Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1982 г., вып.22

УДК 517.977.571,4

УПРАВЛЕНИЕ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СО СВОЙСТВОМ РАДОНА-НИКОДИМА

С.И.Суслов

Банахово пространство X обладает свойством Радона-Никодима (RN), если для любого измеримого пространства с конечной мерой $(T, \mathcal{A}, \mu)$ и любой мерой $m: \mathcal{A} \to X$ ограниченной вариации, абсолютно непрерывной относительно μ, существует интегрируемая по Бохнеру функция $f: T \to X$ такая, что $m(A) = \int_A f\, d\mu$ для любого множества $A \in \mathcal{A}$. Разнообразные сведения о свойстве RN можно найти в обзоре [1]. В частности, банахово пространство со свойством RN характеризуется тем, что абсолютно непрерывные функции $x: [0,1] \to X$ почти всюду дифференцируемы и восстанавливаются по своей производной $\dot{x}$, т.е. $x(t) = \int_0^t \dot{x}$. Таким образом, в банаховых пространствах со свойством RN так же, как и в случае конечномерного евклидова пространства, естественно рассматривать абсолютно непрерывные решения систем вида $x(t) = f(t, x(t))$, $x(0) = 0$, где равенство понимается в смысле почти всюду на T. В настоящей работе рассматриваются управляемые системы такого вида, т.е. в правую часть добавляется зависящий от времени параметр, который можно менять в определенных пределах: $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$, $x(0) = 0$, $u(t) \in U(t)$. Каждому управлению u соответствует решение системы x, называемое траекторией. В работе изучаются условия, при которых совокупность всех траекторий замкнута и компактна.

Напомним, как обычно доказывают замкнутость множества траекторий в конечномерном случае. Первый шаг: из сходимости траекторий $x_n \to x$ выводят слабую сходимость их производных. Второй шаг: используя слабую сходимость производных, теорему Мазура, выпуклость множеств $f(t, x, U(t))$, получают соотношение $\dot{x}(t) \in f(t, x(t), U(t))$ почти всюду на T. Третий шаг: применяя лемму о неявной функции типа леммы Филиппова, получают нужное управление. В бесконечномерном случае из сходимости траекторий слабая сходимость их производных, вообще говоря, не вытекает. Однако оказывается, что выпуклости множеств $f(t, x, U(t))$ и имеющейся сходимости производных достаточно для справедливости соотношения $\dot{x}(t) \in f(t, x(t), U(t))$ почти всюду на T при дополнительном предположении сепарабельности X' или слабой компактности множеств $f(t, x, U(t))$. Доказательству этого факта посвящен второй параграф работы.

В третьем параграфе рассматриваются линейные управляемые системы. Для них дополнительно доказывается, что крайние точки замыкания множества траекторий являются траекториями. В первом параграфе даются необходимые сведения об измеримых многозначных отображениях и доказывается основная лемма. В четвертом параграфе исследуется зависимость множества траекторий от параметра.

§ I. Предварительные сведения

Для двух множеств T, X многозначной функцией $F: T\to 2^X$ называется функция на T со значениями во множестве всех непустых подмножеств множества X. Пусть $(T, \mathcal{A})$ - измеримое, а X - топологическое пространства. Многозначная функция $F: T\to 2^X$ называется измеримой, если для любого открытого подмножества $A\subset X$ справедливо $\{t\in T: F(t)\cap A\neq \emptyset\}\in \mathcal{A}$. Графиком многозначной функции $F: T\to 2^X$ называется множество $gr\, F\{(t,x): x\in F(t)\}$.

Если X - полное метрическое сепарабельное пространство с метрикой d, то справедлива

Теорема I [2]. Для многозначной функции $F: T\to 2^X$ с замкнутыми значениями эквивалентны следующие условия:

I) F измерима;

2) функция $d(x, F(t))$ измерима по t для всех $x\in X$;

3) существует последовательность измеримых функций $f_n: T\to X$, $n\in N$, такая, что $F(t) = cl\{f_n(t)\}_{n\in N}$ для всех $t\in T$.

Из каждого условия следует, что $gr\, F$ является $\mathcal{A}\times\mathcal{B}(X)$ -измеримым множеством, где $\mathcal{B}(X)$ обозначает борелевскую σ -алгебру подмножеств пространства X.

Пусть X - банахово пространство, $x\in X$, $A, C\subset X$. В работе используются следующие обозначения: $|x|$ - норма x; X' - сопряженное к X пространство; $B_\varepsilon = \{x\in X: |x|\leq\varepsilon\}$; $cl A$ - замыкание A; $co A$ - выпуклая оболочка A; $ex A$ - множество крайних точек A; $\bar\rho(A,C) = \inf\{\lambda>0: C\subset A + B_\lambda\}$; $\rho(A,C) = max\{\bar\rho(A,C), \bar\rho(C,A)\}$; $\chi(A)$ - характеристическая функция множества A; $C(X)$ - пространство непрерывных функций из $[0,1]$ в X с топологией равномерной сходимости.

Пусть T, X - банаховы пространства. Многозначная функция $F: T\to 2^X$ называется полунепрерывной сверху, если для любой сходящейся последовательности $t_n\to t$, $t_n\neq t$, для любого $\varepsilon>0$ существует номер n_0 такой, что $\bigcup_{n\geq n_0} F(t_n)\subseteq F(t)+B_\varepsilon$. Будем говорить, что функция F обладает свойством P, если при тех же условиях существует номер n_0 такой, что $co\bigcup_{n\geq n_0} F'(t_n)\subseteq F(t)+B_\varepsilon$.

Пусть $(T, \mathcal{A}, \mu)$ - измеримое пространство с конечной мерой. Функцию $f: T\to X$ будем называть селектором многозначной функции $F: T\to 2^X$, если $f(t)\in F(t)$ почти всюду на T. Совокупность μ -измеримых селекторов многозначной функции F будем обозначать через

$S(F)$. Интегралом многозначной функции F на множестве $A \in \mathcal{A}$ называется множество $\int_A F = \{\int_A f : f \in S(F)\}$. Многозначная функция F называется интегрально ограниченной, если существует числовая интегрируемая функция h такая, что $|x| \leq h(t)$ при $x \in F(t)$. Интегральная ограниченность измеримой многозначной функции эквивалентна интегрируемости каждого ее μ-измеримого селектора.

В [3] доказана

Л е м м а 1. Пусть X - сепарабельное банахово пространство; $F: T \to 2^X$- измеримая интегрально ограниченная многозначная функция с замкнутыми выпуклыми значениями; $f: T \to X$ - такая интегрируемая по Бохнеру функция, что $\int_A f \in cl \int_A F$ для всех $A \in \mathcal{A}$. Для того чтобы $f \in S(F)$, достаточно выполнения одного из следующих условий:

1) X' сепарабельно;

2) множество значений функции F является μ-существенно сепарабельным множеством в метрике ρ.

Мы получаем еще один результат подобного типа.

Л е м м а 2. В условиях леммы 1, для того чтобы $f \in S(F)$, достаточно, чтобы почти всюду на T функция F имела слабокомпактные значения.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теоремам У.4.2 и У.5.1 из [4], в X' существует не более чем счетное подмножество, разделяющее точки X. Обозначим через $Y = cl\{y_i\}_{i\in N}$ замкнутое сепарабельное линейное подпространство в X', натянутое на это подмножество. Тогда топология $\sigma(X,Y)$ отделима и $\sigma(X,Y)$-компакты $\sigma(X,Y)$-замкнуты. Но слабые компакты являются компактами в более слабой топологии $\sigma(X,Y)$ и, следовательно, тоже $\sigma(X,Y)$-замкнуты. Теперь, пользуясь теоремой Хана-Банаха, любую точку, не принадлежащую выпуклому слабому компакту, мы можем отделить от этого компакта линейным функционалом из Y. Таким образом, если $f \bar{\in} S(F)$, то найдутся номер n и множество положительной меры $A \in \mathcal{A}$ такие, что

$$y_n(f(t)) > \sup\{y_n(x) : x \in F(t)\}$$

для всех $t \in A$. Но в таком случае

$$y_n(\int_A f) > \sup\{y_n(x) : x \in \int_A F\},$$

что противоречит условию $\int_A F \in cl \int_A F$. Следовательно, $f \in S(F)$.

Как мы увидим в дальнейшем, леммы 1 и 2 являются основным инструментом при доказательстве замкнутости множества траекторий управляемой системы.

§ 2. Замкнутость множества траекторий

Всюду в дальнейшем, если специально не оговорено, $(T, \mathcal{A}, \mu)$ означает отрезок $[0,1]$ с мерой Лебега; X, Y - сепарабельные банаховы пространства, причем X обладает свойством RN; $U: T \to 2^Y$ -

измеримая интегрально ограниченная многозначная функция; $f: T\times X\times \times Y\to X$ μ-измерима по первому аргументу и непрерывна по остальным.

Совокупность $S(U)$ будем также называть множеством допустимых управлений. Абсолютно непрерывную функцию $x: T\to X$, которая почти всюду на T удовлетворяет системе

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),u(t)),\ x(0)=0, \qquad /1/$$

$$u\in S(U), \qquad /2/$$

будем называть траекторией этой системы, соответствующей управлению u. Совокупность всех траекторий системы /1/, /2/ будем обозначать через $\mathcal{T}(U)$.

Т е о р е м а 2. Предположим, что функция $f(t,x(t),u(t))$ интегрируема для любых интегрируемых функций x, u. Если многозначная функция $F_t: x\to f(t,x,U(t))$ имеет при всех $t\in T$ замкнутые значения и обладает свойством P, либо имеет замкнутые выпуклые значения и полунепрерывна сверху, то множество $\mathcal{T}(U)$ (если оно не пусто) замкнуто в пространстве $C(X)$ при выполнении любого из следующих условий:

1) X' сепарабельно;

2) $f(t,x,U(t))$ слабокомпактно при всех $t\in T$, $x\in X$.

Д о к а з а т е л ь с т в о будем вести для случая, когда при всех $t\in T$, $x\in X$ множество $f(t,x,U(t))$ слабокомпактно. В случае сепарабельности пространства X' схема доказательства не меняется, только вместо леммы 2 используется лемма 1.

Предположим сначала, что функция F_t при всех $t\in T$ имеет выпуклые значения и полунепрерывна сверху. Пусть последовательность траекторий $\{x_n\}_{n\in N}$ сходится в $C(X)$ к некоторой функции x_0. Рассмотрим многозначную функцию $F_t(x_0(t))=f(t,x_0(t),U(t))$. По теореме 6.5 из [2], она измерима и, по теореме 7.1 из [2], каждый ее μ-измеримый селектор g представим в виде $g=f(t,x_0(t),u(t))$, где $u\in S(U)$, и, следовательно, интегрируем по условию. Таким образом, функция $F_t(x_0(t))$ интегрально ограничена некоторой функцией h. Тогда

$$|x_0(t)-x_0(s)|=\lim_{n\to\infty}|x_n(t)-x_n(s)|\le\lim_{n\to\infty}\int_s^t|\dot{x}_n|\le\int_s^t h$$

для любых $0\le s<t\le 1$. Следовательно, функция x_0 абсолютно непрерывна, и так как X обладает свойством RN, то почти всюду на T существует ее производная $\dot{x}_0$ такая, что $x(t)=\int_0^t\dot{x}_0$ для всех $t\in T$.

Обозначим через $H_n(t)$ множество $\overline{co}\bigcup_{k\ge n}F_t(x_k(t)), n\in N$. Из условий теоремы легко следует, что для любых $t\in T$, $\varepsilon>0$ существует слабый компакт $K_\varepsilon(t)$ такой, что $H_1(t)\subseteq K_\varepsilon(t)+B_\varepsilon$. Тогда, по лемме Гротендика [5,6], $H_1(t)$ и, следовательно, $H_n(t)$, $n\in N$, слабокомпактны для всех $t \in T$. По теореме I, многозначные функции $H_n, n \in N$, измеримы. Кроме того, очевидно, что

$$\int_A \dot{x}_0 = \lim_{K \to \infty} \int_A \dot{x}_K \in cl \int_A H_n, \quad n \in N.$$

Следовательно, по лемме 2, получаем, что $\dot{x}_0 \in S(H_n)$, $n \in N$.

Рассмотрим теперь функции $\tau_n(t) = \bar{\rho}(F_t(x_0(t)), F_t(x_n(t)))$. Из теоремы I следует, что они измеримы, а полунепрерывность сверху влечет $\lim_{n \to \infty} \tau_n(t) = 0$ для всех $t \in T$. По теореме Егорова, существует последовательность измеримых подмножеств $\{E_n\}_{n \in N}$ такая, что $\lim_{n \to \infty} \mu E_n = 0$ и $\tau_i(t) \leq n^{-1}$ для $t \in T \setminus E_n$, $i \geq K(n)$. Это означает, что

$$\bigcup_{i \geq K(n)} F_t(x_i(t)) \subseteq F_t(x_0(t)) + B_{n^{-1}}$$

для $t \in T \setminus E_n$, и, следовательно,

$$H_{K(n)}(t) \subseteq F_t(x_0(t)) + B_{n^{-1}}.$$

Отсюда, учитывая, что $\dot{x}_0 \in S(H_n)$ при всех $n \in N$, получаем

$$\dot{x}_0(t) \in F_t(x_0(t)) = f(t, x_0(t), U(t))$$

почти всюду на T. По теореме 7.I из [2], существует $u_0 \in S(U)$ такая, что $\dot{x}_0(t) = f(t, x_0(t), u_0(t))$ почти всюду на T, что означает, что x_0 является траекторией.

При выполнении свойства P доказательство протекает аналогично.

§ 3. Линейные системы

В этом параграфе рассматривается случай линейной функции $f = A(t)x + B(t)u$, где A и B – интегрируемые по Бохнеру функции на T со значениями в банаховых пространствах линейных непрерывных операторов из X и Y в X. Тогда управляемая система выглядит так:

$$\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t), \quad x(0) = 0, \quad u \in S(U). \qquad /3/$$

Рассуждая так же, как и в конечномерном случае (см., например, [7]), можно показать, что решение системы /3/, /2/ существует и единственно для любой интегрируемой функции u, а отображение из $S(U)$ в $\mathcal{T}(U)$, переводящее управление в соответствующую ему траекторию, линейно и непрерывно.

Для линейных систем можно выделить еще один случай, когда верна теорема 2.

Т е о р е м а 3. Пусть функция U тождественно равна выпуклому замкнутому ограниченному множеству V. Тогда для системы /3/, /2/ множество $\mathcal{T}(U)$ замкнуто.

Доказательство. Поскольку B является μ-измеримой функцией, то она является поточечным пределом последовательности простых функций почти всюду на T. Следовательно, многозначная функция $B(t)V$ также является поточечным пределом в метрике ρ последовательности простых функций почти всюду на T. Таким образом, множество значений функции $B(t)V$ будет μ-существенно сепарабельным в метрике ρ и, следовательно, таково же множество значений функции $A(t)x(t)+B(t)V$. Теперь мы можем применять лемму I и вести доказательство так же, как и в теореме 2.

Следующая лемма описывает крайние точки множества μ-измеримых селекторов измеримой многозначной функции. Под крайней точкой $S(F)$ здесь понимается точка, которая почти всюду на T не является выпуклой комбинацией конечного набора точек из $S(F)$.

Лемма 3 (см. также [8]). Пусть $F: T \to 2^X$ - измеримая многозначная функция с выпуклыми замкнутыми значениями. Тогда $f \in ex\, S(F)$, если и только если $f(t) \in ex\, F(t)$ почти всюду на T.

Доказательство. Достаточность очевидна. Возьмем теперь $f \in ex\, S(F)$ и построим многозначные функции H и K таким образом:

$$H(t)=\{2f(t)-x : x \in F(t)\}, \quad K(t)=F(t)\cap H(t).$$

Функция H имеет замкнутые значения и измерима по теореме I. Тогда, по той же теореме, $gr\, H \in \mathcal{A}\times\mathcal{B}(X)$. Следовательно, $gr\, K \in \mathcal{A}\times\mathcal{B}(X)$, и, по теореме 3.5. из [2] и теореме I, найдется последовательность измеримых функций $\{u_n\}_{n\in N}$ такая, что $K(t)=cl\{u_n(t)\}_{n\in N}$ для всех $t\in T$. Предположим, что какой-либо член u этой последовательности отличен от f на множестве положительной меры. Тогда $f=2^{-1}u+2^{-1}(2f-u)$ и $u(t)\neq 2f(t)-u(t)$ на множестве положительной меры. Но это противоречит выбору функции f. Таким образом, $K(t)=\{f(t)\}$ почти всюду на T, что означает, что $f(t)\in ex\, F(t)$ почти всюду на T.

Лемма 4. Пусть $F: T\to 2^X$ - измеримая многозначная интегрально ограниченная функция; $cl\,co\,F$ - такая многозначная функция, что $(cl\,co\,F)(t)=cl\,co\,F(t)$ для $t\in T$. Тогда для любой функции $f\in S(cl\,co\,F)$ существует такая последовательность функций $\{f_n\}_{n\in N}\subseteq S(F)$, что последовательность $\{\int_0^t f_n\}_{n\in N}$ сходится к $\int_0^t f$ равномерно по t.

Доказательство. Возьмем функцию $f\in S(cl\,co\,F)$ и $\varepsilon>0$. В силу интегральной ограниченности существует $\delta>0$ такое, что, как только $|t-s|\le\delta$, то $\int_s^t |g|\le \varepsilon/2$ для любого $g\in S(cl\,co\,F)$.

Так как лебегова σ-алгебра неатомична, то [3, теорема 4.3.] для любого $A\in\mathcal{A}$ справедливо

$$cl\int_A F = cl\int_A cl\,co\,F.$$

Следовательно, для разбиения $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ такого, что $|t_i - t_{i-1}| \le \delta,\ i = 1,\ldots,n$, можно взять функции $g_i \in S(F)$ такие, что

$$\left|\int_{t_{i-1}}^{t_i} g_i - \int_{t_{i-1}}^{t_i} f\right| \le \varepsilon/2n, \quad i = 1,\ldots,n.$$

Введем теперь функцию $g_\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} g_i \cdot \chi([t_{i-1}, t_i])$. Очевидно, что $g_\varepsilon \in S(F)$ $|\int_0^t f - \int_0^t g_\varepsilon| \le \varepsilon$ для всех $t \in T$, что заканчивает доказательство.

Лемма 5. Пусть последовательность допустимых управлений системы /3/, /2/ $u_i,\ i = 0,1,\ldots$, такова, что $\lim_{n\to\infty} \int_0^t u_i = \int_0^t u_0$ для всех $t \in T$. Тогда $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, где x_i является траекторией системы /3/, /2/, соответствующей управлению $u_i,\ i = 0,1,\ldots$.

Доказательство. Определим операторы $P_n : C(X) \to C(X)$, $n = 0,1,\ldots$, таким образом:

$$(P_n x)(t) = \int_0^t [A(t)\, x(t) + B(t;\, u_n(t)] .$$

Так как x_n является единственной неподвижной точкой оператора P_n, $n = 0,1,\ldots$, а из условия следует, что $\lim|P_n - P_0| = 0$, то $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Теорема 4. Предположим, что $U : T \to 2^X$ является измеримой интегрально ограниченной многозначной функцией, принимающей компактные значения, либо тождественно равной слабокомпактному множеству. Тогда множество $cl\,\mathcal{T}(U)$ для системы /3/, /2/ является выпуклым слабым компактом в $C(X)$ и $ex\,cl\,\mathcal{T}(U) \subseteq \mathcal{T}(U)$.

Доказательство. Наряду с системой /3/, /2/ рассмотрим аналогичную ей систему, в которой условие /2/ заменено условием

$$u \in S(cl\,co\, U). \qquad /2'/$$

Множество траекторий полученной таким образом системы /3/, /2'/ будем обозначать через $\mathcal{T}(cl\,co\,U)$. Множество $S(cl\,co\,U)$ выпукло и слабокомпактно [5]. Поскольку отображение, переводящее управление в соответствующую ему траекторию, линейно и непрерывно в сильных топологиях, то оно непрерывно и в слабых топологиях. Следовательно, множество $\mathcal{T}(cl\,co\,U)$ выпукло и слабокомпактно в $C(X)$. Очевидно, что $cl\,\mathcal{T}(U) \subseteq \mathcal{T}(cl\,co\,U)$, а из лемм 4 и 5 следует обратное включение $\mathcal{T}(cl\,co\,U) \subseteq cl\,\mathcal{T}(U)$. Таким образом, $cl\,\mathcal{T}(U) = \mathcal{T}(cl\,co\,U)$. Возьмем теперь траекторию $x \in ex\,cl\,\mathcal{T}(U)$. Тогда $x \in ex\,\mathcal{T}(cl\,co\,U)$ и мы можем считать, что этой траектории соответствует управление $u \in ex\,S(cl\,co\,U)$. Но, по лемме 3, $u(t) \in ex\,cl\,co\,U(t) \subseteq U(t)$ почти всюду на T . Следовательно, $u \in S(U)$ и $x \in \mathcal{T}(U)$, что заканчивает доказательство.

§ 4. Зависимость множества траекторий от параметра

Обозначим через $\mathcal{T}_n$ множество траекторий системы

$$\dot{x}(t) = f_n(t, x(t), u(t)),\ \ x(0) = 0,\ \ u(t) \in U(t),$$

$n = 0, 1, \ldots$. Предположим, что для любых $x \in X$, $t \in T$ последовательность $f_n(t, x, U(t))$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится в метрике Хаусдорфа к $f_0(t, x, U(t))$. Тогда справедлива

Т е о р е м а 5. Пусть $x_n \in \mathcal{T}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, и $x_n \to x_0$ в пространстве $C(X)$. Если функции $f_n, n = 0, 1, \ldots$, удовлетворяют условиям теоремы 2, то $x_0 \in \mathcal{T}_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о аналогично доказательству теоремы 2.

Эта теорема обобщает теорему 2 из [9] на случай банаховых пространств со свойством RN.

Поступила в ред.-изд.отдел
22 октября 1981 г.

Л и т е р а т у р а

1. Diestel J., Uhl J. The Radon - Nikodym theorem for Banach space valued measures.-Rocky Mt. J. Math., 1976, v.6, p.1-46.

2. Himmelberg C. Measurable relations.- Fund. Math., 1975, v. 87, p. 53-72.

3. Hiai F., Umegaki H. Integrals, conditional expectation and martingales of multivalued functions.- J. Multivariate Anal., 1977, v. 7, p. 149-182.

4. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. - М.: ИЛ, 1962.-895с.

5. Byrne C. Remarks on the set-valued integrals of Debreu and Aumann.- J. Math. Anal. and Applic., 1978, v.62, p.243-246.

6. Grothendieck A. Topological vector spaces.- New York: Gordon and Breach. 1973.

7. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. - М.: Наука, 1974.-479с.

8. Castaing C., Valadier M. Convex analysis and measurable multifunctions. - Lecture Notes in Math., 580, 1977.-278 p.

9. Sentis R. Convergence de solutions d'équations différentielles multivoques. - C.R.Acad. Sci. Paris.Sér. A, 1974, t.278, p. 1623-1626.