Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1982 г., вып.22

УДК 519.3:62-50

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ХИМИЧЕСКИМ РЕАКТОРОМ

К.С.Мусабеков

1. В работе [1] рассматривалась задача управления неадиабатическим трубчатым реактором, используемым в химической технологии. Математическая модель реактора задается системой дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \vartheta_1(t,x)}{\partial t} = a\cdot\frac{\partial^2 \vartheta_1(t,x)}{\partial x^2} - \frac{\partial \vartheta_1(x,t)}{\partial x} - c\,\vartheta_1 f(\vartheta_2);\\ &\frac{\partial \vartheta_2(t,x)}{\partial t} = b\cdot\frac{\partial^2 \vartheta_2(t,x)}{\partial x^2} - \frac{\partial \vartheta_2(t,x)}{\partial x} + K\vartheta_1 f(\vartheta_2) + g(\vartheta_3(t) - \vartheta_2(t,x));\\ &d\vartheta_3(t)/dt = d\cdot\Big(\int_0^1 \vartheta_2(t,x)\,dx - \vartheta_3(t)\Big) + u(t)\cdot(E - \vartheta_3(t)) \end{aligned}\right\} \quad /1/$$

с граничными условиями:

$$\left.\begin{aligned} &a\cdot\frac{\partial \vartheta_1(t,0)}{\partial x} - \vartheta_1(t,0) = -1; \qquad \frac{\partial \vartheta_1(t,1)}{\partial x} = 0;\\ &b\cdot\frac{\partial \vartheta_2(t,0)}{\partial x} - \vartheta_2(t,0) = -1; \qquad \frac{\partial \vartheta_2(t,1)}{\partial x} = 0 \end{aligned}\right\} \quad /2/$$

и начальными условиями:

$$\vartheta_1(0,x) = \vartheta_{10}(x);\ \vartheta_2(0,x) = \vartheta_{20}(x);\ \vartheta_3(0) = \vartheta_{30}, \qquad /3/$$

где $f(\vartheta_2) = exp(\Gamma - \Gamma/\vartheta_2(t,x))$; а константы $a, b, c, \Gamma, K, g, d, E, \vartheta_{30}$ - положительные параметры системы; $u(t)$ - управляющая функция (управление); $\vartheta_1(t,x),\ \vartheta_2(t,x),\ \vartheta_3(t)$ - функции концентрации реагирующей смеси, температуры реактора, температуры охладителя соответственно.

Будем считать, что

$$0 \le \vartheta_{10}(x) \le 1,\quad 0 < \vartheta_{20}(x) \le const.$$

В настоящей работе рассматривается задача минимизации функционала

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T \vartheta_1(t,1)\,dt, \qquad /4/$$

т.е. суммарного за время T количества непрореагировавшего вещества на выходе реактора, при условиях /1/-/3/ и следующих ограниче-

ниях на управление $u(t)$ и функцию $\vartheta_2(t,x)$:

$$0 \le u(t) \le u_0 = const; \qquad /5/$$

$$\vartheta_2(t,x) \le \vartheta_2^{**} = const. \qquad /6/$$

Пусть $Q=\{(t,x): 0 \le t \le T,\ 0 \le x \le 1\}$. Введем обозначения функциональных пространств [2,3], используемых в данной работе:

$O^2([0,1])$ – совокупность функций, определенных на [0,1], имеющих ограниченные вторые производные;

$C^{0,\alpha}(Q)$ – банахово пространство функций, заданных в области Q, непрерывных по Гельдеру с показателем α. Норму в этом пространстве определяем равенством $|\vartheta|_{0,\alpha} = |\vartheta|_{0,0} + H_\alpha(\vartheta)$, где

$$0<\alpha\le 1,\ \vartheta=(\vartheta_1,\vartheta_2),\ |\vartheta|^2=\vartheta_1^2+\vartheta_2^2,\ |\vartheta|_{0,0}=\sup_Q|\vartheta(t,x)|,$$

$$H_\alpha(\vartheta)=\sup_{\substack{P,R\in Q\\ P\ne R}}\frac{|\vartheta(P)-\vartheta(R)|}{[d(P,R)]^\alpha},$$

$$d(P,R)=|t-\tau|^{\frac{1}{2}}+|x-y|,\ P(t,x),\ R(\tau,y)\in Q;$$

$C^{2,\alpha}(Q)$ – банахово пространство функций, заданных в области Q, обладающих непрерывными по Гельдеру с показателем α производными до второго порядка по x и первого порядка по t. Норму в этом пространстве определяем равенством

$$|\vartheta|_{2,\alpha} = \sum_{i=0}^{2}|\mathcal{D}_x^i\vartheta|_{0,\alpha}+|\mathcal{D}_t\vartheta|_{0,\alpha};$$

$W_2^{1,2}(Q)$ – банахово пространство функций $\vartheta(t,x)\in L_2(Q)$, имеющих обобщенные производные $\mathcal{D}_t\vartheta,\ \mathcal{D}_x\vartheta,\ \mathcal{D}_x^2\vartheta\in L_2(Q)$, норму в нем определяем равенством

$$\|\vartheta\|_{1,2;2}=\Big[\iint_Q\big(|\mathcal{D}_x^2\vartheta|^2+|\mathcal{D}_t\vartheta|^2+|\vartheta|^2\big)dx\,dt\Big]^{1/2};$$

$W([0,T])$ – банахово пространство абсолютно непрерывных функций, заданных на $[0,T]$ с нормой

$$\|\vartheta\|=\max_{0\le t\le T}|\vartheta(t)|+\int_0^T\left|\frac{d\vartheta}{dt}\right|dt;$$

$C[0,T]$ – банахово пространство непрерывных функций, заданных на $[0,T]$, с нормой

$$\|\vartheta\|_C=\max_{0\le t\le T}|\vartheta(t)|;$$

$U_\partial=\{u(t): 0\le u(t)\le u_0=const,\ u(t)$ – измеримая функция, $0\le t\le T\}$.

Основное содержание работы состоит в следующем. Для функций $\vartheta_1(t,x),\ \vartheta_2(t,x),\ \vartheta_3(t)$ (при $(t,x)\in Q$) устанавливаются оценки

$0 \le \vartheta_1 \le 1$, $0 < \vartheta_2 < C_3$, $0 < \vartheta_3 < C_4$, где далее через C_1, C_2, C_3, C_4 ... будем обозначать различные постоянные величины, зависящие лишь от параметров системы и начальных условий задачи.

Для задачи /I/-/3/ доказывается теорема существования и единственности решения $\vartheta_1, \vartheta_2 \in C^{2,\alpha}(Q)$, $\vartheta_3 \in W([0,T])$ при произвольной функции $u(t) \in U_\partial$. Для задачи /I/-/6/ доказывается теорема существования оптимального управления.

II. Прежде чем доказывать теоремы существования решения и оптимального управления, получим некоторые априорные оценки функций $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$. Допустим [2], что первые два уравнения системы /I/ имеют классическое решение в $C^{2,\alpha}(Q)$, а третье уравнение – в $W([0,T])$.

Рассмотрим первое уравнение системы /I/ с соответствующими граничными и начальными условиями:

$$\frac{\partial \vartheta_1(t,x)}{\partial t} = a \cdot \frac{\partial^2 \vartheta_1(t,x)}{\partial x^2} - \frac{\partial \vartheta_1(t,x)}{\partial x} - c\vartheta_1 f(\vartheta_2); \qquad /7/$$

$$a \cdot \frac{\partial \vartheta_1(t,0)}{\partial x} - \vartheta_1(t,0) = -1; \quad \frac{\partial \vartheta_1(t,1)}{\partial x} = 0; \qquad /8/$$

$$\vartheta_1(0,x) = \vartheta_{10}(x). \qquad /9/$$

Л е м м а I. Для любой точки $(t,x) \in Q$ при каждом $\vartheta_2(t,x)$ имеет место

$$0 \le \vartheta_1(t,x) \le C_2. \qquad /10/$$

Если при этом $\vartheta_2 \ne 0$, то $0 \le \vartheta_1(t,x) \le 1$. /II/

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функцию

$$\vartheta(t,x) = \vartheta_1(t,x) \cdot \varphi(x) \cdot e^{-\lambda t}, \qquad /12/$$

где $\varphi(x) \in C^2([0,1])$ и удовлетворяет условиям:

$$\min_{(0,1)} \varphi(x) \ge \frac{1}{2}, \quad \varphi(0) = \varphi(1) = 1, \quad \frac{d\varphi(0)}{dx} = \frac{d\varphi(1)}{dx} = -m, \quad 0 < m < \frac{1}{a}. \qquad /13/$$

Теперь задача /7/-/9/ примет вид

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} - a \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + a_1(x) \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \vartheta \cdot (\lambda + a_2(t,x)) = 0; \qquad /14/$$

$$a \cdot \frac{\partial \vartheta(t,0)}{\partial x} + \vartheta(t,0) \cdot (a \cdot m - 1) = -e^{-\lambda t}, \quad \frac{\partial \vartheta(t,1)}{\partial x} + m \cdot \vartheta(t,1) = 0; \qquad /15/$$

$$\vartheta(0,x) = \vartheta_{10}(x) \cdot \varphi(x), \qquad /16/$$

где λ – произвольное число,

$$a_1(x)=1+\frac{2a}{\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dx};\quad a_2(t,x)=c f(\vartheta_2)-\frac{1}{\varphi}\cdot\left[\frac{2a}{\varphi}\cdot\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\frac{d\varphi}{dx}-a\cdot\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right].$$

Пусть $t_0\in(0,T)$. Рассмотрим множество

$$Q_{t_0}=\{0<x<1,\ 0<t<t_0\}.$$

Очевидно, что $\bar{Q}_T=Q$ при $t_0=T$.

Возможны три случая:

I. Функция $\vartheta(t,x)\le 0$ в $\bar{Q}_{t_0}$, т.е. $\max\limits_{\bar{Q}_{t_0}}\vartheta(t,x)\le 0.$

2. Наибольшее в $\bar{Q}_{t_0}$ положительное значение $\vartheta(t,x)$ достигается на Γ_{t_0} (т.е. на боковой поверхности S_{t_0} или на основании $\{(0,x):\ 0<x<1\}$), следовательно,

$$0<\max_{\bar{Q}_{t_0}}\vartheta(t,x)\le\max_{\Gamma_{t_0}}\vartheta(t,x).$$

3. Наибольшее значение достигается в какой-либо точке $(t^0,x^0)\in(0,t_0]\times(0,1)$, отсюда $\vartheta_x=0,\ \vartheta_t\ge 0,\ -a\cdot\vartheta_{xx}\ge 0$. Для этого случая уравнение /I4/ примет вид

$$\vartheta(t^0,x^0)\cdot(\lambda+a_2(t^0,x^0))\le 0.$$

Выберем число λ из условия

$$\lambda>\max_{Q_{t_0}}\left\{\frac{1}{\varphi}\left[\frac{2a}{\varphi}\cdot\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\frac{d\varphi}{dx}-a\cdot\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right]\right\}.$$

Объединяя все три случая, имеем

$$\max_{\bar{Q}_{t_0}}\vartheta(t,x)\le$$

$$\le\max\left\{0,\ \max_{S_{t_0}}\vartheta(t,x),\ \max_{0<x<1}(\vartheta_{10}(x)\cdot\varphi(x))\right\}. \qquad /I7/$$

Таким образом, наибольшее значение $\vartheta(t,x)$ принимает на границе. Если $\vartheta(t,x)$ принимает наибольшее значение на левой границе, то $\partial\vartheta(t,\varepsilon)/\partial x\le 0$ при $\varepsilon\to+0$. Тогда из /I5/ имеем $\vartheta(t,0)\le e^{-\lambda t}/(1-am)$. Если $\vartheta(t,x)$ принимает наибольшее значение на правой границе, то при $x\to 1-0$ имеем $\partial\vartheta(t,x)/\partial x\ge 0$. Снова из /I5/ имеем $\vartheta(t,1)\le 0$. Итак, справедливо неравенство

$$\max_{\bar{Q}_{t_0}}\vartheta(t,x)\le\max\left\{0,e^{-\lambda t}/(1-a\cdot m),\ \max_{0<x<1}(\vartheta_{10}(x)\cdot\varphi(x))\right\}. \qquad /I8/$$

Отсюда, учитывая /I2/, имеем

$$\vartheta_1(t,x)\cdot\varphi(x)\le\max\left\{0,(1-a\cdot m)^{-1},\ e^{\lambda t}\cdot\max_{0<x<1}(\vartheta_{10}(x)\,\varphi(x))\right\}.$$

Далее, учитывая, что $(\varphi(x))^{-1} \le 2$, получим

$$\max_{\bar{Q}_{t_0}} \vartheta_1(t,x) \le \max\{0; 2\cdot(1-am)^{-1}; 2e^{\lambda t}\cdot \max_{0<x<1}(\vartheta_{10}(x)\cdot\varphi(x))\}.$$

Имеем $\vartheta_{10}(x) \le 1$, $\varphi(x)\in C^2([0,1])$. Поэтому $\max\limits_{0\le x\le 1}\varphi(x) = C_1 = const.$

Обозначив $C_2 = \max\{0; 2\cdot(1-am)^{-1}, 2C_1 e^{\lambda T}\}$, получаем

$$\vartheta_1(t,x) \le C_2 = const, \qquad /19/$$

где C_2 зависит от a, m, λ, T, т.е. $C_2 = C_2(a,m,\lambda,T)$.

Оценим $\vartheta_1(t,x)$ снизу. Здесь также возможны три случая:

1. Функция $\vartheta(t,x) \ge 0$ в $\bar{Q}_{t_0}$, т.е. $\min\limits_{\bar{Q}_{t_0}} \vartheta(t,x)$.

2. Наименьшее неположительное значение $\vartheta(t,x)$ достигается на Γ_{t_0}.

3. Наименьшее неположительное значение $\vartheta(t,x)$ достигается во внутренней точке $(t^0, x^0)\in(0,t_0]\times(0,1)$, т.е. $(a_2+\lambda)\cdot\vartheta \ge 0$.

Выбирая λ таким, чтобы $a_2+\lambda>0$, получаем $\vartheta\ge 0$. Таким образом,

$$\min_{\bar{Q}_{t_0}} \vartheta(t,x) \ge \min\{0, \min_{S_{t_0}} \vartheta(t,x), \min_{0<x<1}(\vartheta_{10}(x)\cdot\varphi(x))\}. \qquad /20/$$

Если $\vartheta(t,x)$ достигает минимального значения на левой границе, т.е. $x=0$, то $\partial\vartheta(t,\varepsilon)/\partial x \ge 0$ при $\varepsilon \to +0$. Следовательно, $\vartheta(t,0) \ge e^{-\lambda t}/(1-a\cdot m) > 0$. Если $\vartheta(t,x)$ достигает минимального значения на правой границе, т.е. при $x=1$, то $\partial\vartheta(t,x)/\partial x \le 0$ при $x\to 1-0$. Тогда из /15/ имеем $\vartheta(t,1)\ge 0$.

Далее, $\vartheta_{10}(x)\cdot\varphi(x) \ge 1/2\cdot\vartheta_{10}(x) \ge 0$. Из /20/ имеем $\min\limits_{\bar{Q}_{t_0}} \vartheta(t,x) \ge 0$, тогда и $\vartheta_1(t,x)\ge 0$. Итак, для любой точки $(t,x)\in Q$ имеем

$$0 \le \vartheta_1(t,x) \le C_2. \qquad /21/$$

При $\vartheta_2 \ne 0$ оценку /19/ можно уточнить. Из /17/ следует, что наибольшего значения функция $\vartheta_1(t,x)$ может достигать лишь на границе области Q, т.е. либо при $t=0$, либо при $x=1$, либо при $x=0$.

При $t=0$ имеем $\vartheta_1(0,x) = \vartheta_{10}(x) \le 1$.

При $x=1$ функция $\vartheta_1(t,x)$ максимума достигать не может. Рассмотрим малый отрезок $1-\varepsilon < x < 1$, $\varepsilon > 0$. Допустим, что максимум может достигаться при $x=1$, тогда при $1-\varepsilon < x < 1$ и $\varepsilon\to 0$ имеем

$$\frac{\partial\vartheta_1(t,x)}{\partial x} \to 0, \quad \frac{\partial\vartheta_1}{\partial t} \ge 0, \quad -a\cdot\frac{\partial^2\vartheta_1}{\partial x^2} \ge 0.$$

Последние два неравенства справедливы вследствие непрерывности $\vartheta_1(t,x)$ и ее производных. Точка (t,x) - внутренняя для Q. Теперь из основного уравнения для $\vartheta_1(t,x)$ имеем $-c\vartheta_1 f(\vartheta_2) \geq 0$. Отсюда $\vartheta_1(t,x) \leq 0$, что противоречит неравенству /21/.

Максимум функции $\vartheta_1(t,x)$ может достигаться лишь при $x=0$. Имеем $a\cdot\partial\vartheta_1(t,0)/\partial x - \vartheta_1(t,0) = -1$. Но функции $\vartheta_1(t,0)$ и $\partial\vartheta_1(t,0)/\partial x$ имеют противоположные знаки. Следовательно,

$$\left|a\cdot\frac{\partial\vartheta_1(t,0)}{\partial x} - \vartheta_1(t,0)\right| = \left|a\cdot\frac{\partial\vartheta_1(t,0)}{\partial x}\right| + |\vartheta_1(t,0)| = 1 .$$

Отсюда $\vartheta_1(t,0) \leq 1$, $|\partial\vartheta_1(t,0)/\partial x| \leq a^{-1}$.
Таким образом, для всех точек $(t,x) \in Q$ имеем

$$0 \leq \vartheta_1(t,x) \leq 1 .$$

Лемма I полностью доказана.

Лемма 2. Для любой точки $(t,x) \in Q$ справедливы соотношения

$$0 < \vartheta_2(t,x) \leq C_3 = const; \qquad /22/$$

$$0 < \vartheta_3(t) \leq C_4 = const, \qquad /23/$$

где C_3, C_4 зависят лишь от параметров системы и начальных условий задачи.

Доказательство. Рассмотрим второе уравнение системы /I/ с граничными и начальным условиями:

$$\frac{\partial\vartheta_2}{\partial t} - b\cdot\frac{\partial^2\vartheta_2}{\partial x^2} + \frac{\partial\vartheta_2}{\partial x} - K\vartheta_1 f(\vartheta_2) - g\cdot(\vartheta_3 - \vartheta_2) = 0; \qquad /24/$$

$$b\cdot\frac{\partial\vartheta_2(t,0)}{\partial x} - \vartheta_2(t,0) = -1; \qquad \frac{\partial\vartheta_2(t,1)}{\partial x} = 0; \qquad /25/$$

$$\vartheta_2(0,x) = \vartheta_{20}(x). \qquad /26/$$

Как и при доказательстве леммы I, введем функции

$$\vartheta(t,x) = \vartheta_2(t,x)\cdot\varphi(x)\cdot e^{-\lambda t},$$

где $\varphi(x) \in C^2([0,1])$ обладает свойствами

$$\min_{(0,1)} \varphi(x) \geq \frac{1}{2}, \ \varphi(0) = \varphi(1) = 1, \ \frac{d\varphi(0)}{dx} = \frac{d\varphi(1)}{dx} = -m, \ 0 < m < \frac{1}{b} \qquad /27/$$

Теперь задача /24/-/26/ примет вид:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t} - b\cdot\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2} + b_1(x)\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + \vartheta(b_2(x)+\lambda) = F(t,x)\cdot e^{-\lambda t}; \qquad /28/$$

$$b\cdot\frac{\partial\vartheta(t,0)}{\partial x} + \vartheta(t,0)\cdot(b\cdot m - 1) = -e^{-\lambda t}; \ \frac{\partial\vartheta(t,1)}{\partial x} + m\cdot\vartheta(t,1) = 0,$$

$$\vartheta(0,x)=\vartheta_{20}(x)\cdot\varphi(x),$$

где $b_1(x)=1+2b\cdot\varphi'/\varphi$; $b_2(x)=g-\varphi'/\varphi+b\cdot\varphi''/\varphi-2b\cdot(\varphi')^2/\varphi^2$;

$$F(t,x)=K\vartheta_1 f(\vartheta_2)\varphi+g\vartheta_3\varphi.$$

Покажем, что $\vartheta_2(t,x)\geq 0$ и $\vartheta_3(t)>0$.

Как и в лемме I, рассматривая три возможных случая, получим

$$\min_{\bar{Q}_{t_0}}\vartheta(t,x)\geq\min\left\{0,\min_{\Gamma_{t_0}}\vartheta(t,x),\min_{Q_{t_0}}\frac{F(t,x)\cdot e^{-\lambda t}}{\lambda+b_2(x)}\right\}. \quad /29/$$

Повторяя рассуждения, проведенные для $\vartheta_1(t,x)$, получим $\vartheta(t,x)\geq 0$ для любой точки $(t,x)\in\Gamma_{t_0}$.

Рассмотрим соотношение

$$\frac{F(t,x)\cdot e^{-\lambda t}}{\lambda+b_2(x)}=\frac{\varphi(x)\cdot e^{-\lambda t}}{\lambda+b_2(x)}\cdot(K\vartheta_1 f(\vartheta_2)+g\cdot\vartheta_3)\geq$$

$$\geq\min_{\bar{Q}_{t_0}}\frac{\varphi(x)e^{-\lambda t}\cdot K\cdot\vartheta_1 f(\vartheta_2)}{\lambda+b_2(x)}+\vartheta_3(t)\cdot\frac{g\cdot\varphi(x)e^{-\lambda t}}{\lambda+b_2(x)}.$$

Так как

$$\min_{\bar{Q}_{t_0}}\frac{\varphi(x)\cdot e^{-\lambda t}K\vartheta_1 f(\vartheta_2)}{\lambda+b_2(x)}\geq 0,\quad\frac{g\cdot\varphi(x)e^{-\lambda t}}{\lambda+b_2(x)}\geq 0,$$

то из /29/ имеем

$$\vartheta(t,x)\geq\min_{\bar{Q}_{t_0}}\left\{0,\frac{g\cdot\varphi(x)e^{-\lambda t}}{\lambda+b_2(x)}\cdot\vartheta_3(t)\right\}.$$

Если $\vartheta_3(t)\geq 0$, то $\vartheta(t,x)\geq 0$ и в конечном итоге $\vartheta_2(t,x)\geq 0$, что и требуется установить.

Допустим, что

$$\vartheta_3(t)<0. \quad /30/$$

Обозначим $\max\limits_{\bar{Q}_{t_0}}\dfrac{\varphi(x)e^{-\lambda t}g}{\lambda+b_2(x)}=C_5=const,$

тогда $\min\limits_{\bar{Q}_{t_0}}\vartheta(t,x)\geq C_5\cdot\min\limits_{[0,t_0]}\vartheta_3(t).$

Отсюда

$$\min_{\bar{Q}_{t_0}}\vartheta_2(t,x)\geq C_6\cdot\min_{[0,t_0]}\vartheta_3(t),\quad C_6=const>0. \quad /31/$$

Для третьегс уравнения системы /I/ решение можно записать в виде

$$\vartheta_3(t)=\left\{\int_0^t\left[d\cdot\int_0^1\vartheta_2(\theta,x)\,dx+u(\theta)\cdot E\right]\cdot e^{\int_0^\theta[d+u(\tau)]d\tau}d\theta+\vartheta_{30}\right\}e^{-\int_0^t[d+u(s)]ds}; \qquad /32/$$

$$(0<\theta<t\leq T,\ t\leq t_0\leq T).$$

Обозначим

$$\varphi_1(\theta)=exp\left\{\int_0^\theta[d+u(\tau)]d\tau\right\}>0;\ \varphi_2(t)=exp\left\{-\int_0^t[d+u(s)]ds\right\}>0.$$

Заменим в /32/ $\vartheta_2(t,x)$ на $\vartheta_3(t)$, учитывая /31/, и, так как $u(\theta)\cdot E>0,\ \vartheta_{30}>0$, получим

$$\min_{[0,t_0]}\vartheta_3(t)\geq\left\{C_7\cdot\int_0^t[\min_{[0,\theta]}\vartheta_3(\theta)]\varphi_1(\theta)d\theta\right\}\varphi_2(t).$$

Имеем $\vartheta_3(t)<0,\ t\leq t_0\leq T$, и функция $\varphi_2(t)$ является непрерывной на $[0,T]$, поэтому

$$\max_{[0,T]}\varphi_2(t)=C_8>0,\ C_8=const.$$

$$\min_{[0,t_0]}\vartheta_3(t)\geq C_9\cdot\int_0^{t_0}[\min_{[0,\theta]}\vartheta_3(\theta)]\varphi_1(\theta)d\theta. \qquad /33/$$

Умножим обе части /33/ на -1 и обозначим $\vartheta_4(t_0)=-\min\limits_{[0,t_0]}\vartheta_3(t)$.

Тогда $\vartheta_4(t_0)\leq C_9\cdot\int_0^{t_0}\vartheta_4(\theta)\varphi_1(\theta)\,d\theta$. Используя неравенство Гронуолла-Беллмана, получаем $\vartheta_4(t_0)\leq 0$ или $\min\limits_{[0,t_0]}\vartheta_3(t)\geq 0$, что противоречит допущению /30/. Следовательно, $\vartheta_3(t)\geq 0$. Тогда $\vartheta_2(t,x)\geq 0$. Из /32/ имеем $\vartheta_3(t)>0$, точнее, $\exists\delta_1>0$ такое, что $\vartheta_3(t)\geq\delta_1>0$. Далее, покажем, что $\exists\delta>0$ такое, что $\vartheta_2(t,x)\geq\delta>0\ \ \forall(t,x)\in\overline{Q}_{t_0}$. Функция $\vartheta(t,x)$ не может достигать нулевого минимума при $x=0$ в силу граничного условия, а при $t=0$ имеем начальное условие $1/2\,\vartheta_{20}(x)>0$. Если допустить, что $\vartheta(t,1)=0$, то, рассматривая на $1-\varepsilon<x\leq 1$ функцию $\vartheta(t,x)$, имеем $\vartheta_t\leq 0,\ -b\cdot\vartheta_{xx}\leq 0,\ \vartheta_x\to 0,\ \vartheta\to 0$ при $x\to 1-0$, в силу непрерывности $\vartheta(t,x)$ и ее производных. Тогда из уравнения для $\vartheta(t,x)$ имеем $F<0$, а это противоречит соотношению $\vartheta_3\geq\delta_1>0$. Таким образом, $\vartheta(t,x)>0$ на границе Γ_{t_0}. Для внутренних точек $(t,x)\in Q_{t_0}$ также $\vartheta(t,x)\neq 0$, так как в противном случае снова получим $F<0$. Итак, $\vartheta(t,x)>0$ для всех точек $(t,x)\in Q_{t_0}$. Тогда $\exists\delta>0$ такое, что $\vartheta_2(t,x)\geq\delta>0$.

Покажем ограниченность $\vartheta_2(t,x)$, $\vartheta_3(t)$ сверху. Рассматривая уравнение /28/ и повторяя рассуждения, проведенные в лемме I, получим

$$\max_{\bar{Q}_{t_0}} \vartheta(t,x) \le \max\left\{0, \max_{\Gamma_{t_0}} \vartheta(t,x), \max \frac{F(t,x)\, e^{-\lambda t}}{\lambda + b_2(x)}\right\}.$$

Если $\max \vartheta(t,x)$ достигается на границе, то так же, как и для $\vartheta_1(t,x)$, можно доказать ограниченность $\vartheta(t,x)$ на границе и получить оценку

$$\vartheta(t,x) = C_{10}(b, \kappa, \max f, \max_{[0,1]} \vartheta_{20}(x)) = const.$$

Далее,

$$\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda + b_2(x)} F(t,x) = \frac{e^{-\lambda t}\cdot \varphi(x)}{\lambda + b_2(x)} \cdot [\kappa \vartheta_1 f(\vartheta_2) + g\cdot \vartheta_3] \le C_{11} + C_{12}\cdot \vartheta_3(t) \cdot$$

Обозначив $\max(C_{10}, C_{11}) = C_{13}$, получим

$$\max_{\bar{Q}_{t_0}} \vartheta(t,x) \le C_{13} + C_{12}\cdot \max_{[0,t_0]} \vartheta_3(t). \qquad /34/$$

Выше было доказано, что $\vartheta(t,x) > 0, \vartheta_3(t) > 0$. Из /32/ имеем

$$\vartheta_3(t) \le C_{14}\cdot \int_0^t \max_{0\le x\le 1} \vartheta(\theta,x)\, d\theta + C_{15}. \qquad /35/$$

Обозначим $\max\limits_{0\le x\le 1} \vartheta(t,x) = \mathcal{J}(t)$. Из /34/ и /35/ имеем $\max\limits_t \mathcal{J}(t) \le$ $\le C_{16} + C_{17} \int\limits_0^t \max \mathcal{J}(\theta)\, d\theta$. По неравенству Гронуолла-Беллмана, имеем $\max\limits_t \mathcal{J}(t) \le C_{18} = const$. Таким образом, $\vartheta_2(t,x) \le C_{18}\cdot e^{\lambda T}\cdot 2 = C_3$.

Из /35/ имеем $\vartheta_3(t) \le C_{15} + C_{14}\cdot C_{18}\cdot T = C_4$.

Лемма 2 полностью доказана.

З а м е ч а н и е. Интегрируя на $[0,t]$ обе части третьего уравнения системы /I/, в силу оценок /22/-/23/ можно показать, что $\vartheta_3(t)$ удовлетворяет условию Гельдера.

Для задачи /1/-/3/ рассмотрим линейную систему

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial w_1}{\partial t} = a\cdot \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - \frac{\partial w_1}{\partial x} - c\,[a_{11}(t,x)\cdot w_1 + a_{12}(t,x)\cdot w_2],\\
&\frac{\partial w_2}{\partial t} = b\cdot \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} - \frac{\partial w_2}{\partial x} + \kappa\,[a_{11}(t,x)\cdot w_1 + a_{12}(t,x)\cdot w_2] + g\,(w_3 - w_2),\\
&dw_3/dt = d\cdot \left(\int_0^1 w_2(t,x)\,dx - w_3(t)\right) - u(t)\cdot w_3(t)
\end{aligned}\right\} /36/$$

с граничными условиями:

$$a\frac{\partial w_1(t,0)}{\partial x}-w_1(t,0)=0;\quad \frac{\partial w_1(t,1)}{\partial x}=0;$$

$$b\frac{\partial w_2(t,0)}{\partial x}-w_2(t,0)=0;\quad \frac{\partial w_2(t,1)}{\partial x}=0 \qquad /37/$$

и начальными условиями:

$$w_1(0,x)=0;\quad w_2(0,x)=0;\quad w_3(0)=0. \qquad /38/$$

Введем обозначения:

$$w=\begin{pmatrix} w_1\\ w_2\end{pmatrix},\ a_0=\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix},\ a_1=\begin{pmatrix} -1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\ a_2=\begin{pmatrix} -ca_{11} & -ca_{12}\\ ka_{11} & ka_{12}\end{pmatrix},$$

$$\varphi=\begin{pmatrix} 0\\ -g\cdot w_3\end{pmatrix},\quad a_0^{-1}=\begin{pmatrix} 1/a & 0\\ 0 & 1/b\end{pmatrix}.$$

Задачу /36/–/38/ запишем в виде:

$$-\mathcal{D}_t w+\sum_{k=0}^{2} a_k \mathcal{D}_x^{2-k} w=\varphi(t);$$

$$\mathcal{D}_t w_3=d\Big(\int_0^1 w_2(t,x)\,dx-w_3(t)\Big)-u(t)\cdot w_3(t); \qquad /39/$$

$$a_0\mathcal{D}_x w(t,0)-w(t,0)=0;\quad \mathcal{D}_x w(t,1)=0;$$

$$w(0,x)=0;\quad w_3(0)=0.$$

Л е м м а 3. Если элементы матрицы $a_2(t,x)$ и $\varphi(t)\in C^{0,\alpha}(Q)$ и элементы матрицы $a_2(t,x)$ ограничены, то

$$\int_0^1 |w(\tau,x)|^2dx+\|w\|^2_{1,2;2}\le c_{26}\cdot\int_0^\tau|\varphi(t)|^2dt; \qquad /40/$$

$$\int_0^1 |w_2(s,x)|^2dx\le c_{21}\cdot\|\varphi(t)\|_{C[0,s]}\quad (0\le s\le T). \qquad /41/$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Умножим первое уравнение системы /39/ скалярно на $e^{-\theta t}\cdot\mathcal{D}_x^2 w$ и проинтегрируем по $Q_\tau=\{(t,x):0\le t\le\tau,\ 0\le x\le 1\}$, где θ – произвольная постоянная. Получим

$$\iint_{Q_\tau}\big[-(\mathcal{D}_t w,\mathcal{D}_x^2 w)+(a_0\mathcal{D}_x^2 w,\mathcal{D}_x^2 w)\big]\cdot e^{-\theta t}dx\,dt\le$$

$$\le c_{19}\cdot\iint_{Q_\tau}e^{-\theta t}\cdot\Big[|\mathcal{D}_x^2 w|\cdot|\varphi|+|\mathcal{D}_x^2 w|\cdot\sum_{k=1}^{2}|\mathcal{D}_x^{2-k}w|\Big]dx\,dt.$$

Обозначим $\bar a=\min(a,b)$. Преобразуем интеграл

$$-\iint_{Q_\tau}(\mathcal{D}_t w,\mathcal{D}_x^2 w)e^{-\theta t}dx\,dt=\int_0^\tau(\mathcal{D}_t w(t,0),\mathcal{D}_x w(t,0))e^{-\theta t}dt+$$

$$+\iint\limits_{Q_\tau} \mathcal{D}_t\left(\frac{1}{2}|\mathcal{D}_x w|^2\right) e^{-\theta t}\, dx\, dt;$$

$$\int\limits_0^\tau e^{-\theta t} \mathcal{D}_t\left(\frac{1}{2}|\mathcal{D}_x w|^2\right) dt = \frac{1}{2} e^{-\theta\tau}\cdot|\mathcal{D}_x w(\tau,x)|^2 + \frac{\theta}{2}\int\limits_0^\tau e^{-\theta t}\cdot|\mathcal{D}_x w|^2 dt;$$

$$\int\limits_0^\tau e^{-\theta t}\cdot(\mathcal{D}_x w(t,0), \mathcal{D}_t w(t,0))\, dt = \frac{1}{2} e^{-\theta\tau}\cdot(w(\tau,0), a_0^{-1} w(\tau,0)) +$$

$$+\frac{\theta}{2}\int\limits_0^\tau e^{-\theta\tau}\cdot(w(\tau,0), a_0^{-1} w(\tau,0))\, d\tau .$$

Таким образом, имеем

$$e^{-\theta\tau}\cdot(w(\tau,0), a_0^{-1} w(\tau,0)) + \theta\cdot\int\limits_0^\tau e^{-\theta\tau}(w(\tau,0), a_0^{-1} w(\tau,0))\, d\tau +$$

$$+\int\limits_0^1 e^{-\theta\tau}\cdot|\mathcal{D}_x w(\tau,x)|^2 dx + \theta\iint\limits_{Q_\tau} e^{-\theta t}\cdot|\mathcal{D}_x w|^2 dx\, dt +$$

$$+2\bar{a}\iint\limits_{Q_\tau} e^{-\theta t}\cdot|\mathcal{D}_x^2 w|^2 dx\, dt \leq 2c_{19}\cdot\iint\limits_{Q_\tau} e^{-\theta t}\,[|\mathcal{D}_x^2 w|\cdot|\varphi| +$$

$$+|\mathcal{D}_x^2 w|\cdot\sum_{K=1}^{2}|\mathcal{D}_x^{2-K} w|]\, dx\, dt . \qquad /42/$$

Обозначим $\bar{b} = max(a,b)$. Оценим правую часть /42/, используя неравенство $2ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon} b^2$ $(\varepsilon > 0)$ и относя малый множитель ε к $|\mathcal{D}_x^2 w|$. Получим

$$\frac{1}{\bar{b}}\cdot|w(\tau,0)|^2\cdot e^{-\theta\tau} + \frac{\theta}{\bar{b}}\int\limits_0^\tau e^{-\theta t}\cdot|w(\tau,0)|^2 d\tau + \int\limits_0^1 e^{-\theta\tau}\cdot|\mathcal{D}_x w(\tau,x)|^2 dx +$$

$$+\theta\iint\limits_{Q_\tau} e^{-\theta t}\cdot|\mathcal{D}_x w|^2 dx\, dt + 2\bar{a}\iint\limits_{Q_\tau} e^{-\theta t}\cdot|\mathcal{D}_x^2 w|^2 dx\, dt \leq$$

$$\leq c_{20}\cdot\iint\limits_{Q_\tau} e^{-\theta t}\cdot[\varepsilon\cdot|\mathcal{D}_x^2 w|^2 + \frac{1}{\varepsilon}(|\varphi|^2 + |w|^2 + |\mathcal{D}_x w|^2)]\, dx\, dt,$$

или

$$\frac{1}{\bar{b}}|w(\tau,0)|^2\, e^{-\theta t} + \frac{\theta}{\bar{b}}\int\limits_0^\tau e^{-\theta\tau}\cdot|w(\tau,0)|^2 d\tau + \int\limits_0^1 e^{-\theta\tau}\cdot|\mathcal{D}_x w(\tau,x)|^2 dx +$$

$$+(2\bar{a} - \varepsilon\cdot c_{20})\cdot\iint\limits_{Q_\tau} e^{-\theta t}\cdot|\mathcal{D}_x^2 w|^2 dx\, dt + \left(\theta - c_{20}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\right)\iint\limits_{Q_\tau} e^{-\theta t}|\mathcal{D}_x w|^2 dx\, dt \leq$$

$$\leq c_{20}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\iint\limits_{Q_\tau} e^{-\theta\tau}\cdot[|\varphi|^2 + |w|^2]\, dx\, dt . \qquad /43/$$

Умножив первое уравнение системы /39/ скалярно на $e^{-\theta t}\cdot w(t,x)$ и

проинтегрировав по Q_τ, имеем

$$\iint\limits_{Q_\tau} [-(\mathcal{D}_t w, w) + (a_0 \mathcal{D}_x^2 w, w) + (a_1 \mathcal{D}_x w, w) + (a_2 w, w)] e^{-\theta t} dx\,dt =$$

$$= \iint\limits_{Q_\tau} (\varphi, w) e^{-\theta t} dx\,dt.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\int_0^1 e^{-\theta\tau} \cdot |w(\tau,x)|^2 dx + \theta \cdot \iint\limits_{Q_\tau} |w|^2 e^{-\theta t} dx\,dt + 2\int_0^\tau |w(t,0)|^2 e^{-\theta t} dt +$$

$$+ 2\bar{a} \iint\limits_{Q_\tau} e^{-\theta t} \cdot |\mathcal{D}_x w|^2 dx\,dt + \int_0^\tau |w(t,1)|^2 e^{-\theta t} dt \le$$

$$\le c_{21} \iint\limits_{Q_\tau} e^{-\theta t} \cdot [|w|^2 + |\varphi| \cdot |w|] dx\,dt.$$

Оценим правую часть последнего неравенства

$$c_{21} \cdot \iint\limits_{Q_\tau} e^{-\theta t} \cdot [|w|^2 + |\varphi| \cdot |w|] dx\,dt \le c_{22} \iint\limits_{Q_\tau} e^{-\theta t} \cdot [|w|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \cdot |\varphi|^2 +$$

$$+ \varepsilon \cdot |w|^2] dx\,dt = c_{22} \cdot \iint\limits_{Q_\tau} e^{-\theta t} \cdot [|w|^2 \cdot (1+\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \cdot |\varphi|^2] dx\,dt.$$

Отсюда

$$\int_0^1 e^{-\theta\tau} \cdot |w(\tau,x)|^2 dx + (\theta - c_{22}(1+\varepsilon)) \iint\limits_{Q_\tau} |w|^2 e^{-\theta t} dx\,dt +$$

$$+ 2\int_0^\tau |w(t,0)|^2 e^{-\theta t} dt + 2\bar{a} \iint\limits_{Q_\tau} |\mathcal{D}_x w|^2 e^{-\theta t} dx\,dt +$$

$$+ \int_0^\tau |w(t,1)|^2 e^{-\theta t} dt \le c_{22} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\tau e^{-\theta t} \cdot |\varphi(t)|^2 dt. \qquad /44/$$

Выбирая малое $\varepsilon > 0$ и достаточно большое $\theta > 0$, получим из /43/ и /44/ следующие оценки:

$$|w(\tau,0)|^2 + \int_0^\tau |w(\tau,0)|^2 d\tau + \int_0^1 |\mathcal{D}_x w(\tau,x)|^2 dx + \iint\limits_{Q_\tau} |\mathcal{D}_x^2 w|^2 dx\,dt +$$

$$+ \iint\limits_{Q_\tau} |\mathcal{D}_x w|^2 dx\,dt \le c_{23} \iint\limits_{Q_\tau} [|\varphi|^2 + |w|^2] dx\,dt; \qquad /45/$$

$$\int_0^1 |w(\tau,x)|^2 dx + \iint\limits_{Q_\tau} |w|^2 dx\,dt + \int_0^\tau |w(t,0)|^2 dt + \iint\limits_{Q_\tau} |\mathcal{D}_x w|^2 dx\,dt +$$

$$+ \int_0^\tau |w(t,1)|^2 dt \le c_{24} \int_0^\tau |\varphi(t)|^2 dt. \qquad /46/$$

Из основной системы /39/, в силу /45/, /46/, находим

$$\iint\limits_{Q_\tau} |\mathcal{D}_t w|^2 dx\,dt \le c_{25} \cdot \int\limits_0^\tau |\varphi(t)|^2 dt . \qquad /47/$$

Из /45/–/47/ имеем

$$|w(\tau,0)|^2 + \int\limits_0^\tau |w(t,0)|^2 dt + \int\limits_0^\tau |w(t,1)|^2 dt + \int\limits_0^1 |\mathcal{D}_x w(\tau,x)|^2 dx +$$

$$+ \iint\limits_{Q_\tau} |\mathcal{D}_x w|^2 dx\,dt + \int\limits_0^1 |w(\tau,x)|^2 dx + \|w\|^2_{1,2;2} \le$$

$$\le c_{26} \cdot \int\limits_0^\tau |\varphi(t)|^2 dt .$$

Из неравенства /40/ при каждом $\tau \in [0,T]$ имеем:

$$\int\limits_0^1 |w(\tau,x)|^2 dx \le c_{26} \cdot \int\limits_0^\tau |\varphi(t)|^2 dt ;$$

$$\int\limits_0^1 |w_2(s,x)|\,dx \le \sqrt{\int\limits_0^1 |w_2(s,x)|^2 dx} \le c_{27} \cdot \sqrt{\int\limits_0^s |\varphi(t)|^2 dt} \le$$

$$\le c_{27} \cdot \sqrt{\int\limits_0^s (\max_{[0,s]} |\varphi(t)|)^2 dt} = c_{27} \cdot \sqrt{(\max_{[0,s]} |\varphi(t)|)^2 \cdot s} \le$$

$$\le c_{27} \sqrt{T} \cdot \|\varphi(t)\|_{C[0,s]} ;$$

$$\int\limits_0^1 |w_2(s,x)|\,dx \le c_{28} \cdot \|\varphi(t)\|_{C[0,s]} . \qquad /41/$$

Лемма 3 полностью доказана.

Л е м м а 4. Если при каждом фиксированном управлении $u(t) \in U_\partial$ решение $v_1(t,x)$, $v_2(t,x) \in C^{2,\alpha}(Q)$, $v_3(t) \in W([0,T])$ задачи /I/–/3/ существует, то оно единственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть задача /I/–/3/ имеет два решения: v_1, v_2, v_3 и $\bar v_1, \bar v_2, \bar v_3$ – при одном и том же управлении $u(t) \in U_\partial$. Обозначим $\Delta v_1 = v_1 - \bar v_1$, $\Delta v_2 = v_2 - \bar v_2$, $\Delta v_3 = v_3 - \bar v_3$. Тогда

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \Delta v_1}{\partial t} = a \cdot \frac{\partial^2 \Delta v_1}{\partial x^2} - \frac{\partial \Delta v_1}{\partial x} - cf \cdot \Delta v_1 - c\bar v_1 f'_{v_2} \cdot \Delta v_2 ;\\
&\frac{\partial \Delta v_2}{\partial t} = b \cdot \frac{\partial^2 \Delta v_2}{\partial x^2} - \frac{\partial \Delta v_2}{\partial x} + kf \cdot \Delta v_1 + (k\bar v_1 f'_{v_2} - g) \cdot \Delta v_2 + g \cdot \Delta v_3 ;\\
&d\Delta v_3/dt = d \cdot \Big(\int\limits_0^1 \Delta v_2(t,x)\,dx - \Delta v_3\Big) - u(t) \cdot \Delta v_3 ;
\end{aligned}\right\} \quad /48/$$

$$a\,\frac{\partial\Delta v_1(t,0)}{\partial x}-\Delta v_1(t,0)=0;\quad \frac{\partial\Delta v_1(t,1)}{\partial x}=0;$$
$$b\,\frac{\partial\Delta v_2(t,0)}{\partial x}-\Delta v_2(t,0)=0;\quad \frac{\partial\Delta v_2(t,1)}{\partial x}=0; \qquad /49/$$

$$\Delta v_1(0,x)=0;\ \ \Delta v_2(0,x)=0;\ \ \Delta v_3(0)=0; \qquad /50/$$
$$f'_{v_2}(\theta)=\int_0^1 f'_{v_2}(v_2+\tau\cdot(\bar{v}_2-v_2))\,d\tau .$$

По известной теореме [4, 5], первые два уравнения линейной системы /48/-/50/ имеют решения $\Delta v_1, \Delta v_2 \in C^{2,\alpha}(Q)'$, и справедливы оценки
$$|\Delta v_i|_{2,\alpha}\le C_{29}(T)\cdot|\Delta v_3|_{0,\alpha},\quad i=1;2.$$

Интегрируем третье уравнение системы /48/ на отрезке $[0,t]$:
$$\Delta v_3(t)=-\int_0^t (d+u(s))\,\Delta v_3(s)\,ds+d\int_0^t\int_0^1 \Delta v_2(s,x)\,dx\,ds .$$

Отсюда $\quad |\Delta v_3|\le C_{30}\cdot\int_0^t |\Delta v_3(s)|\,ds+d\int_0^t\int_0^1 |\Delta v_2(s,x)|\,dx\,ds .$

Используя оценку /4I/ леммы 3, имеем
$$\|\Delta v_3(t)\|_{C[0,t]}\le C_{31}\cdot\int_0^t \|\Delta v_3(s)\|_{C[0,s]}\,ds,\quad 0\le s\le t .$$

Отсюда $\|\Delta v_3(t)\|_{C[0,t]}\le 0$. Следовательно, $\Delta v_3\equiv 0;\ |\Delta v_3|_{0,\alpha}=0.$

Тогда $\ |\Delta v_1|_{2,\alpha}=0,\ \ |\Delta v_2|_{2,\alpha}=0,\ \ \Delta v_1=0,\ \ \Delta v_2\equiv 0 .$

Лемма 4 доказана.

Ш. Для доказательства теоремы существования решения задачу /I/-/3/ запишем в виде:
$$\mathcal{L}v\equiv-\mathcal{D}_t v+a_0\mathcal{D}_x^2 v+a_1\mathcal{D}_x v+a_2 v=F(v_1,v_2,v_3);$$
$$0=-\mathcal{D}_t v_3+d\cdot\Big(\int_0^1 v_2(t,x)\,dx-v_3(t)\Big)+u(t)\cdot(E-v_3(t)); \qquad /5I/$$

$$a_0\mathcal{D}_x v(t,0)-v(t,0)=-1;\quad \mathcal{D}_x v(t,1)=0; \qquad /52/$$
$$v(0,x)=v_0(x);\quad v_3(0)=v_{30}; \qquad /53/$$

где
$$a_0=\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix},\ a_1=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix},\ a_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&-g\end{pmatrix},\ F(v_1,v_2,v_3)=\begin{pmatrix}c\,v_1 f(v_2)\\-\kappa v_1 f(v_2)-g v_3\end{pmatrix};$$

$$1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix};\ 0=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix};\quad \vartheta(t,x)=\begin{pmatrix}\vartheta_1(t,x)\\ \vartheta_2(t,x)\end{pmatrix}.$$

Предположим, что выполнены условия согласования нулевого порядка, которые в нашем случае имеют вид:

$$a_0\mathcal{D}_x^2\vartheta_0+a_1\mathcal{D}_x\vartheta_0+a_2\vartheta_0=F(\vartheta_{10},\vartheta_{20},\vartheta_{30});$$

$$d\Big(\int_0^1\vartheta_{20}(x)\,dx-\vartheta_{30}\Big)+u(0)\cdot(E-\vartheta_{30})=0;$$

$$(a_0\mathcal{D}_x\vartheta_0-\vartheta_0)_{x=0}=-1;\ \ (\mathcal{D}_x\vartheta_0)_{x=1}=0;\ \ \vartheta_3(0)=\vartheta_{30}.$$

Л е м м а 5. Пусть $\vartheta(t,x)\in C^{2,\alpha}(Q)$; $\vartheta_3(t)\in W([0,T])$ – решение задачи /I/-/3/ при каждом фиксированном $u(t)\in U_\partial$. Тогда

$$|\vartheta|_{2,\alpha}\le C_{32}\cdot[|F|_{0,\alpha}+1],\qquad /54/$$

где C_{32} зависит лишь от α и от данных задачи.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть задача /I/-/3/ имеет решение $\vartheta(t,x)\in C^{2,\alpha}(Q)$, $\vartheta_3(t)\in W([0,T])$. Тогда $\vartheta\in W_2^{1,2}(Q)$ и справедлива оценка [2]:

$$\|\vartheta\|_{1,2;2}\le const\,[\|F\|_{L_2}+1].\qquad /55/$$

Имеет место вложение $W_2^{1,2}(Q)\subset C^{0,\alpha}(Q)$. Отсюда $|\vartheta|_{0,\alpha}\le$ $\le const\,\|\vartheta\|_{1,2;2}$. Из последних двух неравенств следует $|\vartheta|_{0,\alpha}\le const$, так как $\|F\|_{L_2}$ ограничено в силу лемм I и 2. Далее, как и в случае получения неравенства /55/, рассматривая первые два уравнения системы /I/-/3/ как линейные уравнения со свободными членами $F(\vartheta_1,\vartheta_2,\vartheta_3)$ и применяя теорему Солонникова [2, 4], получим $|\vartheta|_{2,\alpha}\le C_{32}[|F|_{0,\alpha}+1]$, где C_{32} зависит от α и от данных задачи.

Лемма 5 доказана.

Т е о р е м а I. Пусть $u(t)\in U_\partial$, а $\vartheta_0(x)$ обладает непрерывными по Гельдеру производными $\mathcal{D}_x^i\vartheta_0$ до второго порядка включительно и выполняются условия согласования нулевого порядка. Тогда задача /I/-/3/ имеет единственное решение:

$$\vartheta(t,x)\in C^{2,\alpha}(Q),\ \vartheta_3(t)\in W([0,T]).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем, используя теорему Лере-Шаудера [3]. Рассмотрим семейство уравнений

$$\mathcal{L}_\tau\vartheta\equiv-\mathcal{D}_t\vartheta+a_0\mathcal{D}_x^2\vartheta+a_1\mathcal{D}_x\vartheta+a_2\vartheta=\tau\cdot F(\vartheta_1,\vartheta_2,\vartheta_3),\qquad /56/$$

где $0\le\tau\le1$.

Повторяя рассуждения, проведенные в леммах I, 2, 5 для задачи /56/ и уравнения для ϑ_3, получим оценку

$$|v|_{2,\alpha} \le C_{33} \cdot |\tau \cdot F|_{0,\alpha} \le C_{33} \cdot |F|_{0,\alpha}, \qquad /57/$$

где C_{33} не зависит от τ, v_1, v_2, v_3, а зависит лишь от α и данных задачи.

Рассмотрим банахово пространство B функций $v(t,x)$ на Q, $B \subset C^{1,\alpha}(Q)$, удовлетворяющих граничным и начальным условиям /2/-/3/. Для каждого $v \in B$ найдем решение $v_3(t)$ обыкновенного дифференциального уравнения в системе /I/. Это решение подставим в $F(v_1, v_2, v_3)$.

Обозначим далее через

$$w(t,x) = V(v,\tau) \qquad /58/$$

решение линейной системы (для $\forall v \in B, \tau \in [0,1]$):

$$-\mathcal{D}_t w + a_0 \mathcal{D}_x^2 w + a_1 \mathcal{D}_x w + a_2 w = \tau \cdot F(v_1, v_2, v_3), \qquad /59/$$

удовлетворяющее условиям /2/-/3/. Такое решение существует, так как каждое из уравнений системы /59/ является линейным уравнением с одной неизвестной функцией. Очевидно, $w \in C^{2,\alpha}(Q)$.

Проверим выполнимость условий теоремы Лере-Шаудера [3]. Действительно, при $\tau = 0$ уравнение /59/ имеет единственное решение.

Рассмотрим далее шар $I_\tau = \{v \in B, |v|_{1,\alpha} \le \tau\}$ и покажем, что при $\forall \tau \in [0,1]$ оператор $V(v,\tau)$ вполне непрерывен. Для каждого $v \in I_\tau$ задача /59/ имеет решение. Покажем, что $|w|_{2,\alpha} \le C_{34}(\tau)$.

Для системы /59/ с соответствующими граничным и начальным условиями, по известной теореме [4], имеем $|w|_{2,\alpha} \le C_{35} \cdot [|F|_{0,\alpha} + 1]$. Функцию $F(v_1, v_2, v_3)$ представим в виде

$$F(v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} c\, v_1 f(v_2) \\ -K v_1 f(v_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -g \cdot v_3 \end{pmatrix} = F_1(v_1, v_2) + F_2(v_3).$$

Очевидно, $|F|_{0,\alpha} \le |F_1|_{0,\alpha} + |F_2|_{0,\alpha}$. Из $v \in I_\tau$ следует

$$\max_Q |v_1 f(v_2)| \le C_{36} \cdot \max_Q |v_1| \le C_{36} \cdot \tau,$$

$$H_\alpha(v_1 f(v_2)) \le C_{37}(\tau).$$

Отсюда $|F_1|_{0,\alpha} \le C_{38}(\tau)$.

Рассматривая третье уравнение системы /I/, имеем

$$v_3(t) = v_{30} + \int_0^t \Big[d \int_0^1 v_2(\tau, x)\, dx - v_3(\tau) \cdot (d + u(\tau)) + E \cdot u(\tau)\Big]\, d\tau.$$

Отсюда $|v_3(t)| \le C_{39}(\tau) + |d + u_0| \cdot \int_0^t |v_3(\tau)|\, d\tau$ или $|v_3(t)| \le C_{40}(\tau)$.

Тогда

$$v_3(t_1) - v_3(t_2) = \int_{t_2}^{t_1} \Big[d \int_0^1 v_2(\tau, x)\, dx - v_3(\tau) \cdot (d + u(\tau)) + E \cdot u(\tau)\Big]\, d\tau;$$

$$|v_3(t_1) - v_3(t_2)| \le C_{41}(\tau) \cdot (t_1 - t_2).$$

Отсюда $H_\alpha(\vartheta_3) \le C_{42}(\tau)$ или $|F_2|_{0,\alpha} \le C_{43}(\tau)$. Таким образом, $|F|_{0,\alpha} \le C_{44}(\tau)$. Положим $C_{34}(\tau) = C_{35}(\tau)\cdot[C_{44}(\tau)+1]$. Таким образом, оператор $V(\vartheta,\tau)$ переводит ограниченное множество I_τ в ограниченное множество $II_\tau = \{w : |w|_{2,\alpha} \le C_{34}(\tau)\}$ пространства $C^{2,\alpha}$, а значит, и в ограниченное множество пространства $C^{1,\alpha}(Q)$. Вложение $C^{2,\alpha} \subset C^{1,\alpha}$ вполне непрерывно. Это означает, что множество II_τ является компактным в $C^{1,\alpha}(Q)$. Следовательно, оператор V переводит ограниченное множество пространства B в компактное множество пространства B, т.е. оператор V вполне непрерывен.

Покажем равномерную непрерывность оператора $V(\vartheta,\tau)$ на $I_\tau \times [0,1]$.

Рассмотрим функции $\vartheta_1^1, \vartheta_2^1, \vartheta_1^2, \vartheta_2^2 \in I_\tau$. Обозначим

$$w^j = V(\vartheta^j,\tau);\quad z_i = w_i^1 - w_i^2 \ (j, i = 1;2);\quad \tilde{\vartheta}_k = \vartheta_k^1 - \vartheta_k^2 \ (k=1,2,3).$$

Функция $Z = (z_1, z_2)$ удовлетворяет уравнению

$$-\mathcal{D}_t z + a_0\mathcal{D}_x^2 z + a_1\mathcal{D}_x z + a_2 z =$$
$$= \tau\cdot\left[F(\vartheta_1^1,\vartheta_2^1,\vartheta_3^1) - F(\vartheta_1^2,\vartheta_2^2,\vartheta_3^2)\right].$$

Имеем [4]

$$|z|_{2,\alpha} \le C_{45}\cdot\left|F(\vartheta_1^1,\vartheta_2^1,\vartheta_3^1) - F(\vartheta_1^2,\vartheta_2^2,\vartheta_3^2)\right|_{0,\alpha}. \qquad /60/$$

Оценим правую часть /60/:

$$F(\vartheta_1^1,\vartheta_2^1,\vartheta_3^1) - F(\vartheta_1^2,\vartheta_2^2,\vartheta_3^2) =$$
$$= \begin{pmatrix} c\,[\vartheta_1^1 f(\vartheta_2^1) - \vartheta_1^2 f(\vartheta_2^2)] \\ -k\,[\vartheta_1^1 f(\vartheta_2^1) - \vartheta_1^2 f(\vartheta_2^2)] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -g\cdot(\vartheta_3^1 - \vartheta_3^2) \end{pmatrix} = \Phi_1 + \Phi_2.$$

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} c\,f(\vartheta_2^1) & c\,\vartheta_1^2 f'_{\vartheta_2} \\ -k\,f(\vartheta_2^1) & -k\,\vartheta_1^2 f'_{\vartheta_2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \vartheta_1^1 - \vartheta_1^2 \\ \vartheta_2^1 - \vartheta_2^2 \end{pmatrix} =$$
$$= A(\vartheta_1^1,\vartheta_2^1,\vartheta_1^2,\vartheta_2^2)\cdot(\vartheta^1 - \vartheta^2).$$

Отсюда $|\Phi_1|_{0,\alpha} \le C_{46}\cdot|\vartheta^1 - \vartheta^2|_{0,\alpha}$. Из третьего уравнения системы /I/ имеем

$$\vartheta_3^1 - \vartheta_3^2 = \int_0^t \left[d\int_0^1 (\vartheta_2^1 - \vartheta_2^2)\,dx - (d+u)\cdot(\vartheta_3^1 - \vartheta_3^2)\right]d\tau. \qquad /6I/$$

Отсюда $|\vartheta_3^1 - \vartheta_3^2| \le C_{47}\cdot\|\vartheta^1 - \vartheta^2\|_C$. Найдем оценку для $H_\alpha(\vartheta_3^1 - \vartheta_3^2)$. Из формулы /6I/ при $0 \le t_2 \le t_1 \le T$ имеем

$$\tilde{\vartheta}_3(t_1) - \tilde{\vartheta}_3(t_2) = \int_{t_2}^{t_1}\left[d\cdot\int_0^1 \tilde{\vartheta}_2\,dx - (d+u)\cdot\tilde{\vartheta}_3\right]d\tau$$

или

$$|\tilde{v}_3(t_1) - \tilde{v}_3(t_2)| \le [d \cdot \|\tilde{v}_2\|_C + C_{48} \cdot \|\tilde{v}_3\|_C] \cdot (t_1 - t_2).$$

Отсюда $H_\alpha(\tilde{v}_3) \le C_{49} \cdot \|v^1 - v^2\|_C$. Таким образом,

$$|\Phi_2|_{0,\alpha} = g|v_3^1 - v_3^2|_{0,\alpha} \le C_{50} \cdot g \cdot \|v^1 - v^2\|_C \le C_{51} \cdot |v^1 - v^2|_{0,\alpha}.$$

Неравенство /60/ принимает вид

$$|z|_{2,\alpha} \le C_{45} \cdot (C_{46} + C_{51}) \cdot |v^1 - v^2|_{0,\alpha} = C_{52}|v^1 - v^2|_{0,\alpha}.$$

Отсюда $\quad |z|_{2,\alpha} \le C_{52} \cdot |v^1 - v^2|_{0,\alpha} \le C_{52} \cdot |v^1 - v^2|_{1,\alpha}$,

или $\quad |w^1 - w^2|_{1,\alpha} \le C_{52} \cdot |v^1 - v^2|_{1,\alpha}$.

Таким образом, оператор $V(v, \tau)$ равномерно непрерывен по v на $I_2 \times [0,1]$.

Пусть $\tau^1, \tau^2 \in [0,1]$. Обозначим $w^i = V(v, \tau^i)$ $(i = 1, 2)$. Тогда

$$|w^1 - w^2|_{2,\alpha} \le |\tau^1 - \tau^2| \cdot |F(v_1, v_2, v_3)|_{0,\alpha} \le C_{53}(\tau) \cdot |\tau^1 - \tau^2|,$$

т.е. имеем равномерную непрерывность по τ. Таким образом, все условия теоремы Лере-Шаудера выполнены, следовательно, уравнение $v = V(v, \tau)$, $\tau \in [0,1]$ имеет по крайней мере одно решение при $\forall \tau \in [0,1]$. Очевидно, $v \in C^{2,\alpha}(Q)$.

Единственность решения следует из леммы 4.

Теорема I полностью доказана.

IV. Т е о р е м а 2. Пусть существует хотя бы одна измеримая функция $u(t) \in U_\partial$ такая, что при $u = u(t)$ решение v_1, v_2, v_3 задачи /I/-/3/ удовлетворяет условию /6/. Тогда существует и оптимальное управление, т.е. существует измеримая функция $u^*(t) \in U_\partial$, при которой $\mathcal{J}(u^*) = \min\limits_{u \in U_\partial} \mathcal{J}(u)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При каждом $u(t) \in U_\partial$, по теореме I, задача /I/-/3/ имеет единственное решение $v_1(t,x), v_2(t,x) \in C^{2,\alpha}(Q)$, $v_3(t) \in W([0,T])$. Рассмотрим теперь множество всех решений v_1, v_2, v_3 задачи /I/-/3/ при различных $u(t) \in U_\partial$, для которых выполняется условие /6/. Это множество непусто, так как, по условию, одно такое решение существует. Если это множество конечно, то утверждение теоремы очевидно. Если же оно бесконечно, то выберем из него последовательность v_1^n, v_2^n, v_3^n, для которой $\mathcal{J}(u^n)$ монотонно убывает и $\inf\limits_{u^n \in U_\partial} \mathcal{J}(u^n) = m \ge 0$, $m = const$. При этом

$$|v_i^n|_{2,\alpha} \le C_{54} = const, \quad |v_3^n| \le C_4, \quad i = 1;2,$$

$$v_3^n(t) = v_{30} + \int_0^t \Big[d\Big(\int_0^1 v_2^n(s,x)\,dx - v_3^n(s)\Big) + u^n(s) \cdot (E - v_3^n(s))\Big]\,ds. \quad /62/$$

Последовательность $\{v_3^n\}$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна. Действительно, если $t_1, t_2 \in [0,T]$, $|t_1 - t_2| < \delta$, то

$|v_3^n(t_1)-v_3^n(t_2)|\le c_{55}\int\limits_{t_2}^{t_1}ds\le c_{55}\cdot\delta=\varepsilon,\ \forall n$. Отсюда последовательность $\{v_3^n\}$ компактна в $C[0,T]$. Неравенство $|v^n|_{2,\alpha}\le c_{54}$ запишем в виде

$$|\mathcal{D}_t v^n|_{0,\alpha}+|\mathcal{D}_x^2 v^n|_{0,\alpha}+|\mathcal{D}_x v^n|_{0,\alpha}+|v^n|_{0,\alpha}\le c_{54} \qquad /63/$$

или

$$\sup_Q|\mathcal{D}_t v^n|+\sup_{\substack{P,R\in Q\\ P\ne R}}\frac{|\mathcal{D}_t v^n(P)-\mathcal{D}_t v^n(R)|}{[d(P,R)]^\alpha}\le c_{54}, \qquad /64/$$

$$\sup_Q|\mathcal{D}_x^2 v^n|+\sup_{\substack{P,R\in Q\\ P\ne R}}\frac{|\mathcal{D}_x^2 v^n(P)-\mathcal{D}_x^2 v^n(R)|}{[d(P,R)]^\alpha}\le c_{54} \qquad /65/$$

и т.д., где $P(t_1,x),\ R(t_2,y)\in Q$.

Из неравенств /63/-/65/ следует, что последовательность $\{v^n\}$ является компактной вместе со всеми производными I-го и 2-го порядков по x и I-го порядка по t . Действительно, равномерная ограниченность функции $v(t,x)$ и ее производных следует из /63/. Покажем равностепенную непрерывность.

Рассмотрим произвольное $\varepsilon>0$ и положим $\delta=\left(\frac{\varepsilon}{c_{54}}\right)^{1/\alpha}$. Тогда из $d(P,R)\le\delta$ следует $|\mathcal{D}_t v^n(P)-\mathcal{D}_t v^n(R)|\le\varepsilon,\ |\mathcal{D}_x^2 v^n(P)-\mathcal{D}_x^2 v^n(R)|\le\varepsilon$ и т.д. Отсюда последовательность $\{v^n\}$ компактна в $C^{1,2}(Q)$. Выберем из $\{u^n(t)\}$ подпоследовательность управлений так, чтобы $v_3^n(t)\to v_3^*(t)$ при $n\to\infty$ по норме $C[0,T]$ и $v^n(t,x)\to v^*(t,x)$ по норме $C^{1,2}(Q)$.

Имеем

$$f(v_2^n)\to f(v_2^*),\quad \iint\limits_{Q_t} v_2^n(\tau,x)\,dx\,d\tau\to\iint\limits_{Q_t} v_2^*(\tau,x)\,dx\,d\tau,$$

$$|v_1^n f(v_2^n)-v_1^* f(v_2^*)|\le f(v_2^n)\cdot|v_1^n-v_1^*|+$$

$$+v_1^*\cdot|f(v_2^n)-f(v_2^*)|\to 0,\quad n\to\infty.$$

Последовательность $\{u^n\}\in U_\partial\subset L_2[0,T]$, поэтому $\{u^n\}$ слабокомпактна в $L_2[0,T]$, т.е. $u^n(t)\to u^*(t)$ слабо в $L_2[0,T]$.

Доказательство принадлежности $u^*(t)\in U_\partial,\ 0\le t\le T$, проведем аналогично [6]. Имеем $u^n(t)\le u_0=const$. Покажем, что $u^*(t)\le u_0$. Обозначим $K=\{t:\ t\in[0,T],\ u^*(t)>u_0\}$, $\chi(t)$ – характеристическая

функция множества K. Эта функция измерима и ограничена, т.е. $\chi(t) \in L_2[0,T]$. В силу слабой сходимости последовательности $\{u^n\}$, имеем

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \chi(t)\cdot[u^*(t)-u^n(t)]\,dt = 0.$$

Так как $u^*(t) - u^n(t) > 0$ на K, то $mes K=0$. Итак, почти для всех $t\in[0,T]$ имеем $u^*(t) \le u_0$. Аналогичные рассуждения проводим и для другого конца отрезка $[0, u_0]$. В итоге имеем $0 \le u^*(t) \le u_0$ для п.в. $t\in[0,T]$. Переопределим $u^*(t)$ на соответствующем множестве меры нуль так, чтобы $u^*(t)\in U_\partial$ для всех $t\in[0,T]$. Далее, имеем

$$\left|\int_0^t (E-v_3^n(s))\cdot u^n(s)\,ds - \int_0^t (E-v_3^*(s))\,u^*(s)\,ds\right| \le$$

$$\le \left|\int_0^t u^n\cdot(v_3^*-v_3^n)\,ds\right| + \left|\int_0^t (E-v_3^*)\cdot(u^n-u^*)\,ds\right| \to 0,\ n\to\infty.$$

Таким образом, переходя к пределу при $n\to\infty$, получим из /62/

$$v_3^*(t) = v_{30} + \int_0^t \left[d\left(\int_0^1 v_2^*(s,x)\,dx - v_3^*(s)\right) + u^*(s)\cdot(E-v_3^*(s))\right]ds. \qquad /66/$$

В уравнении /66/ $v_3^*(t)$ - непрерывная функция, а интеграл в правой части - абсолютно непрерывная функция. Поэтому и $v_3^*(t)$ - абсолютно непрерывная функция. Далее, так как $v_2^n \le v_2^{**}$ и $v_2^n \to v_2^*$ в норме $C(Q)$ (точнее, в норме $C^{1,2}(Q)$), то $v_2^* \le v_2^{**}$. Мы показали, что функции v_1^*, v_2^*, v_3^*, u^* удовлетворяют системе уравнений /I/-/3/ и условиям /5/, /6/. Имеем

$$\mathcal{J}(u^n) = \int_0^T v_1^n(t,1)\,dt \to \int_0^T v_1^*(t,1)\,dt = m = \mathcal{J}(u^*),\ n\to\infty,$$

$u^*(t)$ - измеримое оптимальное управление, $u^*(t)\in U_\partial$. По теореме I, существует решение $v_1(t,x), v_2(t,x)\in C^{2,\alpha}(Q)$, $v_3(t)\in W([0,T])$ системы /I/-/3/, соответствующее управлению $u^*(t)\in U_\partial$. Тогда, в силу леммы 4, имеем $v_1(t,x)\equiv v_1^*(t,x)$, $v_2(t,x)\equiv v_2^*(t,x)$, $v_3(t)\equiv v_3^*(t)$. Теорема 2 доказана.

Поступила в ред.-изд.отдел
5 ноября 1981 г.

Литература

1. Georgakis C., Aris R., Amundson N.R. Studies in the control of Tubular Reactors.- Chemical Engineering Science, 1977, v.32, N 11, p. 1359-1387.

2. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.- М.: Наука, 1967.- 736 с.

3. Кружков С.Н. Нелинейные уравнения с частными производными. Ч.I.- М.: Изд-во МГУ, 1969.- 108 с.

4. Солонников В.А. О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида. - Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР, 1965, т.83, с.3-162.

5. Белоносов В.С., Зеленяк Т .И. Нелокальные проблемы в теории квазилинейных параболических уравнений. - Новосибирск, НГУ, 1975.- 156 с.

6. Математическая теория оптимальных процессов/ Понтрягин Л., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. - М.: Наука, 1969. - 384 с.