Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1982 г., вып. 22.

УДК 519.3:62-50

К ОПТИМИЗАЦИИ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С НАЧАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ КОШИ

В.А.Терлецкий

§ 1. Введение

Системы гиперболических уравнений первого порядка имеют многочисленные приложения [1], как и задачи оптимального управления для этих систем [2]. Трудность исследования таких задач во многом предопределяется недостаточной изученностью поведения решения систем гиперболических уравнений при естественных для задач оптимального управления разрывных правых частях. Это прежде всего отражается на получении необходимых оценок для приращения состояния, вызванного приращением управления. Последнее обстоятельство порождает такие исследования (см., например, [2,3]), где по аналогии с известной методикой получения необходимых условий оптимальности для сосредоточенных систем формулируются условия оптимальности для систем с распределенными параметрами при фактическом предположении об ограниченности реакции системы на варьирование управления.

Естественное желание получить необходимые условия оптимальности и основанные на них методы оптимизации при достаточно строгом математическом обосновании приводит, с одной стороны, к сужению класса рассматриваемых систем, с другой - к более аккуратной и корректной постановке задачи оптимального управления в этих системах. Именно эта идея лежит в основе настоящей работы, где удается рассмотреть такие вопросы, как существование и единственность решения прямой и сопряженной задач при выбранном управлении, а также получить оценки приращения состояния процесса через приращение управления. Далее, в работе формулируется необходимое условие оптимальности типа принципа максимума Л.С.Понтрягина и вычисляется градиент функционала. Эти результаты являются базой для построения численных методов оптимизации типа [4,5]. Статья завершается примером использования полученных результатов для построения способов решения задачи оптимального управления подвижкой дна, вызывающей волну заданного профиля, которая возникает в проблеме прогнозирования волн цунами [3].

§ 2. Постановка задачи

Пусть управляемый процесс $\{u; x\}$, $u = u(s,t)$, $u(s,t)\in E_r$, $x = x(s,t)$, $x(s,t)\in E_n$, $(s,t)\in \Pi$, определенный в бесконечной полосе $\Pi = \{(s,t): -\infty < s < +\infty,\ t\in[t_0,t_1]=T\}$, подчинен полулинейной гиперболической системе

$$x_t + A(s,t)\, x_s = f(x,u,s,t) \qquad /1/$$

с условиями Коши

$$x(s,t_0) = x^0(s). \qquad /2/$$

Здесь $x^0(s)$ - заданная непрерывная n-мерная функция; $f(x,u,s,t)$ - n-мерная функция, непрерывная по своим аргументам, непрерывно дифференцируемая по x и удовлетворяющая вместе со своей первой частной производной по x условию Липшица по (x,u); $A = A(s,t)$ - функциональная матрица с непрерывными и непрерывно дифференцируемыми в Π элементами.

В соответствии с определением гиперболической системы [1], предположим, что все собственные значения $\lambda = \lambda_k(s,t)$, $k = 1,2,\dots,n$, матрицы $A(s,t)$ вещественны и существует базис $\{\ell^{(k)}(s,t)\}_1^n$ пространства E_n из левых нормированных собственных векторов матрицы $A(s,t)$. Это означает, что матрица $\Lambda(s,t) = (\ell^{(1)}(s,t),\ \ell^{(2)}(s,t),\dots$ $\dots,\ \ell^{n}(s,t))'$, где штрих - знак транспонирования, является невырожденной в каждой точке $(s,t)\in\Pi$. В дополнение к непрерывности по (s,t) собственных значений $\lambda = \lambda_k(s,t)$, вытекающих из свойств элементов матрицы A, предположим, что $\lambda_k(s,t)$ обладают непрерывными частными производными по s и по t. Определим характеристики $s = s_k(\xi,\tau;t)$, $(\xi,\tau)\in\Pi$, $t\in T$, $k = 1,2,\dots,n$, системы /1/ путем решения задач Коши

$$\frac{ds}{dt} = \lambda_k(s,t), \quad s_k(\xi,\tau;\tau) = \xi .$$

Ясно, что через любую точку $(s,t)\in\Pi$ проходит одна и только одна характеристика каждого из n семейств характеристик и все они являются непрерывными гладкими кривыми, пересекающими прямую $t = t_0$, на которой заданы начальные условия /2/.

Известно [1], что задачу /1/, /2/ можно записать в инвариантной форме:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dm_k}{dt} &\equiv \frac{\partial m_k}{\partial t} + \lambda_k(s,t)\frac{\partial m_k}{\partial s} = g_k(m,u,s,t), \\ m_k(s,t_0) &= m_k^0(s), \quad k = 1,2,\dots,n. \end{aligned}\right\} \qquad /3/$$

Здесь $(d/dt)_k$ - полная производная вдоль k-й характеристики; $m_k = m_k(s,t)$, $m = (m_1, m_2,\dots,m_n)'$ - инварианты Римана, причем $m(s,t) = \Lambda(s,t)\, x(s,t)$, откуда, в силу невырожденности $\Lambda(s,t)$,

имеем $x(s,t)=\Lambda^{-1}(s,t)\,m(s,t)$; элементы n-мерной функции $g(g_1, g_2, \dots, g_n)$ определяются по формулам

$$g_K = \ell^{(K)'} f(\Lambda^{-1}m, u, s, t) + \left(\frac{d\ell^{(K)}}{dt}\right)_K, \Lambda^{-1}m, \quad K=1,2,\dots,n.$$

Предположим, что существует постоянная L, причем

$$\left\| \left(\frac{d\ell^{(K)}(s,t)}{dt}\right)_K \right\| \le L, \quad K=1,2,\dots,n, \quad (s,t)\in \Pi.$$

С помощью метода последовательных приближений, изложенного в [I], при введенных предположениях можно показать, что для любого кусочно-непрерывного и ограниченного управления $u = u(s,t)$ существует и единственно в Π кусочно-непрерывное решение задачи /3/. При этом каждая $m_K = m_K(s,t)$, $K=1,2,\dots n$, будет абсолютно непрерывной функцией вдоль K-й характеристики. Поэтому можно считать решение $x = x(s,t)$ задачи /I/, /2/ ограниченным в Π и непрерывным всюду в Π, за исключением, быть может, конечного числа линий разрыва первого рода, которые могут скользить только по характеристикам системы /I/.

Очевидно, что определить решение задачи /I/, /2/ для произвольного управления $u = u(s,t)$ можно лишь в конечной подобласти области Π. Это обстоятельство отличает задачу оптимального управления системой /I/ с начальными условиями Коши /2/ от задач оптимального управления системой /I/ с заранее заданными условиями Гурса, рассмотренных, например, в [2]. Для построения корректных граничных условий в рассматриваемой задаче нам потребуется

О п р е д е л е н и е. Управляемую систему /I/ с начальными условиями /2/ назовем стабилизируемой, если существует управление $u = u^0(s,t)$, $(s,t)\in\Pi$, такое, что соответствующее ему решение $x = x^0(s,t)$ задачи /I/, /2/ не меняется по времени t, т.е. $x^0(s,t) = x^0(s), t\in T$.

Отметим, что с физической точки зрения это свойство означает способность объекта сохранять покой при определенных воздействиях (или при их отсутствии) извне, а поэтому является характерным для многих реальных процессов. Именно такие управляемые процессы мы и рассматриваем далее.

Множеством допустимых управлений будем считать совокупность таких кусочно-непрерывных функций $u = u(s,t)$, $(s,t)\in\Pi$, что

$$u = \begin{cases} u(s,t)\in U, & (s,t)\in \Pi_0, \\ u^0(s,t), & (s,t)\in \Pi\setminus\Pi_0, \end{cases} \qquad /4/$$

где U - заданное множество из E_r, а Π_0 - конечная часть полосы Π. Заметим, что требование ограниченности области Π_0 варьирования управления $u = u(s,t)$ является естественным для реальных управляемых процессов.

Пусть теперь требуется найти такое допустимое управление, при котором соответствующее ему решение задачи /I/, /2/ в момент $t=t_1$ минимизирует функционал

$$I(u)=\int_{s_0}^{s_1} F(x(s,t_1),s)\,ds, \qquad /5/$$

причем

$$x(s,t_1)=x^0(s) \qquad /6/$$

вне отрезка $S=[s_0,s_1]$.
Подынтегральную функцию в /5/ будем считать непрерывной по (x,s) и дифференцируемой по x.

Заметим, что значение функционала /5/ для любого допустимого управления /4/ единственно. Это сразу же следует из того, что разрывы решения $x=x(s,t)$ могут распространяться лишь вдоль характеристик системы /I/, которые, в силу ограниченности собственных значений λ матрицы A, не могут скользить вдоль прямых $t=const$.

Покажем, что условию /6/ можно удовлетворить с помощью специального построения области Π_0. С этой целью, решая задачи Коши на отрезке $[\bar{t},t_1]=\bar{T}$,

$$\frac{ds_\ell(t)}{dt}=\min_K \lambda_K(s_\ell(t),t),\quad s_\ell(t_1)=s_0,$$

$$\frac{ds_n(t)}{dt}=\max_K \lambda_K(s_n(t),t),\quad s_n(t_1)=s_1,$$

построим левую $s=s_\ell(t)$ и правую $s=s_n(t)$ границы области $\Pi_0=\{(s,t):\ s_\ell(t)<s<s_n(t),\ t\in\bar{T}\}$. Здесь $\bar{t}=max\{t_0,t^*\}$, где t^* – максимальный корень уравнения $s_\ell(t)=s_n(t)$. Тогда, в силу очевидного неравенства $s_\ell(t)\leq s_K(\xi,t_1;t)\leq s_n(t)$, $\xi\in S$, $t\in\bar{T}$, $K=1,2,\dots,n$, для любого допустимого управления /4/ решение $x=x(s,t)$ задачи /I/, /2/ не зависит от значений u в точках $(s,t)\in\Pi_0$ всюду вне области Π_0 и на ее левой и правой границах, где выполняются естественные граничные условия:

$$x(s_\ell(t),t)=x^0(s_\ell(t)),\ x(s_n(t),t)=x^0(s_n(t)). \qquad /7/$$

В этих предположениях определим допустимый процесс $\{u;\ x\}/(s,t)\in\Pi_0$.

§ 3. Формула приращения функционала

Используя общую методику получения формул приращения для систем, записанных в операторной форме [6], на двух допустимых процессах $\{u;\ x\},\{\tilde{u}=u+\Delta u,\ \tilde{x}=x+\Delta x\}/(s,t)\in\Pi_0$ будем иметь

$$\Delta I(u)=-\iint_{\Pi_0}\Delta_{\tilde{u}} H(\psi,x,u,s,t)\,ds\,dt+\eta_{\tilde{u}}, \qquad /8/$$

$$\eta_{\tilde u} = \int_{S} o_F(\|\Delta x(s,t_1)\|)ds - \iint_{\Pi_0}\Big[\Delta_{\tilde u}\frac{\partial H(\psi,x,u,s,t)'}{\partial x}\Delta x +$$

$$+ o_H(\|\Delta x\|)\Big]ds\,dt,$$

где $H(\psi,x,u,s,t)=\psi(s,t)'f(x,u,s,t)$, а сопряженные функции $\psi=\psi(s,t)$ удовлетворяют сопряженной задаче

$$\psi_t + [A(s,t)'\psi]_s = -H_x(\psi,x,u,s,t),\psi(s,t_1) = -F_x(x(s,t_1),s), \qquad /9/$$

которая является линейным вариантом задачи /I/, /2/ с теми же характеристиками. При получении вида /9/ сопряженной задачи [6] существенную роль сыграли естественные граничные условия (7). Без их учета формула приращения /8/ была бы справедлива лишь с дополнительными граничными условиями в задаче /9/: $\psi(s_\lambda(t),t)\equiv 0$, $\psi(s_\Pi(t),t)\equiv 0$, которые, вообще говоря, некорректны [I].

Получим теперь, используя инвариантную задачу /3/, основные конструкции, которые потребуются в дальнейшем для формулирования принципа максимума и вычисления градиента функционала. В начале построим оценки для приращения $\Delta m(s,t)$, $\Delta m(s,t)=\Lambda(s,t)\Delta x(s,t)$, соответствующие приращению $\Delta u=\Delta u(s,t)$. Так как

$$\left(\frac{d\Delta m_K}{dt}\right)_K = g_K(m+\Delta m, u+\Delta u, s,t) - g_K(m,u,s,t),$$

$$\Delta m_K(s,t_0) = 0, \quad K=1,2,\dots,n,$$

то

$$|\Delta m_K(s,t)| \le C\int_{t_0}^{t}\|\Delta m(s_K(s,t;\tau),\tau)\|d\tau +$$

$$+\int_{t_0}^{t}|\Delta_{\tilde u}\, g_K(m,u,s_K(s,t;\tau),\tau)|\,d\tau,$$

где постоянная C является максимальной константой Липшица функций $g_K(m,u,s,t)$, $K=1,2,\dots,n$. В действующих предположениях на функцию $f(x,u,s,t)$ и матрицу $\Lambda(s,t)$ такая постоянная существует. Из этого неравенства, используя свойства евклидовой нормы $\|\Delta m\| \le$ $\le |\Delta m_1| + |\Delta m_2| + \dots + |\Delta m_n|$, получаем

$$\|\Delta m(s,t)\| \le C\cdot n\int_{t_0}^{t}\|\Delta m(s_{\bar K}(s,t;\tau),\tau)\|\,d\tau +$$

$$+\sum_{K=1}^{n}\int_{t_0}^{t_1}|\Delta_{\tilde u}\, g_K(m,u,s_K(s,t;\tau),\tau)|\,d\tau,$$

где $\bar K$ - номер характеристики, интеграл вдоль которой от $\|\Delta m\ s_K(s,t;\tau),\tau\|$ является максимальным. Применяя к последнему неравенству лемму Гронуолла, получаем оценку

$$\|\Delta m(s,t)\| \le C_1 \int_{t_0}^{t_1} \sum_{K=1}^{n} |\Delta_{\tilde u}\, g_K(m,u,s_K(s,t;\tau),\tau)|\, d\tau, \qquad /10/$$

в которой $C_1 = e^{C\cdot n\cdot(t-t_0)}$. Оценка /10/ будет использована для получения принципа максимума. Найдем теперь оценку, необходимую для вывода формулы градиента функционала /5/. Заметим, что

$$\left(\frac{d\,\Delta m_K^2}{dt}\right)_K = 2\Delta m_K\left(g_K(m+\Delta m, u+\Delta u, s, t) - g_K(m,u,s,t)\right),$$

$$K = 1,2,\ldots,n.$$

Тогда

$$\Delta m_K(s,t)^2 \le 2\cdot\int_{t_0}^{t}\left[C\cdot\|\Delta m(s_K(s,t;\tau),\tau)\|^2 + \right.$$

$$\left. + \|\Delta m(s_K(s,t;\tau),\tau)\|\cdot|\Delta_{\tilde u}\, g_K(m,u,s_K(s,t;\tau),\tau)|\right] d\tau.$$

Обозначим $a = \min s_1(t)$, $b = \max s_n(t)$, $t\in\overline{T}$, и проинтегрируем сумму последних неравенств на отрезке $[a,b]$ по s:

$$\int_a^b \|\Delta m(s,t)\|^2 ds \le 2\cdot\sum_{K=1}^{n}\int_{t_0}^{t_1}\int_a^b\left[C\cdot\|\Delta m(s_K(s,t;\tau),\tau)\|^2 + \right.$$

$$\left. + \|\Delta m(s_K(s,t;\tau),\tau)\|\cdot|\Delta_{\tilde u}\, g_K(m,u,s_K(s,t;\tau),\tau)|\right] ds\, d\tau \le$$

$$\le 3\cdot C\cdot\sum_{K=1}^{n}\int_{t_0}^{t}\int_a^b \|\Delta m(s_K(s,t;\tau),\tau)\|^2\, ds\, d\tau +$$

$$+\sum_{K=1}^{n}\int_{t_0}^{t}\int_a^b |\Delta_{\tilde u}\, g_K(m,u,s_K(s,t;\tau),\tau)|^2\, ds\, d\tau.$$

В повторных интегралах сделаем замену переменных, положив $\xi = s_K(s,t;\tau)$. Тогда $s = s_K(\xi,\tau;t)$, $ds = s_{K_\xi}(\xi,\tau;t)\,d\xi$. Нетрудно показать, что

$$s_{K_\xi}(\xi,\tau;t) = e^{\int_\tau^t \lambda_{K_s}(s_K(\xi,\tau;\alpha),\alpha)\,d\alpha}.$$

Отсюда и из ограниченности частной производной $\lambda_{K_s}(s,t)$ следует, что существует постоянная $M>0$ такая, что $0 < s_{K_\xi}(\xi,\tau;t) \le M$, $(\xi,\tau)\in\Pi$, $t\in T$, $K=1,2,\ldots,n$. Учитывая это, получаем

$$\int_a^b \|\Delta m(s,t)\|^2 ds \le 3\cdot C\cdot M\cdot n\cdot\int_{t_0}^{t}\int_a^b \|\Delta m(s,\tau)\|^2 ds\, d\tau +$$

$$+ M\cdot\sum_{K=1}^{n}\iint_{\Pi_0} |\Delta_{\tilde u}\, g_K(m,u,s,t)|^2 ds\, dt =$$

$$= 3\cdot C\cdot M\cdot n\cdot \int_{t_0}^{t} \|\Delta m(\cdot,\tau)\|^2_{L_2^n([a,b])}\, d\tau +$$

$$+ M\cdot \|\Delta_{\tilde u}\, g(m,u,\cdot,\cdot)\|^2_{L_2^n(\Pi_0)} \,.$$

Применяя здесь лемму Гронуолла, получаем оценку

$$\|\Delta m(\cdot,t)\|^2_{L_2^n([a,b])} \le C_2\cdot \|\Delta_{\tilde u}\, g(m,u,\cdot,\cdot)\|_{L_2^n(\Pi_0)}\,, \qquad /11/$$

в которой $C_2 = e^{3\cdot C\cdot M\cdot n(t-t_0)}$, $t\in T$. Оценка /11/ потребуется для вычисления градиента функционала /5/.

§ 4. Принцип максимума

Пусть множество U в задаче /1/, /2/, /4/, /5/ замкнуто и ограничено. Построим специальное приращение управления по правилу

$$\Delta_c u = \begin{cases} v - u(s,t), & (s,t)\in \Pi(\tau,\varepsilon),\ v\in U,\\ 0, & (s,t)\in \Pi_0 \setminus \Pi(\tau,\varepsilon),\end{cases}$$

где $\Pi(\tau,\varepsilon) = \{(s,t):\ s_\ell(t) < s < s_n(t),\ \tau-\varepsilon < t \le \tau,\ \bar t \le \tau-\varepsilon,\ \tau \le t_1\}$. Тогда из оценки /10/ и ограниченности $\|\Lambda^{-1}(s,t)\|$ следует, что приращение состояния $\Delta_c x$, соответствующее $\Delta_c u$, будет удовлетворять условию

$$\Delta_c x = \begin{cases} O(\varepsilon), & \tau-\varepsilon < t \le t_1,\\ 0, & \bar t \le t \le \tau-\varepsilon.\end{cases}$$

Отсюда и из формулы приращения /8/ получаем:

$$\Delta_c I(u) = -\varepsilon \int_{s_\ell(\tau)}^{s_n(\tau)} \left[H(\psi,x,v,s,t) - H(\psi,x,u,s,\tau)\right] ds + o(\varepsilon).$$

Последнее равенство позволяет сформулировать принцип максимума Л.С.Понтрягина: для оптимальности допустимого управления $u^* = u^*(s,t)$ необходимо, чтобы

$$H(\psi^*, x^*, u^*, s, t) \ge H(\psi^*, x^*, u, s, t)$$

для произвольных $u\in U$ и почти всех $(s,t)\in \Pi_0$.

Введем в рассмотрение функцию $w_u(v,s,t) = H(\psi,x,v,s,t) - H(\psi,x,u,s,t)$ и определим управление $\bar u(s,t)$ из задачи

$$w_u(\bar u(s,t),s,t) = \max_{v\in U} w_u(v,s,t),\ (s,t)\in \Pi_0.$$

Используя результаты работы [4], можно просто показать, что алгоритм типа [4] сходится к необходимым условиям оптимальности.

§ 5. Вычисление градиента функционала

Для вычисления градиента функционала /5/ нам потребуется дополнительно предположить, что множество U является выпуклым (но необязательно замкнутым и ограниченным) и выполнены следующие условия Липшица:

$$\| f_u(x, u+\Delta u, s, t) - f_u(x, u, s, t)\| \le C\|\Delta u\|,$$
$$\| F_x(x+\Delta x, s) - F_x(x, s)\| \le C\|\Delta x\|, \qquad /12/$$

где C - постоянная, не зависящая от x, u, s, t. Тогда, действуя по схеме [5], нетрудно получить второй вид формулы приращения /8/:

$$\Delta I(u) = -\iint_{\Pi_0} H_u(\psi, x, u, s, t)' \Delta u(s,t)\, ds\, dt + \gamma_{\tilde u}, \qquad /13/$$

в которой остаток $\gamma_{\tilde u}$ удовлетворяет оценке

$$\gamma_{\tilde u} = O\left(\|\Delta x(\cdot, t_1)\|^2_{L_2^n([s_0,s_1])} + \|\Delta x(\cdot,\cdot)\|^2_{L_2^n(\Pi_0)} + \|\Delta u(\cdot,\cdot)\|^2_{L_2^r(\Pi_0)}\right).$$

Учитывая ограниченность $\|\Lambda^{-1}(s,t)\|$ и неравенства /11/ и /12/, получаем $\gamma_{\tilde u} = O\left(\|\Delta u(\cdot,\cdot)\|^2_{L_2^r(\Pi_0)}\right)$. Отсюда и из /13/ сразу же следует, что

$$\nabla I(u) = -H_u(\psi, x, u, s, t). \qquad /14/$$

Основываясь на формуле /14/, с помощью прямой /1/, /2/ и сопряженной /9/ задач можно построить конкретные варианты градиентных методов по схеме, изложенной в [5].

§ 6. Приложение к задаче прогнозирования волн цунами

Рассмотрим задачу оптимального управления подвижкой дна, которая вызывает в покоящейся в начальный момент времени $t = t_0$ воде волну заданного профиля в конечный момент $t = t_1$. Линейный вариант этой задачи имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} &\eta_t + h_0(s)\, v_s = -h_0'(s)\, v - \varphi(u,s,t),\\ &v_t + g\,\eta_s = 0,\\ &\gamma_t = \varphi(u,s,t),\ (s,t)\in\Pi; \end{aligned}\right\} \qquad /15/$$

$$\eta(s,t_0) = v(s,t_0) = \gamma(s,t_0) = 0; \qquad /16/$$

$$u \in \mathcal{U}; \qquad /17/$$

$$I(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} [z(s) - \eta(s,t_1)]^2\, ds \downarrow \mathcal{U}. \qquad /18/$$

Здесь $\eta=\eta(s,t)$ – профиль волны; $v=v(s,t)$ – массовая скорость частиц воды; $\gamma=\gamma(s,t)$ – подвижка дна; $h_0(s)$ – профиль дна в момент $t=t_0$; g – земное ускорение; $z(s)$ – заданный профиль волны в момент $t=t_1$; $u=u(s,t)$ – кусочно-непрерывное управляющее воздействие; $\mathcal{U}$ – множество допустимых управлений; $\varphi(u,s,t)$ – заданная функция. Множество $\mathcal{U}$ и функция φ выбираются так, чтобы по возможности более точно учесть параметры подвижки дна, которые могут задаваться исходя из физического смысла. Будем считать, что $h_0(s)$ непрерывна и имеет непрерывную ограниченную производную $h_0'(s)$, $-\infty<s<+\infty$; $\varphi(u,s,t)$ липшиц-непрерывна вместе со своей частной производной по u в каждом $(s,t)\in\Pi$ и кусочно-непрерывна и ограничена по $t\in T$; $z(s)$ – ограниченная финитная функция: $z(s)\equiv 0$, $s\leqslant s_0$, $s\geqslant s_1$; функция $\varphi(u,s,t)$ такова, что $\varphi(u^0(s,t),s,t)\equiv 0$, $(s,t)\in\Pi$ для некоторой $u=u^0(s,t)$. Очевидно, что в этом случае управляемая система /15/ с начальными условиями Коши /16/ будет стабилизируемой. С физической точки зрения управление $u^0(s,t)$ означает здесь, что подвижка дна отсутствует и вода остается покоящейся.

Для того чтобы записать задачу /15/-/18/ в терминах задачи /1/, /2/, /4/, /5/, нужно положить

$$x=\begin{pmatrix}\eta\\ v\\ \gamma\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}0 & h_0(s) & 0\\ g & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad f=\begin{pmatrix}-h_0'(s)v-\varphi\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\quad x^0=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$F=[z(s)-\eta(s,t_1)]^2.$$

Нетрудно подсчитать собственные числа $\lambda=\lambda_K(s)$, $K=1,2,3$, матрицы $A=A(s)$: $\lambda_1=\sqrt{g h_0(s)}$, $\lambda_2=-\sqrt{g h_0(s)}$, $\lambda_3=0$. Отсюда следует, что первое семейство характеристик имеет во всей полосе Π положительный наклон, второе – отрицательный, а третье семейство состоит из прямых $s=const$. Сопряженной задачей вида /5/, /6/ для задачи /15/-/18/ будет следующая:

$$\psi_{1t}+h_0(s)\psi_{2s}=-h_0'(s)\cdot\psi_2;$$

$$\psi_{2t}+g\psi_{1s}=-h_0'(s)\psi_1;$$

$$\psi_3=0,\quad (s,t)\in\Pi;$$

$$\psi_1(s,t_1)=2[z(s)-\eta(s,t_1)],\quad \psi_2(s,t_1)=\psi_3(s,t_1)=0,\ -\infty<s<+\infty.$$

Откуда сразу же вытекает, что $\psi_3(s,t)\equiv 0$, $(s,t)\in\Pi$; а потому

$$\left.\begin{aligned} w_{\tilde u}(u,s,t)&=-\psi_1(s,t)[\varphi(\tilde u,s,t)-\varphi(u,s,t)],\\ \nabla I(u)&=\psi_1(s,t)\,\varphi_u(u,s,t).\end{aligned}\right\}\qquad /19/$$

Формулы /I9/ позволяют построить конкретные вычислительные процедуры для решения задачи /I5/-/I8/ вышеуказанными способами.

Автор выражает глубокую благодарность О.В.Васильеву за полезные консультации в процессе написания работы.

Поступила в ред.-изд.отдел
I6 февраля I982 г.

Литература

I. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике.- М.: Наука, I978. - 687 с.

2. Сиразетдинов Т.К. Оптимизация систем с распределенными параметрами.- М.: Наука, I977.- 479 с.

3. Васильев О.В., Терлецкий В.А. К решению задачи оптимального управления, возникающей в проблеме прогнозирования волн на мелководье, вызванных подвижкой дна.- В кн.: Тезисы докладов 5-й Всесоюзной конференции по проблемам теоретической кибернетики. Новосибирск, I980, с. 45-47.

4. Васильев О.В., Тятюшкин А.И. Об одном методе решения задач оптимального управления, основанном на принципе максимума. - Журн.вычислит. математики и мат.физики, I98I, 2I, № 6, с. I376-I384.

5. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. - М.: Наука, I98I.- 399 с.

6. Васильев О.В. Об условиях оптимальности в управляемых динамических процессах операторного вида. - В кн.: Проблемы устойчивости движения аналитической механики и управления движения. - Новосибирск: Наука, I979, с.235-244.