$ удовлетворяет системе /4/. Так как функция $\Phi(x,t)$ выпукла по x в R^n при $t \in [0,1]$ (см. [3, лемма 13]), то

$$\Phi(\bar{x}(t),t) = \min_{x \in R^n} \Phi(x,t),$$

при этом если $t<1$, то в силу сильной выпуклости функция $\bar{x}(t)$ единственная.

Покажем, что $\bar{x}(1) \in M_1$. Обозначим через $x(t)$ решение задачи $\min\limits_{x \in M(t)} F(x,t)$, которое существует при всех $t \in [0,1]$, так как $F(x,t)$ сильно выпукла, а $M(t)$ выпукло при $t \in [0,1)$ и $M_1^* \neq \emptyset$.

Рассмотрим цепочку неравенств при $t \in [0,1)$, в которой учтены оптимальность $\bar{x}(t)$, $x(t)$, неотрицательность $\theta(x,t)$ и равенство $\theta(x(t),t) = 0$:

$$F(\bar{x}(t),t) \leq F(\bar{x}(t),t) + \frac{1}{\beta(t)}\,\theta(\bar{x}(t),t) = \frac{1}{\beta(t)}\,\Phi(\bar{x}(t),t) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\beta(t)}\,\Phi(x(t),t) = F(x(t),t) = \min_{x \in M(t)} F(x,t). \qquad /11/$$

Отсюда выделим неравенство

$$\beta(t)\,F(\bar{x}(t),t) + \theta(\bar{x}(t),t) \leq \beta(t) \min_{x \in M(t)} F(x,t). \qquad /11'/$$

Поскольку $M_1^* \subseteq M(t)$, то для $x^* \in M_1^*$ имеем

$$\min_{x \in M(t)} F(x,t) \leq F(x^*,t), \qquad /12/$$

откуда следует, что $\min\limits_{x \in M(t)} F(x,t) < \infty$ при $t \in [0,1]$. Переходя к пределу в /11'/ при $t \to 1$ и учитывая непрерывность функций, а также ограниченность функции минимума, получаем $\theta(\bar{x}(1),1) \leq 0$. Поскольку $\theta(x,t) \geq 0$, то $\theta(\bar{x}(1),1) = 0$, т.е. $\bar{x}(1) \in M_1$.

Покажем теперь, что $\bar{x}(1) \in M_1^*$. Из неравенств /11/ и /12/ имеем

$$F(\bar{x}(t),t) \leq \frac{1}{\beta(t)}\,\Phi(\bar{x}(t),t) \leq F(x^*,t).$$

Переходя к пределу при $t \to 1$, получим

$$f(\bar{x}(1)) \leq \lim_{t \to 1} \frac{1}{\beta(t)}\,\Phi(\bar{x}(t),t) \leq f(x^*).$$

Так как $\bar{x}(1) \in M_1$, то $f(\bar{x}(1)) = f(x^*)$ и, следовательно, $\bar{x}(1) \in M_1^*$. Кроме того, отсюда сразу же следует, что

$$\lim_{t \to 1} \frac{1}{\beta(t)}\,\Phi(\bar{x}(t),t) = f(\bar{x}(1)), \qquad /13/$$

и, значит, $\lim\limits_{t \to 1} \Phi(\bar{x}(t),t) = 0$, $\lim\limits_{t \to 1} \frac{1}{\beta(t)}\,\theta(\bar{x}(t),t) = 0$.

Пусть теперь $M(t) \equiv M_1$ и существует t', определенное условиями теоремы. Используя неравенства /11/, при $t \in [t',1)$ получим

$$\varphi_1(t) f(\bar{x}(t)) + \varphi_0(t)\,\Omega(\bar{x}(t)) = F(\bar{x}(t),t) \leq F(x(t),t) \leq F(x^*,t) =$$

$$= \varphi_1(t) f(x^*) + \varphi_0(t)\,\Omega(x^*) \leq \varphi_1(t) f(\bar{x}(t)) + \varphi_0(t)\,\Omega(x^*),$$

где дополнительно учтено, что $\bar{x}(t) \in M_1$, $x^* \in M_1^*$. Отсюда следует

неравенство $\Omega(\bar{x}(t)) \le \Omega(x^*)$. В пределе имеем $\Omega(\bar{x}(1)) \le \Omega(x^*)$. Так как $\bar{x}(1) \in M_1^*$, а $\Omega(x)$ - сильно выпуклая функция, то $\bar{x}(1) = x^*$.

Теорема 3 доказана.

Т е о р е м а 4. Пусть выполнены условия I , 3 и $\overline{\lim\limits_{t\to 1}} \inf\limits_{x\in R^n} \Phi(x,t) > 0$. Тогда $M_1 = \emptyset$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $M_1 = \emptyset$. Тогда для $x' \in M_1$ имеем $\inf\limits_{x\in R^n} \Phi(x,t) \le \Phi(x',t)$ для всех $t \in [0,1]$.

Перейдя к пределу при $t \to 1$, получим

$$\overline{\lim_{t\to 1}} \inf_{x\in R^n} \Phi(x,t) \le 0,$$

так как $\theta(x',t) \equiv 0$. Полученное противоречие доказывает теорему 4.

С л е д с т в и е 4.I. Пусть выполнены условия I - 3 , 6 , 8'; $\bar{x}(t)$ - решение системы /3/, определенное при $t \in [0,1]$, и $\lim\limits_{t\to 1} \Phi(\bar{x}(t),t) > 0$. Тогда $M_1 = \emptyset$.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из теорем 3 и 4.

В заключение рассмотрим следующие примеры.

<u>Пример 5.</u> Возьмем ту же задачу, что в примере I, и положим $\varphi_0(t) = 1-t,\ \varphi_1(t) = t,\ \beta(t) = 1-t,\ \theta(x,t) = \theta_1(x,t),\ \gamma(t) = t,\ s = 2$.

При $x_0 = 0 \in M_1$ имеем

$$\Phi(x,t) = (1-t)\left[tx + (1-t)x^2\right] + t\left[\max(0,1-x)\right]^2.$$

Решив уравнение $\Phi'_x(x,t) = 0$, получим

$$x(t) = \frac{t(1+t)}{2(t+(1-t)^2)},$$

при этом $x(t) \notin M(t) \equiv M_1$ для $t \in [0,1)$. Очевидно, что $x(1) = 1 \in M_1^*$.

Если вместо функции $\theta_1(x,t)$ взять $\theta_2(x,t)$ с $s = 2$ и $\alpha_1(t) = t$, $\beta_1(t) = 1-t$, то

$$\Phi(x,t) = (1-t)\left[tx + (1-t)x^2\right] + \left[\max(0, t(1-x) + t - 1)\right]^2.$$

Отсюда

$$x(t) = \begin{cases} -\dfrac{t}{2(1-t)} & \text{при} \quad t \in [0,t_0], \\ \dfrac{t(5t-3)}{2(t^2+(1-t)^2)} & \text{при} \quad t \in (t_0,1], \end{cases}$$

где $t_0 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$. Заметим, что $x(t) \in M(t)$ при $t \in [0,t_0]$ и $x(t) \notin M(t)$, если $t \in (t_0,1)$. Здесь $x(1) = 1$.

<u>Пример 6.</u> $f(x) = x$, $M_1 = \{x \in R^1 \mid g_1(x) \equiv 1 - x \le 0,\ g_2(x) \equiv 1 + x \le 0\}$.

Очевидно, что $M_1 = \emptyset$. Построим функцию $\Phi(x,t)$ следующего вида: $\Phi(x,t) = (1-t)\left[2tx + (1-t)x^2\right] + t\left[\max(0,1-x)\right]^2 + t\left[\max(0,1+x)\right]^2$.

Здесь $\varphi_1(t) = 2t$. Отсюда уже знакомым способом найдем, что $x(t) = -t(1-t)/(1+t^2)$. При этом $-1 < x(t) < 1$ для всех $t \in [0,1]$ и $\lim_{t \to 1} \Phi(x(t),t) = 2$, так как $x(1) = 0$.

Пример 7. Рассматривается та же задача, что и в примере 4. Пусть $x_0 = 0$, $\Phi(x,t) = (1-t)^2 x^2 + t[max(0, te^{-x} + t - 1)]^2$. Отсюда получим, что $x(t) \equiv 0$ при $t \in [0, \frac{1}{2}]$ и $x(t)$ является решением уравнения

$$(1-t)^2 x - t^2 e^{-x}(te^{-x} + t - 1) = 0 \qquad /I4/$$

при $t > \frac{1}{2}$. Легко определяется, что $\lim_{t \to 1} x(t) = \infty$. Так как $\lim_{t \to 1}(te^{-x} + t - 1) = 0$, то, воспользовавшись уравнением /I4/, последовательно получим $\lim_{t \to 1} \Phi(x(t),t) = \lim_{t \to 1} (1-t)^2 x^2 = \lim_{t \to 1} xt^2 e^{-x}(te^{-x} + t - 1) = 0$. Следовательно, условие $\overline{\lim_{t \to 1}} \inf_{x \in R^n} \Phi(x,t) > 0$ не является необходимым для того, чтобы M_1 было пусто. Заметим, что условия теорем 2 и 4 заведомо выполняются, если $\inf_{x \in R^n} \max_{1 \le j \le m+2p} v_j(x) > 0$.

§ 5. Некоторые замечания

В этом параграфе кратко рассматриваются вопросы, связанные с возможными обобщениями предложенного подхода и вычислительными аспектами.

Прежде всего отметим, что если $M_1 \neq \emptyset$, то множества $M(t)$ всегда можно построить таким образом, что $\mathring{M}(t) \neq \emptyset$, $t \in [0,1)$. Следовательно, задачи $A(t)$ удовлетворяют условию Слейтера при $t \in [0,1)$. Поэтому, рассматривая последовательность задач, для каждой из которых выполнено условие регулярности, и переходя к пределу, можно либо получить решение задачи A_1, либо установить какие-нибудь ее свойства.

Известно, что условия теоремы Куна-Таккера являются необходимыми, если допустимое множество имеет непустую внутренность. Попробуем воспользоваться этой теоремой в случае, когда $\mathring{M}_1 = \emptyset$. Пусть $f(x) = x$, $M_1 = \{x \in R^1 | g_1(x) \equiv x^2 \le 0\}$ (см. [4]). Здесь $M_1 = M_1^* = \{0\}$ и функция Лагранжа $L(x,\lambda) = -x + \lambda x^2$ не имеет седловых точек при $\lambda > 0$, $x \in R^1$. Рассмотрим теперь семейство задач $A(t)$ с $F(x,t) = -tx$, $M(t) = \{x \in R^1 | v_1(x,t) \equiv tx^2 + t - 1 \le 0\}$, при этом $L(x,\lambda,t) = -tx + \lambda(tx^2 + t - 1)$. По теореме Куна-Таккера, у этой функции существует седловая точка при $t \in [0,1)$. Следовательно, согласно критерию оптимальности, любое решение системы

$$v_1(x,t) \le 0, \ \lambda \ge 0, \ \lambda v_1(x,t) = 0, \ \frac{\partial L(x,\lambda,t)}{\partial x} = 0$$

при фиксированном $t \in [0,1)$ дает оптимальное решение задачи $A(t)$.
Имеем

$$tx^2+t-1 \le 0,\ \lambda \ge 0,\ \lambda(tx^2+t-1)=0,\ -t+2\lambda t x=0.$$

Исключив тривиальный случай $t=0$, отсюда получим, что

$$-\sqrt{\frac{1-t}{t}} \le x \le \sqrt{\frac{1-t}{t}},$$

и так как $\lambda \ge 0$, то из системы следует, что $\lambda(t)>0$ при $t \in (0,1)$. С учетом условия дополняющей нежесткости окончательно имеем

$$x^*(t)=\sqrt{\frac{1-t}{t}},\quad \lambda^*(t)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{t}{1-t}}.$$

Пара $(x^*(t),\ \lambda^*(t))$ является седловой точкой функции Лагранжа. Переходя к пределу при $t \to 1$, найдем $x^*(1)=0$, при этом $\lim\limits_{t\to 1} \lambda^*(t)=\infty$.

Необходимо также остановиться на следующем обстоятельстве. В рассматриваемой работе методы барьеров и внешних штрафных функций. строились в расчете на самые невыгодные условия. Если же имеется дополнительная информация о задаче, то ее следует использовать. Так, например, если в задаче A_1 известно, что $\overset{\circ}{M}_1 \ne \emptyset$, $\overline{\overset{\circ}{M}}_1 = M_1$ и, более того, можно указать точку x_0 такую, что $x_0 \in \overset{\circ}{M}_1$, то в качестве штрафной можно взять функцию

$$\Phi(x,t)=\varphi_1(t)f(x)+\varphi_0(t)\,\Omega(x)+\beta(t)\Psi(x),$$

в которой $\Psi(x)$ – классическая штрафная функция для метода барьеров, а $\beta(t)$ – непрерывная на $[0,1]$ функция, причем $\beta(0)=0$, $\beta(1)=0$, $\beta(t)>0$ при $t \in (0,1)$. Так как ограничений-равенств теперь, естественно, нет, то можно использовать такие функции:

$$\Psi_1(x)=-\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{g_j(x)},\quad \Psi_2(x)=-\sum_{j=1}^{m}\ln(-g_j(x)),$$

$\beta(t)=t(1-t)$. В этом случае траектория минимумов $x(t)$ не покинет множества M_1 при всех значениях параметра t, $t \in [0,1]$. Это важно, когда функция не определена вне допустимого множества M_1. А при приближенном решении задачи A_1 можно прервать вычисления, достигнув заданной точности, и полученное решение будет допустимым.

Если применяется метод внешних штрафных функций и известна некоторая допустимая точка x_0, $x_0 \in M_1$, то можно воспользоваться функцией $\theta(x,t)=\theta_1(x,t)$ при $\gamma(t)\equiv 1$. Тогда $\theta(x,t)$ вообще не зависит от параметра t. Это обстоятельство может оказаться удобным при поиске траектории минимумов $x(t)$.

Подчеркнем, что в рассмотренных случаях $M(t)\equiv M_1$.

Возможна ситуация, когда выбранная начальная точка x_0 удовлетворяет части ограничений задачи A_1, причем строго, если рассматривается метод барьеров. Тогда для этих ограничений можно по-

ложить $\alpha_j(t) \equiv 1$, $\beta_j(t) \equiv 0$, а для остальных использовать общую схему со вспомогательными функциями, удовлетворяющими, например, условиям I , 2 .

Из этого замечания видно, что зависящие от параметра t функции, вид которых определяется вычислителем, могут существенно отличаться от приведенных в данной работе. Можно считать, что в статье рассмотрен один из возможных вариантов задания таких функций.

Последнее замечание касается различных обобщений метода штрафных функций с учетом параметризации исходной задачи. Это приводит к рассмотрению комбинированных алгоритмов внутренней и внешней точек, а также к обобщенному методу внутренней и внешней точек [3]. Эти обобщения не представляют принципиальных трудностей, и для них можно сформулировать аналогичные рассмотренным утверждения.

Поступила в ред.-изд.отдел
23 июня I98I г.

Л и т е р а т у р а

I. Ларин Р.М. Применение метода возмущений для решения задач оптимизации.- В кн.: Управляемые системы, I98I, вып.2I, с.33-44.

2. Карманов В.Г. Математическое программирование.- М.: Наука, I980. - 256 с.

3. Фиакко А., Мак-Кормик Г. Нелинейное программирование: методы последовательной безусловной минимизации.- М.: Мир, I972. - 240 с.

4. Васильев Ф.П. Лекции по методам решения экстремальных задач.- М.: изд-во МГУ, I974. -374 с.

5. Моисеев Н.Н., Иванилов Ю.П., Столярова Е.М. Методы оптимизации.- М.: Наука, I978. -352 с.

6. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ.- М.: Мир, I973. -470 с.

7. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. -М.: Мир, I972. -5I8 с.