Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1983 г., вып. 23.

УДК 519.854

ЭФФЕКТИВНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ С ОБЛАСТЯМИ ОБСЛУЖИВАНИЯ, СВЯЗНЫМИ ОТНОСИТЕЛЬНО АЦИКЛИЧЕСКОЙ СЕТИ

Э.Х.Гимади

1. Рассмотрим следующую математическую постановку, используемую для описания ряда задач размещения, стандартизации и унификации [1]:

$$\sum_{i\in\mathcal{U}} g_i^0 x_i + \sum_{i\in\mathcal{U}} \sum_{j\in X} \varphi_j g_{ij} x_{ij} \to \min_{(x_i)(x_{ij})}; \quad (1)$$

$$\sum_{i\in\mathcal{U}} x_{ij} = 1 \quad (j\in X); \quad (2)$$

$$x_{ij} \le x_i \quad (i\in\mathcal{U},\ j\in X); \quad (3)$$

$$x_{ij},\ x_i \in \{0,1\} \quad (i\in\mathcal{U},\ j\in X), \quad (4)$$

где $\mathcal{U}=\{1,\dots,m\}$ - множество возможных пунктов производства однородного продукта;

$X=\{1,\dots,n\}$ - множество пунктов спроса;

$\varphi_j \geq 0$ - объем спроса в пункте $j\in X$;

$g_i^0 \geq 0$ - затраты на размещение предприятия в пункте производства $i\in\mathcal{U}$;

$g_{ij} \geq 0$ - стоимость доставки единицы продукта из пункта производства $i\in\mathcal{U}$ в пункт спроса $j\in X$.

Переменные выбора x_i равны единице при размещении производства в пункте i и нулю - в противном случае; переменные назначения x_{ij} равны единице, если j -й пункт спроса обслуживается i -м пунктом размещения, и нулю - в противном случае.

В общем случае задача (1)-(4) относится к классу NP-полных проблем, и эффективные точные методы построены лишь в некоторых частных случаях этой задачи [1 - 4].

В данной статье мы будем рассматривать класс задач, в которых матрице транспортных затрат (g_{ij}) $(i\in\mathcal{U},\ j\in X)$ может быть поставлена в соответствие некоторая ациклическая сеть $G=(X,E)$, где $X=\{1,\dots,n\}$ - множество вершин, $E=\{e_k \mid 1\le k<n\}$ - множество ребер. Вершины сети соответствуют пунктам спроса. Для случая задачи размещения на ациклической сети $G=(X,E)$ при $\mathcal{U}=X$ В.А.Трубин [2] построил алгоритм с трудоемкостью $O(n^3)$ в предполо-

жении, что g_{ij} попарно различны для любых $i \neq j$ и равны сумме длин ребер сети, входящих в цепь $C[i, \dots, j]$, соединяющую вершины i и j $(i, j \in X)$. Ниже мы построим алгоритм, имеющий трудоемкость $O(mn)$ и применимый для существенно более широкого класса задач вида (1)-(4). В частности, задачу в [2] алгоритм решает за $O(n^2)$ операций.

2. Запишем задачу (1)-(4) в эквивалентном виде. Введя n-вектор назначений $\sigma = (i_j)(j \in X)$, где $i_j \in \mathcal{U}$, будем иметь

$$\sum_{i \in I_\sigma} g_i^0 + \sum_{j \in X} \varphi_j g_{i_j j} \to \min_\sigma, \tag{5}$$

где $I_\sigma = \bigcup_{j \in X} \{i_j\} \subset \mathcal{U}$.

При этом оптимальное решение задачи (1)-(4) выразится через оптимальный вектор σ задачи (5) следующим образом:

$x_i = 1$ при $i \in I_\sigma$, в противном случае $x_i = 0$;

$x_{ij} = 1$, если $i = i_j$, и $x_{ij} = 0$ при $i \neq i_j$ $(i \in \mathcal{U},\ j \in X)$.

Через S^* будем обозначать минимальное значение целевой функции в рассматриваемой задаче.

Определение 1. Для заданного вектора назначений σ назовем множество

$$Y_i(\sigma) = \{ j \in X \mid i_j = i \}$$

областью обслуживания предприятия $i \in I_\sigma$.

Совокупность $\{Y_i(\sigma)\}_{i \in I_\sigma}$ областей обслуживания есть разбиение множества точек спроса X.

Определение 2. Область обслуживания назовем связной относительно сети G, если порожденный множеством вершин этой области подграф сети G связен.

Теорема 1. Если в задаче (5) существует оптимальное решение с совокупностью областей обслуживания, связных относительно ациклической сети $G = (X, E)$, то для ее решения можно построить точный алгоритм, имеющий трудоемкость $O(mn)$.

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 1, введем некоторые определения и докажем ряд вспомогательных утверждений.

3. Сегментная нумерация ациклической сети. Пусть дана ациклическая сеть $G = (X, E)$. Примем за вход (корневую вершину) сети G произвольную вершину $\alpha \in X$. Ориентируем ребра $(k, j) \in E$ относительно входа α так, что $k \in C[\alpha, \dots, j]$. Ребро (k, j) назовем входящим в вершину j; через k_j обозначим начальную вершину ребра, входящего в вершину j. Обозначим также

$X_j = \{ i \in X \mid j \in C[\alpha, \dots, i] \}$ - множество потомков;

$X_j^0 = \{ \ell \in X_j \mid k_\ell = j \}$ - множество сыновей вершины $j \in X$; $T(j) = |X_j^0|$, $j \in X$.

Определение 3. Сеть сегментно занумерована относительно входа $\alpha \in X$, если для любого $j \in X$ множество его потомков образует целочисленный сегмент и $K_j < j$ для любого ребра $(K_j, j) \in E$, ориентированного относительно входа α.

Поскольку $X = \{1, \ldots, n\}$, то в сегментно-занумерованной сети, очевидно, вход сети имеет наименьший номер, т.е. $\alpha = 1$.

Теорема 2. Произвольная ациклическая сеть со входом $\alpha \in X$ может быть сегментно занумерована за $O(n)$ действий.

Доказательство. За $O(n)$ действий разобьем множество X вершин сети G на подмножества X_j^0 сыновей вершин j $(j \in X)$. Далее, присвоив входу сети метку $m = 1$ и положив множество непомеченных вершин $\widetilde{X}_j^0 = X_j^0 (j \in X)$, организуем так называемый поиск в глубину, начиная с входной вершины $j = \alpha$.

<u>Поиск в глубину из вершины j $(j \in X)$</u>. Если $\widetilde{X}_j^0 \neq \emptyset$, то увеличиваем метку m на единицу, берем непомеченную вершину $\ell \in \widetilde{X}_j^0$, присваиваем ей метку m и, исключив эту вершину из множества $\widetilde{X}_j^0$, полагаем $j = \ell$, после чего продолжаем поиск в глубину из новой вершины j.

Если $\widetilde{X}_j^0 = \emptyset$ и $j \neq \alpha$, то, возвратившись из вершины j по ориентированному ребру $(K_j, j) \in E$ в вершину $K = K_j$, полагаем $j = K$ и продолжаем поиск в глубину.

При $\widetilde{X}_j^0 = \emptyset$ и $j = \alpha$ алгоритм перенумерации закончил свою работу.

Очевидно, в ходе алгоритма к каждому ребру сети обращаемся только два раза: первый раз – при движении в направлении ориентированного ребра к сыну, получающему при этом свою метку; второй раз – при возврате в направлении, обратном ориентации ребра от уже помеченного (и, следовательно, вычеркнутого из множества $\widetilde{X}_j^0$) сына. Отсюда следует, что поиск в глубину осуществляется $\sum_{j=1}^{n} T(j)$ раз и трудоемкость описанного алгоритма перенумерации составляет $O(n)$ действий.

Полученный в результате алгоритма набор меток при вершинах сети образует сегментную нумерацию. Действительно, для любого множества X_j $(j \in X)$ минимальную метку m получает вершина j, а затем в ходе последовательного поиска в глубину получают увеличивающиеся на 1 метки остальные вершины – потомки $i \in X_j \setminus \{j\}$, так что в момент возврата из вершины j (при $\widetilde{X}_j^0 = \emptyset$, $j \neq \alpha$) метки множества X_j образуют целочисленный сегмент $[m, \nu_m]$, где $\nu_m = m + |X_j| - 1$ $(j \in X)$.

Следствие 1. Пусть ациклическая сеть G сегментно занумерована $X_j^0 = (\ell_t^j)$ $(t = 1, \ldots, T(j))$, где $\ell_1^j < \ell_2^j < \ldots < \ell_{T(j)}^j$. Тогда

$$X_j \setminus \{j\} = \bigcup_{t=1}^{T(j)} [\ell_t^j, \nu_{\ell_t^j}],$$

причем $\ell_1^j = j + 1$, $\ell_{t+1}^j = \nu_{\ell_t^j} + 1$ $(1 < t < T(j))$, $\nu_j = \nu_{\ell_{T(j)}^j}$.

Без ограничения общности будем считать, что рассматриваемая далее ациклическая сеть G - сегментно-занумерованная и все ребра сети ориентированы относительно входа $\alpha = 1$.

4. О сводимости задачи (5) к оценочной задаче. Обозначим: $\mathcal{F}(j)$ - задача вида (5) на подсети $G_j \subset G$, порожденной множеством вершин $X_j \subset X$ $(j \in X)$ ациклической сети G;

$\pi(j) = (\pi_t)$ $(t \in X_j)$ - вектор назначений в задаче $\mathcal{F}(j)$, при этом, если ясно, о какой задаче идет речь, то индекс j в обозначении $\pi(j)$ будем опускать: $\pi = (\pi_t)(t \in X_j)$;

$$I_\pi = \bigcup_{t \in X_j} \{\pi_t\};$$

$$Y_i(\pi) = \{t \mid \pi_t = i,\ t \in X_j\};$$

$q_\pi^\xi(t) = \varphi_t g_{it} + g_i^0 h_\pi^\xi(t)$ $(\xi \in \{0,1\})$, где $i = \pi_t$;

$h_\pi^0(t) = \delta_{\ell t}$, где $\ell = \min Y_{\pi_t}(\pi)$, $\delta_{\ell t}$ - символ Кронекера;

$$h_\pi^1(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t = j; \\ 1 - \delta_{\pi_t \pi_{\kappa_t}} & \text{при } t > j; \end{cases}$$

$$\Pi_j = \{(\pi_t)\ (t \in X_j)\};$$

$$\Pi_j^i = \{\pi \in \Pi_j \mid \pi_j = i\};$$

$$\Pi_j^{\bar{i}} = \{\pi \in \Pi_j \mid \pi_j \neq i\};$$

$$Q_\pi^\xi(t) = \sum_{t \in X_j} q_\pi^\xi(t), \quad \xi \in \{0,1\};$$

$$f(j) = \min_{\pi \in \Pi_j} Q_\pi^1(j) \quad (j \in X);$$

$$S_i(j) = \min_{\pi \in \Pi_j^{\bar{i}}} Q_\pi^1(j) \quad (i \in \mathcal{U},\ j \in X).$$

Лемма 1. Для всякого $j \in X$ справедливо

$$\sum_{t \in X_j} g_{\pi_t}^0 h_\pi^0(t) = \sum_{i \in I_\pi} g_i^0.$$

Доказательство. Обозначив $\ell_i = \min Y_i(\pi)$ $(i \in I_\pi)$, имеем

$$\sum_{t \in X_j} g_{\pi_t}^0 h_\pi^0(t) = \sum_{i \in I_\pi} \sum_{t \in Y_i(\pi)} g_i^0 h_\pi^0(t) = \sum_{i \in I_\pi} g_i^0 \sum_{t \in Y_i(\pi)} \delta_{\ell_i t}.$$

Поскольку $\delta_{\ell_i t} = 0$ для всех $t \neq \ell_i$, то

$$\sum_{t \in Y_i(\pi)} \delta_{\ell_i t} = \delta_{\ell_i \ell_i} = 1,$$

откуда получаем требуемое.

Лемма 2. Задача

$$Q^0_\pi(1) = \sum_{j\in X} q^0_\pi(j) \to \min_{\pi\in \Pi_1}$$

эквивалентна задаче (5).

Доказательство. Для доказательства эквивалентности задач достаточно показать, что $S^* = Q^0_\sigma(1)$, где σ - вектор, минимизирующий величину $Q^0_\pi(1)$. С учетом леммы 1 имеем

$$\min_{\pi\in\Pi_1} Q^0_\pi(1) = Q^0_\sigma(1) = \sum_{t\in X} q^0_\sigma(t) = \sum_{t\in X}\left[\varphi_t g_{\sigma_t t} + g^0_{\sigma_t}\cdot h^0_\sigma(t)\right] =$$

$$= \sum_{t\in X}\varphi_t g_{\sigma_t t} + \sum_{t\in X} g^0_{\sigma_t} h^0_\sigma(t) = \sum_{i\in I_\sigma} g^0_i + \sum_{t\in X}\varphi_t g_{\sigma_t t} \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i\in I_\sigma} g^0_i + \sum_{t\in X}\varphi_t \min_{i\in I_\sigma} g_{it} \geqslant \min_{I\subset U}\Big(\sum_{i\in I} g^0_i + \sum_{t\in X}\varphi_t \min_{i\in I} g_{it}\Big) = S^*.$$

С другой стороны,

$$S^* = \min_{I\subset U}\Big(\sum_{i\in I} g^0_i + \sum_{j\in X}\varphi_j \min_{i\in I} g_{ij}\Big) = \sum_{i\in I^*} g^0_i + \sum_{j\in X}\varphi_j \min_{i\in I^*} g_{ij}.$$

Рассмотрим вектор $\pi = (\pi_j)$ $(j\in X)$, где $\pi_j = \arg\min_{i\in I^*} g_{ij}$. Очевидно, $I^* = I_\pi$. С учетом леммы 1 получим

$$S^* = \sum_{i\in I_\pi} g^0_i + \sum_{j\in X}\varphi_j g_{\pi_j j} = \sum_{j\in X} g^0_{\pi_j} h^0_\pi(j) + \sum_{j\in X}\varphi_j g_{\pi_j j} =$$

$$= \sum_{j\in X} q^0_\pi(j) = Q^0_\pi(1) \geqslant \min_{\pi'\in\Pi_1} Q^0_{\pi'}(1).$$

Лемма доказана.

Лемма 3. Справедливо $h^0_\pi(t) \leqslant h^1_\pi(t)$ для всяких $t\in X_j$ и $\pi\in\Pi_j (j\in X)$.

Доказательство. При $t=j$ имеем очевидное равенство. При $t\in X_j\setminus\{j\}$ имеет место $t = \ell_{\pi_t} \Leftrightarrow \pi_t \neq \pi_{K_t}$, где $\ell_i = \min Y_i(\pi)$. Отсюда получаем требуемое:

$$h^0_\pi(t) = \delta_{\ell_{\pi_t} t} \leqslant 1 - \delta_{\pi_t \pi_{K_t}} = h^1_\pi(t).$$

Следствие 2. Для всякого $\pi\in\Pi_j$ справедливо

$$Q^0_\pi(j) \leqslant Q^1_\pi(j) \quad (j\in X).$$

Следствие 3. Задача

$$Q^1_\pi(1) = \sum_{j\in X} q^1_\pi(j) \to \min_{\pi\in\Pi_1} \qquad (6)$$

является оценочной для задачи (5).

Лемма 4. Если в задаче (5) существует оптимальное решение с совокупностью областей обслуживания, связных относительно ациклической сети G, то

$$S^* = \min_{i \in \mathcal{U}} S_i(1).$$

Доказательство. Поскольку $\bigcup_{i \in \mathcal{U}} \Pi_1^i = \Pi_1$, то

$$\min_{i \in \mathcal{U}} S_i(1) = \min_{i \in \mathcal{U}} \min_{\pi \in \Pi_1^i} Q_\pi^1(1) = \min_{\pi \in \Pi_1} Q_\pi^1(1) = f(1),$$

и для доказательства утверждения достаточно показать, что $S^* = f(1)$.

С учетом леммы 2 и следствия 2 имеем

$$S^* = \min_{\pi \in \Pi_1} Q_\pi^0(1) \leq Q_{\pi'}^0(1) \leq Q_{\pi'}^1(1) = \min_{\pi \in \Pi_1} Q_\pi^1(1) = f(1),$$

где π' – оптимальное решение задачи (6) при $j = 1$.

Справедливо и обратное неравенство, поскольку из существования оптимального связного относительно ациклической сети решения (обозначим его σ) имеем

$$S^* = \min_{\pi \in \Pi_1} Q_\pi^0(1) = Q_\sigma^0(1),$$

но в случае связного решения величины $h_\sigma^0(t)$ и $h_\sigma^1(t)$ совпадают для всякого $t \in X$, откуда

$$S^* = Q_\sigma^0(1) = Q_\sigma^1(1) \geq \min_{\pi \in \Pi_1} Q_\pi^1(1) = f(1).$$

Лемма доказана.

Теорема 3. В случае существования оптимального решения с совокупностью областей обслуживания, связных относительно ациклической сети G, задача (5) сводится к задаче (6).

Доказательство. Заметим, что исходные данные обеих задач совпадают. Покажем, что оптимальное решение σ задачи (6) является оптимальным и в задаче (5).

Действительно, поскольку $\Pi_1 = \bigcup_{i \in \mathcal{U}} \Pi_1^i$, то

$$Q_\sigma^1(1) = \min_{\pi \in \Pi_1} Q_\pi^1(1) = \min_{i \in \mathcal{U}} \min_{\pi \in \Pi_1^i} Q_\pi^1(1) = \min_{i \in \mathcal{U}} S_i(1),$$

а с учетом лемм 4 и 2 и следствия 2 получим:

$$Q_\sigma^1(1) = \min_{i \in \mathcal{U}} S_i(1) = S^* = \min_{\pi \in \Pi_1} Q_\pi^0(1) \leq Q_\sigma^0(1) \leq Q_\sigma^1(1),$$

откуда следует, что вектор σ является оптимальным решением также и для задачи (5).

Теорема доказана.

5. Основные рекуррентные соотношения для решения оценочной задачи (6).

Т е о р е м а 4. Для всяких $j \in X$, $i \in \mathcal{U}$ справедливы следующие рекуррентные соотношения:

$$f(j) = \min_{i \in \mathcal{U}} S_i(j) \quad (j \in X), \tag{7}$$

$$S_i(j) = g_i^0 + \varphi_j g_{ij} + \sum_{\ell \in X_j^0} \min\{f(\ell), S_i(\ell) - g_i^0\} \quad (i \in \mathcal{U},\, j \in X). \tag{8}$$

Л е м м а 5. Для всякого $\ell \in X_j^0 \ (j \in X)$ справедливы равенства:

$$\min_{\pi \in \Pi_j^i} Q_\pi^1(\ell) = \min\{f(\ell), S_i(\ell) - g_i^0\} \quad (i \in \mathcal{U}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что в силу $\pi_j = i$ всякому вектору $\pi \in \Pi_j^i$ для фиксированного сына $\ell \in X^0$ можно взаимно-однозначно поставить в соответствие вектор $\pi' \in \Pi_\ell$ так, что $\pi_t = \pi_t' \ (t \in X_\ell)$, а учитывая, что $\Pi_\ell = \Pi_\ell^i \cup \Pi_\ell^{\bar{i}}$ и

$$Q_\pi^1(\ell) = \begin{cases} Q_{\pi'}^1(\ell) & \text{при } \pi' \in \Pi_\ell^{\bar{i}}, \\ Q_{\pi'}^1(\ell) - g_i^0 & \text{при } \pi' \in \Pi_\ell^i, \end{cases}$$

имеем

$$\min_{\pi \in \Pi_j^i} Q_\pi^1(\ell) = \min\Big\{\min_{\pi' \in \Pi_\ell^{\bar{i}}} Q_{\pi'}^1(\ell), \min_{\pi' \in \Pi_\ell^i} Q_{\pi'}^1(\ell) - g_i^0\Big\} =$$

$$= \min\Big\{\min_{\pi' \in \Pi_\ell^{\bar{i}}} Q_{\pi'}^1(\ell), \min_{\pi' \in \Pi_\ell^i} Q_{\pi'}^1(\ell), \min_{\pi' \in \Pi_\ell^i} Q_{\pi'}^1(\ell) - g_i^0\Big\} =$$

$$= \min\Big\{\min_{\pi' \in \Pi_\ell} Q_{\pi'}^1(\ell), \min_{\pi' \in \Pi_\ell^i} Q_{\pi'}^1(\ell) - g_i^0\Big\} = \min\{f(\ell), S_i(\ell) - g_i^0\}.$$

Лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 4. Равенства (7) следуют из определения величин $f(j)$, $S_i(j)$ и тождества $\Pi_j = \bigcup_{i \in \mathcal{U}} \Pi_j^i$.

Докажем соотношение (8). По определению,

$$S_i(j) = \min_{\pi \in \Pi_j^i} Q_\pi^1(j) = \min_{\pi \in \Pi_j^i} \Big\{q_\pi^1(j) + \sum_{\ell \in X_j^0} Q_\pi^1(\ell)\Big\}.$$

Поскольку $q_\pi^1(j) = g_i^0 + \varphi_j g_{ij}$ для всякого $\pi \in \Pi_j^i$, то

$$S_i(j) = g_i^0 + \varphi_j g_{ij} + \min_{\pi \in \Pi_j^i} \sum_{\ell \in X_j^0} Q_\pi^1(\ell) = g_i^0 + \varphi_j g_{ij} + \sum_{\ell \in X_j^0} \min_{\pi \in \Pi_j^i} Q_\pi^1(\ell),$$

и с учетом леммы 5 окончательно получаем требуемое:

$$S_i(j) = g_i^0 + \varphi_j g_{ij} + \sum_{\ell \in X_j^0} \min\{f(\ell), S_i(\ell) - g_i^0\}.$$

Теорема доказана.

6. Алгоритм A_σ для решения оценочной задачи (6). Используем рекуррентные соотношения (7), (8). Как следует из теоремы 3, этот алгоритм будет давать и оптимальное решение исходной задачи (5) в случае существования в ней оптимального решения, связного относительно ациклической сети G.

В предварительной части алгоритма - сегментной нумерации исходной ациклической сети с произвольным входом α - получим сеть с входом $j=1$ и массивом $(\nu_j)(j \in X)$ максимальных номеров вершин каждого подмножества $X_j (j \in X)$.

Основная часть алгоритма состоит из прямого и обратного ходов.

П р я м о й х о д: вычисление таблиц $\{S_i(j), i \in \mathcal{U}\}(j \in X)$ и $\{f(j)\}(j \in X)$.

п. 1. $j = n$.

п. 2. Вычисление $S_i(j)\ (i \in \mathcal{U})$ по формуле (8). При этом элементы множества $X_j^o = (\ell_t^j)(t = 1, \dots, T(j))$ определяются рекуррентно согласно следствию 1: $\ell_1^j = j+1$; $\ell_{t+1}^j = \nu_{\ell_t^j} + 1\ (1 < t < T(j))$. В случае пустого множества X_j^o (т.е. при $\nu_j = j$) полагаем $S_i(j) = g_i^o + \varphi_j\, g_{ij} (i \in \mathcal{U})$.

п. 3. Вычисление $f(j)$ по формуле (7);

п. 4. $j = j - 1$.

п. 5. Если $j \geqslant 1$, то возвращаемся на п. 2.

О б р а т н ы й х о д: вычисление оптимального вектора назначений.

п. 1. Полагаем $j = 1$ и находим оптимальное значение 1-й компоненты вектора σ :

$$i_1 = \arg\min_{i \in \mathcal{U}} S_i(1).$$

п. 2. Если $X_j^o = \emptyset$ (т.е. в случае $\nu_j = j$), переходим к п. 4.

п. 3. Просматриваем множество сыновей j -й вершины. Для каждой вершины $\ell \in X_j^o$ находим оптимальное значение компоненты i_ℓ вектора σ : полагаем i_ℓ равным $i = i_j$ в случае $S_i(\ell) - g_i^o \leq f(\ell)$, в противном случае $i_\ell = \arg\min_{r \in \mathcal{U}} S_r(\ell)$.

п. 4. $j = j + 1$;

п. 5. Если $j < n$, то возвращаемся на п. 2.

Конец работы алгоритма A_σ: в результате имеем величину оптимума $f(1)$ исходной задачи и оптимальный вектор назначений $\sigma = (i_j)(j \in X)$.

У т в е р ж д е н и е. Алгоритм A_σ имеет трудоемкость порядка $O(mn)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предварительная часть алгоритма - сегментная перенумерация ациклической сети - требует $O(n)$ действий. Прямой ход есть последовательное вычисление таблиц $\{S_i(j)(i \in \mathcal{U})\}$ и $\{f(j)\}$ для значений $j \in X$. Вычисление величины $S_i(j)$ требует порядка $T(j)$ действий, где $T(j)$ - число сыновей j -й вершины. Суммируя эти числа по всем $i \in \mathcal{U}$ и $j \in X$, получаем величину $O(mn)$. Вычисление каждой из величин $f(j)$ требует $O(m)$ сравнений, откуда в совокупности таблица $\{f(j)\}(j \in X)$ вычисляется за время,

не превышающее величины $O(mn)$. Указанная оценка справедлива также и для обратного хода алгоритма. Окончательная оценка трудоемкости алгоритма A_G имеет величину $O(mn)$.

Из последнего утверждения и теоремы 3 непосредственно вытекает справедливость теоремы 1.

7. Рассмотрим некоторые условия существования совокупности областей обслуживания, связных относительно ациклической сети.

Введем обозначения для отношений $r \underset{j}{\preccurlyeq} s$, $r \underset{j}{\prec} s$, $r \underset{j}{\asymp} s$ $(r,s \in \mathcal{U}, j \in X)$, если $g_{rj} \leq g_{sj}$, $g_{rj} < g_{sj}$, $g_{rj} = g_{sj}$ соответственно. Записи вида $r \underset{Y}{\preccurlyeq} s$, $r \underset{Y}{\prec} s$, $r \underset{Y}{\asymp} s$ означают, что соответствующие отношения имеют место для любого $j \in Y$, где $Y \subset X$.

Определение 4. Назовем (r,s) -разбиением сети $G=(X,E)$ относительно матрицы (g_{ij}) $(i \in \mathcal{U}, j \in X)$ такое разбиение (X^r, X^s) множества X, что $r \underset{X^r}{\preccurlyeq} s$, $s \underset{X^s}{\preccurlyeq} r$, а графы, порожденные множествами вершин X^r, X^s – связные.

Определение 5. Будем говорить, что матрица $(g_{ij})(i \in \mathcal{U}, j \in X)$ обладает свойством связности относительно ациклической сети $G=(X,E)$, если для любой пары $r,s \in \mathcal{U}$ существует (r,s) -разбиение этой сети.

Свойство связности относительно ациклической сети является обобщением известного свойства связности матрицы (g_{ij}) (см. [1, 3, 4]).

Определение 6. Будем говорить, что матрица $(g_{ij})(i \in \mathcal{U}, j \in X)$ удовлетворяет свойству связности на цепи $C[j_1, j_2, \ldots, j_T]$ в сети $G=(X,E)$, если для любой пары $r,s \in \mathcal{U}$ разность $(g_{rj_t} - g_{sj_t})$ меняет свой знак при монотонном изменении индекса $t=1,\ldots,T$ не более одного раза.

Определение 7. Будем говорить, что матрица $(g_{ij})(i \in \mathcal{U}, j \in X)$ обладает свойством цепочечной связности на сети $G=(X,E)$, если она удовлетворяет свойству связности на любой цепи этой сети.

Из этих определений непосредственно следуют очевидные свойства (r,s) - разбиений:

Свойство 1. Для любого (r,s) -разбиения сети G, $r,s \in \mathcal{U}$, имеет место $\{j \mid r \underset{j}{\prec} s\} \subset X^r$, $\{j \mid s \underset{j}{\prec} r\} \subset X^s$.

Свойство 2. Если $r \underset{k}{\prec} s$ и $r \underset{\ell}{\preccurlyeq} s$, то $C[k,\ldots,\ell] \subset X^r$ для любого (r,s) -разбиения ациклической сети G, содержащей цепь $C[k,\ldots,\ell]$.

Лемма 6. Для того чтобы матрица (g_{ij}) $(i \in \mathcal{U}, j \in X)$ обладала свойством связности относительно ациклической сети $G=(X,E)$, с необходимостью должно выполняться свойство цепочечной связности на этой сети.

Доказательство. Допустим противное: в сети G нашлась цепь C', на которой нарушено свойство связности. Это означает, что для некоторой пары $r,s \in \mathcal{U}$ и вершин k,t,ℓ цепи $C[k,\ldots,t,\ldots,\ell] \subset C'$ имеют место отношения $r \underset{k}{\prec} s$, $s \underset{t}{\prec} r$, $r \underset{\ell}{\prec} s$. В этом случае, согласно свойству 2,

$C[k,\ldots,\ell] \subset X^r$ для любого (r,s) -разбиения, и, таким образом, $t \in X^r$. Но это противоречит 1-му свойству (r,s) -разбиения, согласно которому $t \in X^s$. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Свойство цепочечной связности не является достаточным для того, чтобы матрица (g_{ij}) $(i \in \mathcal{U}, j \in X)$ обладала свойством связности относительно ациклической сети. Действительно, как видно из рис. 1, каждая простая цепь 5-вершинного ациклического графа, обладает свойством связности. Однако при $\mathcal{U} = \{r, s\}$ (r,s) -разбиение построить невозможно.

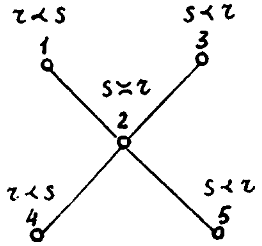

Рис. 1.

Л е м м а 7. Если матрица (g_{ij}) $(i \in \mathcal{U}, j \in X)$ обладает свойством связности относительно ациклической сети $G=(X,E)$, то для любого (r,s) -разбиения этой сети из отношений $r \underset{k}{\prec} s$ и $r \underset{\ell}{\prec} s$ следует, что компонента X^r помимо цепи $C[k,\ldots,\ell]$ содержит также все множества продолжений ребер (t,t'), где $t \in C[k,\ldots,\ell]$, $t' \notin C[k,\ldots,\ell]$, кроме, может быть, одного множества, содержащего вершину j : $s \underset{j}{\prec} r$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно второму свойству (r,s) -разбиений, $C[k,\ldots,\ell] \subset X^r$. Покажем теперь, что не более одного множества $\bar{C}$ (см. заштрихованное поддерево на рис. 2), являющегося продолжением ребра вида $(t,t') \notin C[k,\ldots,\ell]$ $t \in C[k,\ldots,\ell]$, может содержать вершину j : $s \underset{j}{\prec} r$. Если допустить противное, то получим, что часть цепи $C[k,\ldots,\ell] \subset X^r$, согласно тому же свойству 2, одновременно принадлежит другой компоненте (r,s) -разбиения, а именно X^s. Противоречие доказывает лемму.

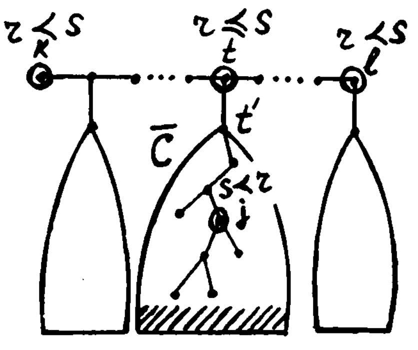

Рис. 2.

Т е о р е м а 5. Если матрица (g_{ij}) $(i \in \mathcal{U}, j \in X)$ обладает свойством связности относительно ациклической сети G, то существует оптимальное решение задачи (5) с совокупностью связных областей обслуживания.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем оптимальное решение с минимальным числом размещенных пунктов производства $\tilde{m} = \min\{|I_\sigma| : \sigma$ – оптимальный вектор назначений$\}$, а среди таких решений выберем решение с минимальным общим числом M компонент связности. Допустим, что утверждение теоремы неверно. Тогда $M > \tilde{m}$.

Обозначим через ρ_i растояние (по числу ребер) между ближайшими компонентами связности областей обслуживания i-го пункта производства $(i \in I_\sigma)$;

$$\rho^* = \min\{\rho_i \mid \rho_i > 1,\ i \in I_\sigma\};$$
$$\tau = \min\{i \mid \rho_i = \rho^*,\ i \in I_\sigma\}.$$

Пусть $C[k,\dots,t,\ell]$ - цепь из ρ^* ребер $(\rho^* \geq 2)$, соединяющая компоненты Y'_τ и Y''_τ, принадлежащие области обслуживания $Y_\tau(\sigma)$ τ-го пункта производства; $k \in Y'_\tau$, $\ell \in Y''_\tau$, (t,ℓ) - ребро в цепи $C[k,\dots,\ell]$, $t \in Y_S(\sigma)$.

В силу оптимальности вектора σ, имеем $\tau \preccurlyeq_{Y_\tau(\sigma)} S$, $S \preccurlyeq_t \tau$.

Случай $\tau \asymp_{Y''_\tau} S$ невозможен, так как, положив $i_j = S$ для всех $j \in Y''_\tau$, мы получим новое оптимальное решение σ' с общим числом компонент связности по крайней мере меньшим на 1, что противоречит минимальности числа M.

Более подробно рассмотрим случай, когда для некоторого $j'' \in Y''_\tau$ имеет место отношение $\tau \prec_{j''} S$.

В случае $\tau \asymp_{Y'_\tau} S$ положим $i_j = S$ для всех $j \in Y'_\tau$. Если при этом компонента Y'_τ была бы смежна с областью $Y_S(\sigma)$, то общее число компонент связности для вновь полученного оптимального вектора σ' уменьшилось бы по крайней мере на 1. Если же множества Y'_τ и $Y_S(\sigma)$ несмежны, то получим оптимальное решение σ' с тем же общим числом компонент M, но для S-го пункта производства получим величину $\rho_S \leq \rho^* - 1$ (число ребер между вершинами k и t), что противоречит минимальности числа ρ^*.

Осталось проверить случай, когда в компоненте Y'_τ найдется вершина j': $\tau \prec_{j'} S$. Согласно 2-му свойству (τ, S)-разбиений, $\tau \not\preccurlyeq_j S$ $(j \in C[k,\dots,\ell])$ и, в частности, $\tau \asymp_t S$. С учетом этого из леммы 7 следует, что имеется не менее одного ребра (t,t^0), $t^0 \notin C[k,\dots,\ell]$, в множестве продолжений которого содержатся вершины j^0: $S \prec_{j^0} \tau$. Положим $i_j = \tau$ для $j = t$ и всех $j \in Y_S(\sigma)$, принадлежащих множествам продолжений ребер (t,t'), $t' \notin C[k,\dots,\ell]$, $t' \neq t^0$. При этом мы, не увеличивая общего числа M компонент связности, получаем новое оптимальное решение σ' с меньшей величиной ρ_τ, что противоречит минимальности ρ^*. Теорема доказана.

8. Программная реализация алгоритма решения задачи (1)-(4), сводимой к задаче (6) в случае существования совокупности областей обслуживания, связных относительно ациклической сети $G = (X,E)$, выполнена в системе АЛГОЛ-БЭСМ-6.

В качестве входных данных программы задаются следующие величины:

1) n - число пунктов спроса, m - число возможных пунктов производства.

2) Список E ребер ациклической сети G, где каждое ребро задается парой номеров пунктов спроса, инцидентных ребру.

3) α - вход сети G.

4) Признак вычисления матрицы транспортных затрат, равный нулю в случае задания во входных данных $m \times n$-матрицы (g_{ij}), и равный единице, если $\mathcal{U} \subset X$ и во входных данных задаются массивы (d_K) $(K \in E)$ весов ребер сети и (c_i) $(i \in \mathcal{U})$ стоимостей единицы продукта, производимого в пункте $i \in \mathcal{U}$, а элементы матрицы $(g_{ij})(i \in \mathcal{U}, j \in X)$ необходимо вычислять по формуле $g_{ij} = c_i + |C[i, \ldots, j]|$, где $|C[i, \ldots, j]|$ - сумма весов ребер в цепи, соединяющей пункты i и j.

5) Массив (g_i^0) $(i \in \mathcal{U})$ начальных затрат, связанных с размещением предприятий.

6) Объемы спроса (φ_j) $(j \in X)$ в соответствующих пунктах сети.

Распечатка, выдаваемая по окончании работы программы, помимо исходных данных включает в себя результаты вычислений:

1) минимум суммарных затрат S^*;

2) оптимальный вектор назначений $\sigma = (i_j)(j \in X)$;

3) оптимальный набор I_σ пунктов размещения предприятий;

4) таблицу, в которой для каждого предприятия, размещаемого в пункте $i \in I_\sigma$, указывается множество обслуживаемых точек спроса, количество этих точек, затраты и объем спроса, связанные с областью обслуживания указанного предприятия.

Вычислительные эксперименты на сетях, содержащих до 100 вершин, подтвердили рост затрат машинного времени пропорционально произведению $m \cdot n$.

Поступила в ред.-изд.отдел
11 марта 1983 г.

Литература

1. Береснев В.Л., Гимади Э.Х., Дементьев В.Т. Экстремальные задачи стандартизации.-Новосибирск: Наука, 1978. - 333 с.

2. Трубин В.А. Эффективный алгоритм размещения на сети в форме дерева. - Докл. АН СССР, 1976, т. 231, № 3, с. 547-550.

3. Гимади Э.Х. Выбор оптимальных шкал в одном классе задач типа размещения, унификации и стандартизации. - В кн.: Управляемые системы, Новосибирск, 1970, вып. 6, с. 57-70.

4. Гимади Э.Х., Дементьев В.Т. Некоторые задачи выбора оптимальных параметрических рядов и методы их решения (задачи стандартизации).- В кн.: Проблемы кибернетики, 1973, вып. 27, с. 19-32.