Управляемые системы, ИМ СО АН СССР 1982 г., вып. 22.

УДК 517.977.1

О ЗАМКНУТОСТИ ПУЧКА ТРАЕКТОРИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

С.И.Суслов

В [1] показано, что если множество $F(t,x)$ при каждом $(t,x)\in[0,1]\times X$ выпукло и слабокомпактно в банаховом пространстве X, обладающем свойством Радона-Никодима, то пучок траекторий системы

$$\dot{x}(t)\in F(t,x(t)),\ x(0)=0,$$

замкнут в пространстве $C_{[0,1]}$. В настоящей работе этот результат получается для произвольного сепарабельного банахова пространства X. Если в [1] свойство Радона-Никодима использовалось только для того, чтобы доказать дифференцируемость $C_{[0,1]}$ - предела последовательности траекторий, то здесь дифференцируемость доказывается с помощью полученного в теореме 1 свойства компактности в подходящей топологии множества измеримых селекторов многозначной функции.

§ 1. Предварительные сведения

Мы используем следующие обозначения: $(T,\mathcal{A},\mu)$ - отрезок $[0,1]$ с борелевской σ-алгеброй $\mathcal{A}$ и мерой Лебега μ; X^* - сопряженное пространство к банахову пространству X; $\langle x^*,x\rangle$ - значение функционала $x^*\in X^*$ на элементе $x\in X$; $L_1(X)$, $M(X)$ - пространства (классов эквивалентности), соответственно интегрируемых по Бохнеру и простых (конечноступенчатых) функций из $(T,\mathcal{A},\mu)$ в X; 2^X - множество непустых подмножеств пространства X; $\overline{co}\,A$ - замкнутая выпуклая оболочка множества $A\subseteq X$.

Многозначная функция $F: T\to 2^X$ называется *интегрально ограниченной*, если $|x|\le h(t)$ при $x\in F(t)$ для некоторой интегрируемой функции h, и *измеримой*, если $\{t\in T: F(t)\cap A\neq\emptyset\}\in\mathcal{A}$ для любого открытого множества $A\subseteq X$ (см. [2]).

Измеримая функция f называется *измеримым селектором* многозначной функции F, если $f(t)\in F(t)$ для всех $t\in T$. Множество (классов эквивалентности) измеримых селекторов функции F будем обозначать через $S(F)$. *Интегралом* (Аумана) многозначной функции F на множестве $A\in\mathcal{A}$ называется множество $\int_A F=\{\int_A f: f\in S(F)\}$ (см. [3]).

§ 2. Основные результат

Т е о р е м а I. Если банахово пространство X сепарабельно, то множество $S(F)$ измеримых селекторов измеримой интегрально ограниченной функции $F: T \to 2^X$, принимающей выпуклые слабокомпактные значения, секвенциально компактно в топологии $\sigma(L_1(X), M(X^*))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем последовательность $\{f_n, n \in N\} \subseteq S(F)$. Пусть для каждого $n \in N$ измеримая функция $\hat{f}_n$ представляет класс эквивалентности f_n. По теореме Джеймса [4, с.15], каждый функционал $x^* \in X^*$ достигает своего супремума на почти всех $G(t) = co\{\hat{f}_n(t), n \in N\}$. По теореме 7.4 из [2], существует такой селектор $g \in S(G)$, что $\langle x^*, g(t) \rangle = sup\{\langle x^*, y \rangle : y \in G(t)\}$ почти всюду на T. Очевидно, что тогда $\langle x^*, \int_A g \rangle = sup\{\langle x^*, y \rangle : y \in \int_A G\}$ для любого $A \in \mathcal{A}$. Следовательно, по той же теореме Джеймса, множество $\int_A G$ слабокомпактно для любого $A \in \mathcal{A}$. Используя диагональный процесс, из последовательности $\{f_n, n \in N\}$ выберем такую подпоследовательность (обозначаемую также через $\{f_n, n \in N\}$), что для любого множества A из счетного порождающего σ-алгебру $\mathcal{A}$ семейства $\{A_n, n \in N\}$ последовательность $\{\int_A f_n, n \in N\}$ сходится к некоторому $m(A)$. В силу интегральной ограниченности функции F отображение $m: A_n \to m(A_n)$ можно продолжить на σ-алгебру $\mathcal{A}$ до абсолютно непрерывной относительно μ меры m. Заметим теперь [5, с.543], что пространство X можно считать подпространством пространства Y^*, сопряженного к некоторому сепарабельному пространству Y. Тогда, по теореме Рыбакова [6], существует такая Y-измеримая функция $f: T \to Y^*$, что $\langle m(A), y \rangle = \int_A \langle f(t), y \rangle$ для всех $A \in \mathcal{A}$, $y \in Y$. Пусть $\{y_n, n \in N\}$ – счетное плотное множество в Y и $E = \{t \in T : f(t) \bar{\in} G(t)\}$. Поскольку топология $\sigma(Y^*, Y)$ отделима, то слабокомпактные множества $G(t)$ замкнуты в ней. Следовательно, $f(t)$ можно отделить от $G(t)$ функционалом из $\{y_n, n \in N\}$ (см. [5, с. 453]). Таким образом, получаем, что $E = \bigcup E_n$, где $E_n = \{t \in T : sup\{\langle x, y_n \rangle : x \in G(t)\} < \langle f(t), y_n \rangle\}$, откуда $E \in \mathcal{A}$.

Предположим, что $\mu(E) > 0$. Тогда существует такое $n \in N$, что $\mu(E_n) > 0$ и $sup\{\langle x, y_n \rangle : x \in \int_{E_n} G\} < \langle \int_{E_n} f, y_n \rangle$. Но это противоречит включению $\int_{E_n} f \in \int_{E_n} G$. Следовательно, $\mu(E) = 0$, т.е. $f(t) \in G(t)$ почти всюду на T. Отсюда получаем, что множество значений функции f является μ-существенно сепарабельным. Но в таком случае Y-измеримая функция f- измерима, что доказывается так же, как и аналогичное утверждение для слабоизмеримой функции [4, с. 200]. Таким образом, из произвольной последовательности $\{f_n, n \in N\} \subseteq S(F)$ мы выбрали подпоследовательность, сходящуюся к некоторому $f \in S(F)$ в топологии $\sigma(L_1(X), M(X^*))$, что и требовалось доказать.

Т е о р е м а 2. Пусть многозначная функция $F: T \times X \to 2^X$, принимающая выпуклые слабокомпактные значения из сепарабельного банахова пространства X, непрерывна в метрике Хаусдорфа по $x \in X$ и для любой непрерывной функции $x: T \to X$ многозначная функция $t \to F(t, x(t))$ измерима и интегрально ограничена. Тогда совокупность абсолютно непрерывных функций, удовлетворяющих почти всюду на T системе

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)), \quad x(0) = 0,$$

называется пучком траекторий этой системы, замкнута в пространстве непрерывных на T функций $C(X)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть последовательность траекторий $\{x_n, n \in N\}$ сходится в $C(X)$ к некоторой функции x. Для каждого $n \in N$ положим $d_n(t) = \inf\{|\dot{x}_n(t) - y| : y \in F(t, x(t))\}$. В силу слабой компактности множеств $F(t, x(t))$, этот инфимум достигается Кроме того, функции d_n измеримы [2, теорема 3.3]. Тогда, по теореме 7.4 о неявной функции из [2], для каждого $n \in N$ существует такой измеримый селектор y_n функции $G: t \to F(t, x(t))$, что $|\dot{x}_n(t) - y_n(t)| = d_n(t)$ почти всюду на T. По теореме I, множество $S(G)$ секвенциально компактно в топологии $\sigma(L_1(X), M(X^*))$. Следовательно, мы можем считать, что существует такой селектор $y \in S(G)$, что последовательность $\{\int_A y_n, n \in N\}$ слабо сходится к $\int_A y$ для любого $A \in \mathcal{A}$. В силу нашего построения, последовательность $\{\int_A \dot{x}_n, n \in N\}$ также слабо сходится к $\int_A y$ для любого $A \in \mathcal{A}$. Но это означает, что последовательность $\{x_n(t), n \in N\}$ слабо сходится к $\int_0^t y$, т.е. что $x(t) = \int_0^t y$ для любого $t \in T$. Таким образом, получили, что $\dot{x}(t) = y(t) \in F(t, x(t))$ почти всюду на T, что и требовалось доказать.

В теореме I мы получили компактность множества $S(F)$ в достаточно сильной топологии, чтобы доказать теорему 2. Но на самом деле в наших условиях справедлива более сильная

Т е о р е м а 3. В условиях теоремы I множество $S(F)$ слабокомпактно в пространстве $L_1(X)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем пользоваться критерием слабой компактности Джеймса [4, с. 15]. Возьмем $g \in (L_1(X))^*$. Известно (см., например [7, с. 304]), что функционал g представим X-измеримой функцией $u: T \to X^*$. Определим функции $h: T \times X \to R$ и $s: T \to R$ следующим образом:

$$h(t, x) = \langle u(t), x \rangle, \quad s(t) = \sup\{\langle u(t), x \rangle : x \in F(t)\}.$$

В силу слабой компактности множеств $F(t)$, получаем, что $s(t) \in h(t, F(t))$. Заметим теперь, что функция h измерима по t и непрерывна по x. Следовательно [2, теорема 7.2], существует такой измеримый селектор f функции F, что $s(t) = h(t, f(t))$ почти всюду на T. Но это означает, что $\langle g, f \rangle = \int \langle g(t), f(t) \rangle \geq \int \langle g(t), f'(t) \rangle = \langle g, f' \rangle$, для любого $f' \in S(F)$, т.е. что функционал g достигает своего супремума на множестве $S(F)$. Таким образом, по критерию Джеймса, множество $S(F)$ слабокомпактно.

В случае линейных систем теорема 3 позволяет получить слабую компактность пучка траекторий.

Следствие I. Пусть измеримая интегрально ограниченная функция $F: T \to 2^X$ принимает выпуклые слабокомпактные значения из сепарабельного банахова пространства X. Тогда пучок траекторий системы

$$\dot{x}(t) \in A(t)\,x(t) + F(t), \quad x(0) = 0,$$

слабокомпактен в пространстве $C(X)$. Здесь A обозначает μ-измеримую функцию на T со значениями в пространстве линейных непрерывных операторов из X в X.

Доказательство. Линейное отображение, сопоставляющее элементу множества $S(F)$ соответствующую траекторию системы, непрерывно в сильных топологиях пространств $L_1(X)$ и $C(X)$. Следовательно [5, с. 458], оно непрерывно и в слабых топологиях. Отсюда, по теореме 3, получаем требуемый результат.

Поступила в ред.-изд.отдел
20 августа 1982 г.

Литература

I. Суслов С.И. Управление в банаховых пространствах со свойством Радона-Никодима.- наст. сборник, с. 58-65.

2. Himmelbery C. Measurable relations.- Fund. Math, 1975, v.87, p. 53-72.

3. Aumann R.J. Integrals of set-valued functions.- J. Math. Anal. Appl., 1965, v. 12, p. 1-12.

4. Diestel J. Geometry of Banach spaces - selected topics. - Lecture Notes in Math. Berlin and New York: Springer Verlag,v.485.

5. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. - М.: ИЛ., 1962. - 895с.

6. Рыбаков В.И. О векторных мерах. Изв. вузов. Математика, 1968, т. 79, с. 92-101.

7. Мейер П. А. Вероятность и потенциалы.- М.: Мир, 1973. - 322 с.