Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1983 г., вып. 23.

УДК 519.176

ОДНА ЗАДАЧА ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ДЕРЕВА

А.И.Ерзин, Т.Б.Мордвинова

Рассматривается следующая задача. Пусть задан $(n+1)$-вершинный неориентированный граф $G=(V,E)$ с множеством вершин $V=\{0,1,\dots,n\}$ и множеством ребер E. Припишем ребру $(i,j)\in E$ два действительных числа (веса): $a_{ij}\geq 0$ и $b_{ij}\geq 0$. Обозначим через $\mathcal{F}$ множество остовных деревьев в графе G. Требуется построить дерево $T^*\in\mathcal{F}$, для которого

$$W(T^*)=\min_{T\in\mathcal{F}} W(T)=\min_{T\in\mathcal{F}}\Big\{\sum_{(i,j)\in T} a_{ij}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{(i,j)\in C_k(T)} b_{ij}\Big\}$$

(здесь $C_k(T)=C_{k0}(T)$, где через $C_{kj}(T)$ обозначим цепь из вершины k в вершину j в дереве $T\in\mathcal{F}$; цепь $C_0(T)$ состоит из единственной вершины 0).

При $b_{ij}\equiv 0$, $(i,j)\in E$, рассматриваемая задача совпадает с задачей построения минимального остовного дерева, а в случае $a_{ij}=const$ – с задачей построения остовного дерева кратчайших расстояний из выделенной вершины 0 ко всем остальным и может быть решена малотрудоемким алгоритмом [1]. В общем же случае для решения таких задач эффективных алгоритмов к настоящему времени неизвестно.

В работе предлагаются эффективные и псевдоэффективные алгоритмы для построения приближенных решений данной задачи. Даются оценки относительной погрешности.

§ 1. Эффективные алгоритмы

Для решения поставленной задачи исследуется возможность использования приближенных эффективных алгоритмов Прима, Дийкстра и смешанного алгоритма. Даются оценки относительной погрешности получаемого решения.

Для удобства дальнейшего изложения введем следующие обозначения. Положим:

$$a_i=\min_{(i,j)\in E} a_{ij},\ A_i=\max_{(i,j)\in E} a_{ij},\ b_i=\min_{(i,j)\in E} b_{ij},\ B_i=\max_{(i,j)\in E} b_{ij},$$

$$A=\max_{i=1,\dots,n} A_i,\ a=\min_{i=1,\dots,n} a_i,\ B=\max_{i=1,\dots,n} B_i,\ b=\min_{i=1,\dots,n} b_i,$$

$$\Delta_i=A_i-a_i,\quad \delta=\max_{i=1,\dots,n}\Delta_i,\quad \Delta=A-a.$$

Для любого остовного дерева $T\in\mathcal{F}$ определим компоненты его веса:

$u_1(T)=\sum\limits_{(i,j)\in T} a_{ij}$, $u_2(T)=\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{(i,j)\in C_k(T)} b_{ij}$. Тогда $W(T)=u_1(T)+u_2(T)$.

Пусть $T^*\in\mathcal{F}$ – оптимальное дерево, $W(T^*)=W^*\neq 0$. Тогда относительная погрешность ε для любого дерева $T\in\mathcal{F}$ определяется как $\varepsilon=(W(T)-W^*)/W^*$.

Пусть деревья P, $D\in\mathcal{F}$ таковы, что $u_1(P)=\min\limits_{T\in\mathcal{F}} u_1(T)$, $u_2(D)=\min\limits_{T\in\mathcal{F}} u_2(T)$. Через ε_P и ε_D обозначим величины относительных погрешностей для деревьев P и D соответственно.

Каждый из рассматриваемых далее алгоритмов при построении искомого остовного дерева одновременно делает проверку графа G на связность. Приводимые ниже оценки верны в тех случаях когда граф G связен.

Для фиксированного дерева $T\in\mathcal{F}$ введем обозначения:

$$R_i(T)=\sum_{(k,\ell)\in C_i(T)} b_{k\ell},\quad S_i(T)=R_i(T)+a_{ij},$$

где $(i,j)\in C_i(T)$, $R_0(T)=S_0(T)=0$. Кроме того, обозначим $S_i^*=S_i(T^*)$, $C_i^*=C_i(T^*)$, $R_i^*=R_i(T^*)$. Очевидно, что $W(T)=\sum\limits_{i=1}^{n} S_i(T)$.

Л е м м а 1.1. Для любого дерева $T\in\mathcal{F}$ справедлива оценка $\sum\limits_{i=1}^{n} R_i(T)\le\sum\limits_{i=1}^{n} i\,B_i$, где $B_{i-1}\le B_i$, $i=2,\dots,n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем индукцией по числу вершин графа ($i=1,\dots,n$).

1) $i=1$. Утверждение леммы очевидно, так как граф состоит из единственного ребра.

2) Пусть утверждение леммы верно для любого графа с i вершинами ($i=1,\dots,n-1$). Докажем справедливость леммы для графа G_{i+1} с ($i+1$) вершинами, занумерованными по неубыванию величин B_i. Пусть $T_{i+1}\in\mathcal{F}(G_{i+1})$, и вершина $k\neq 0$ является висячей в дереве T_{i+1}. Дерево $T_{i+1}\setminus\{k\}$ обозначим через T_i. Очевидно, для любой вершины $j\in T_i$ выполняется $R_j(T_i)=R_j(T_{i+1})$. Кроме того, по индукционному предположению, имеем:

$$u_2(T_i)=\sum_{j\neq K} R_j(T_i)\le \sum_{j=1}^{K-1} j\,B_j+\sum_{j=K+1}^{i+1}(j-1)B_j .$$

Отсюда

$$u_2(T_{i+1})=u_2(T_i)+R_K(T_{i+1})\le \sum_{j=1}^{K-1} jB_j+\sum_{j=K+1}^{i+1}(j-1)B_j+\sum_{j=1}^{i+1}B_j\le$$

$$\le \sum_{j=1}^{K-1} jB_j+\sum_{j=K+1}^{i+1}(j-1)B_j+KB_K+\sum_{j=K+1}^{i+1}B_j=\sum_{j=1}^{i+1} jB_j .$$

Лемма доказана.

Алгоритм Прима

Т е о р е м а 1.1. Если $\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)>0$, то

$$\varepsilon_P\le \frac{\sum_{i=1}^{n}(iB_i-b_i)}{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)}, \qquad (1)$$

где $B_{i-1}\le B_i,\ i=2,\dots,n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения дерева P имеем:

$$\varepsilon_P\le\frac{W(P)-W^*}{W^*}=\frac{u_1(P)-u_1(T^*)+u_2(P)-u_2(T^*)}{W^*}\le$$

$$\le\frac{u_2(P)-u_2(T^*)}{W^*}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(R_i(P)-R_i^*)}{W^*},$$

откуда с учетом леммы 1.1 и тривиальных неравенств $\sum_{i=1}^{n}R_i^*\ge\sum_{i=1}^{n}b_i$, $W^*\ge\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)$ и вытекает оценка (1). Теорема доказана.

Более точной оказывается следующая апостериорная оценка.

Т е о р е м а 1.2. Если $u_1(P)+u_2(D)>0$, то

$$\varepsilon_P\le\frac{u_2(P)-u_2(D)}{u_1(P)+u_2(D)} .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$\varepsilon_P=\frac{W(P)}{W^*}-1\le\frac{W(P)}{u_1(P)+u_2(D)}-1=\frac{u_2(P)-u_2(D)}{u_1(P)+u_2(D)} .$$

Алгоритм Дийкстра

Пусть $\mathcal{M}(T)=\{i\in V / C_i(T)\neq C_i^*\}$, $m_T=|\mathcal{M}(T)|$. Заметим, что

$$\varepsilon_D=\frac{W(D)-W^*}{W^*}=\frac{u_1(D)-u_1(T^*)+u_2(D)-u_2(T^*)}{W^*}\leq$$

$$\leq\frac{u_1(D)-u_1(T^*)}{W^*}\leq\frac{\sum_{i\in\mathcal{M}(D)}(A_i-a_i)}{W^*}=\frac{\sum_{i\in\mathcal{M}(D)}\Delta_i}{W^*}. \quad (2)$$

Лемма 1.2. Для любой вершины $i\in V$ такой, что $C_i(D)\neq C_i^*$, справедливо неравенство $S_i^*\geq a_{ij}+b_i+b$, где $(i,j)\in C_i^*$.

Доказательство. Так как $C_i(D)\neq C_i^*$, то по крайней мере одна из этих цепей состоит из двух или более ребер. В случае, когда таковой является C_i^*, утверждение очевидно. Если же из двух или более ребер состоит цепь $C_i(D)$, то $R_i^*\geq R_i(D)\geq b_i+b$. Лемма доказана.

Теорема 1.3. Если $\delta\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)>0$, то

$$\varepsilon_D\leq\frac{\delta\sum_{i=1}^{n}\Delta_i}{\delta\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)+b\sum_{i=1}^{n}\Delta_i}.$$

Доказательство. Из (2) и леммы 1.2 следуют оценки:

$$\varepsilon_D\leq\frac{\sum_{i=1}^{n}\Delta_i}{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)+mb}=f_1(m),$$

$$\varepsilon_D\leq\frac{m\delta}{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)+mb}=f_2(m),$$

где $m=|\mathcal{M}(D)|$. Поскольку функция $f_1(m)$ является убывающей, а $f_2(m)$ - возрастающей, то максимум их миноранты достигается, когда $f_1(m)=f_2(m)$, т.е. при $m=\frac{\sum_{i=1}^{n}\Delta_i}{\delta}$, откуда имеем

$$\varepsilon_D\leq\frac{\delta\sum_{i=1}^{n}\Delta_i}{\delta\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)+b\sum_{i=1}^{n}\Delta_i},$$

что и требовалось доказать.

Из теоремы 1.3 вытекает

Следствие 1.1. Если $b\geq cA$, $c>0$, то $\varepsilon_D\leq 1/2c$.

Теорема 1.4. Если $b>0$, то

$$\varepsilon_D \le \frac{\delta}{b}\left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)}{W^*}\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (2) имеем, что $\varepsilon_D \le \sum_{i\in m(D)} \Delta_i / W^* \le$ $\le \delta m b / b W^*$. Так как, по лемме 1.2, $W^* \ge \sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)+mb$, то $mb/W^* \le$ $\le 1 - \sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i) / W^*$, откуда вытекает утверждение теоремы.

Из теоремы 1.4 и леммы 1.1 вытекает

С л е д с т в и е 1.2.

$$\varepsilon_D \le \frac{\delta}{b}\left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)}{\sum_{i=1}^{n}(A_i+iB_i)}\right),$$

где $B_{i-1} \le B_i$, $i = 2,\ldots,n$.

Апостериорную оценку дает следующая

Т е о р е м а 1.5. Если $u_1(P)+u_2(D) > 0$, то

$$\varepsilon_D \le \frac{u_1(D)-u_1(P)}{u_1(P)+u_2(D)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$\varepsilon_D = \frac{W(D)}{W^*} - 1 \le \frac{W(D)}{u_1(P)+u_2(D)} - 1 = \frac{u_1(D)-u_1(P)}{u_1(P)+u_2(D)}.$$

Смешанный алгоритм

Алгоритм строит искомое дерево D' за n шагов, где на K -м шаге ($K = 1,\ldots,n$) к дереву $T_{K-1} = (V_{K-1}, E_{K-1})$ присоединяются одна вершина и одно ребро. Первоначально полагаем $T_0 = (V_0, E_0)$, где $V_0 = \{0\}$, $E_0 = \emptyset$. Вершине 0 приписывается метка $p_0 = 0$.

Опишем произвольный шаг алгоритма.

<u>Шаг K</u> ($K = 1,\ldots,n$). Ищем вершины $i_K \in V\setminus V_{K-1}, j_K \in V_{K-1}$ такие, что

$$a_{i_K j_K} + q(b_{i_K j_K} + p_{j_K}) = \min_{i\notin V_{K-1},\, j\in V_{K-1},\, (i,j)\in E} (a_{ij} + q(b_{ij}+p_j)). \qquad (3)$$

Вершине i_K приписываем постоянную метку $p_{i_K} = b_{i_K j_K} + p_{j_K}$ и определяем

дерево $T_K=(V_K,E_K)$, $V_K=V_{K-1}\cup\{i_K\}$, $E_K=E_{K-1}\cup\{(i_K,j_K)\}$. Обозначим дерево T_n, полученное после шага n, через D', а через $\varepsilon_{D'}$ – соответствующую ему относительную погрешность.

Лемма 1.3. Если $b>0$, то для любого $i=1,\dots,n$ справедливо неравенство $R_i(D')\le KR_i^*$, где

$$K=\left(1+\frac{L}{q}\left(1-\frac{a}{A}\right)\right), \text{ а } L=\max_{(i,j)\in E}\frac{a_{ij}}{b_{ij}}.$$

Доказательство. В дальнейшем полагаем, что вершины графа G занумерованы в порядке их присоединения к дереву D'. Проведем доказательство леммы индукцией по i $(i=0,\dots,n)$.

1) $i=0$. $R_i(D')=KR_i^*=0$.

2) Пусть утверждение леммы верно для $(i-1)$-й вершины $(i=1,\dots,n)$.

3) Докажем ее справедливость для вершины i. Пусть вершины $\ell,j\in V_{i-1}$; $K\in V\setminus V_{i-1}$ таковы, что $(i,\ell)\in C_i(D')$, $(K,j)\in C_i^*$ (поскольку $0\in V_{i-1}$, $i\notin V_{i-1}$, то искомая пара вершин K, j существует). Из (3) имеем

$$a_{i\ell}+q(b_{i\ell}+R_\ell(D'))\le a_{Kj}+q(R_j(D')+b_{Kj}). \tag{4}$$

Кроме того, по индукционному предположению,

$$R_j(D')\le KR_j^*. \tag{5}$$

Из (4) и (5) получаем

$$R_i(D')=b_{i\ell}+R_\ell(D')\le R_j(D')+b_{Kj}+\frac{a_{Kj}-a_{i\ell}}{q}\le$$

$$\le KR_j^*+b_{Kj}\left(1+\frac{a_{Kj}-a_{i\ell}}{qb_{Kj}}\right)=KR_j^*+b_{Kj}\left(1+\frac{a_{Kj}(a_{Kj}-a_{i\ell})}{qb_{Kj}\,a_{Kj}}\right)\le$$

$$\le KR_j^*+b_{Kj}\left(1+\frac{L}{q}\left(1-\frac{a}{A}\right)\right)=KR_j^*+Kb_{Kj}\le KR_i^*.$$

Лемма доказана.

Лемма 1.4. Если $q\ge1$, то для $i=1,\dots,n$ справедлива оценка

$$S_i(D')\le KS_i^*+\left(1-\frac{1}{q}\right)\Delta_i-(K-1)(a_{iK}+b_{iK}), \tag{6}$$

где $(i,K)\in C_i^*$.

Доказательство. Пусть вершины $\ell,K\in V$; $j\in V_{i-1}$, $t\notin V_{i-1}$ таковы, что $(i,\ell)\in C_i(D')$; $(i,K),(t,j)\in C_i^*$. Из (3) имеем $a_{i\ell}+q(b_{i\ell}+P_\ell)\le a_{tj}+q(b_{tj}+P_j)$, откуда, используя лемму 1.3, получаем

$$S_i(D') = a_{il} + b_{il} + p_l \le a_{il}(1 - \frac{1}{q}) + \frac{a_{tj}}{q} + b_{tj} + p_j =$$

$$= (a_{il} - a_{iK})(1 - \frac{1}{q}) + \frac{a_{tj} - a_{iK}}{q} + b_{tj} + a_{iK} + p_j \le$$

$$\le (1 - \frac{1}{q})\Delta_i + KR_j^* + a_{iK} + b_{tj} + \frac{a_{tj} - a_{iK}}{q} . \qquad (7)$$

Если цепь C_{ij}^* состоит из единственного ребра (i,j), то $K = j$, $t = i$, $KR_j^* + a_{ij} + b_{ij} = KS_i^* - (K-1)(a_{ij} + b_{ij})$, что с учетом (7) дает искомую оценку (6).

Если же цепь C_{ij}^* состоит более чем из одного ребра, то из (7) имеем:

$$S_i(D') \le (1 - \frac{1}{q})\Delta_i + KR_j^* + a_{iK} + b_{tj}\left(1 - \frac{a_{tj}}{q b_{tj}}\left(1 - \frac{a_{iK}}{a_{tj}}\right)\right) \le$$

$$\le (1 - \frac{1}{q})\Delta_i + (KR_j^* + Ka_{iK} + Kb_{iK} + Kb_{tj}) - (K-1)a_{iK} - Kb_{iK} \le$$

$$\le (1 - \frac{1}{q})\Delta_i + KS_i^* - (K-1)(a_{iK} + b_{iK}) .$$

Лемма 1.4 доказана.

Л е м м а 1.5. Если $C_i(D') \ne C_i^*$, то $S_i^* \ge a_i + b_i + b$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $C_i(D') \ne C_i^*$, то по крайней мере одна из этих цепей состоит более чем из одного ребра. Если из двух или более ребер состоит цепь C_i^*, то $S_i^* \ge a_i + b_i + b$. Пусть C_i^* состоит из одного ребра $(i,0) \in T^*$. Тогда из неравенства $a_{ij} + q(b_{ij} + p_j) \le a_{io} + q\, b_{io}$ следует, что

$$S_i^* = a_{io} + b_{io} \ge b_{ij} + p_j + \frac{a_{ij}}{q} + a_{io}(1 - \frac{1}{q}) \ge a_i + b_i + b .$$

Лемма доказана.

Т е о р е м а 1.6. Если $b > 0$, $q \ge 1$, то справедливо неравенство

$$\varepsilon_{D'} \le \frac{L}{q}(1 - \frac{a}{A})\left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(a_{ij} + b_{ij})}{W^*}\right) + (1 - \frac{1}{q})\frac{\delta}{b}\left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)}{W^*}\right),$$

где $(i,j) \in C_i^*$, $i = 1, \ldots, n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 1.4 имеем

$$S_i(D') - S_i^* \le (K-1)(S_i^* - (a_{ij} + b_{ij})) + (1 - \frac{1}{q})\Delta_i .$$

Тогда

$$W(D') - W^* = \sum_{i=1}^{n} [S_i(D') - S_i^*] \le$$

$$\le \sum_{i \in \mathcal{M}(D')} \left[\frac{L}{q}\left(1 - \frac{a}{A}\right)(S_i^* - a_{ij} - b_{ij}) + \left(1 - \frac{1}{q}\right)\Delta_i \right] \le$$

$$\le \frac{L}{q}\left(1 - \frac{a}{A}\right) \sum_{i=1}^{n} (S_i^* - a_{ij} - b_{ij}) + m\left(1 - \frac{1}{q}\right)\delta \le$$

$$\le \frac{L}{q}\left(1 - \frac{a}{A}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} S_i^* - \sum_{i=1}^{n}(a_{ij} + b_{ij})\right) + m\left(1 - \frac{1}{q}\right)\delta,$$

где $m = |\mathcal{M}(D')|$. Следовательно,

$$\varepsilon_{D'} \le \frac{L}{q}\left(1 - \frac{a}{A}\right)\left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(a_{ij} + b_{ij})}{W^*}\right) + m\left(1 - \frac{1}{q}\right)\frac{\delta}{W^*}.$$

Из леммы 1.5 имеем $m \le \dfrac{(W^* - \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i))}{b}$, откуда и вытекает утверждение теоремы.

Из теоремы 1.6 и леммы 1.1 следует априорная оценка точности смешанного алгоритма.

Следствие 1.3. Если $b > 0$ и $B_{i-1} \le B_i$, $i = 2, \ldots, n$, то

$$\varepsilon_{D'} \le \left(\frac{L}{q}\left(1 - \frac{a}{A}\right) + \left(1 - \frac{1}{q}\right)\frac{\delta}{b}\right)\left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)}{\sum_{i=1}^{n}(A_i + iB_i)}\right). \tag{8}$$

Замечание 1.1. Если граф G полный, то $W^* \le \sum_{i=1}^{n}(A_i + B_i)$, и тогда

$$\varepsilon_{D'} \le \left(\frac{L}{q}\left(1 - \frac{a}{A}\right) + \left(1 - \frac{1}{q}\right)\frac{\delta}{b}\right)\left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)}{\sum_{i=1}^{n}(A_i + B_i)}\right).$$

Следствие 1.4. Если $q = 1$ и $\Delta = 0$, то $W(D') = W^*$.

Замечание 1.2. Теорема 1.6 может быть использована и для получения апостериорной оценки, более точной по сравнению с (8). Пусть на ребрах $(i, j) \in E$ заданы веса $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, и для любого дерева $T \in \mathcal{F}$ определен вес $u_c(T) = \sum_{(i,j) \in T} c_{ij}$. Пусть, далее, дерево $P_c \in \mathcal{F}$ таково, что $u_c(P_c) = \min_{T \in \mathcal{F}} u_c(T)$. Очевидно, $u_c(P_c) \le \sum_{(i,j) \in T^*}(a_{ij} + b_{ij})$. В качестве же верхней апостериорной оценки для W^* может быть использована

$$W^* \le \min\{W(P),\ W(D),\ W(D')\} = F.$$

Отсюда получаем эффективно вычислимую верхнюю оценку для $\varepsilon_{D'}$:

$$\varepsilon_{D'} \le \frac{L}{q}\left(1-\frac{a}{A}\right)\left(1-\frac{u_c(P_c)}{F}\right)+\left(1-\frac{1}{q}\right)\frac{\delta}{b}\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)}{F}\right).$$

Теорема 1.7. Пусть $q=1$, $b_e=H_e z$ для любого ребра $e=(i,j)\in E$, где H_e - натуральные числа, $z>\Delta$. Тогда $W(D')=W^*$.

Доказательство. Предположим, что вершины графа G занумерованы в порядке их присоединения к дереву D'. Обозначим через T_i дерево, построенное на i-м шаге смешанного алгоритма при $q=1 (i=1,\dots,n)$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что для любого $i=0,\dots,n$ найдется такое дерево $T_i^*\in\mathcal{F}$, что $W(T_i^*)=W^*$ и $T_i\subseteq T_i^*$. Последнее докажем индукцией по $i=0,\dots,n$.

1) Пусть $i=0$. В качестве T_0^* берем любое оптимальное дерево $T^*\in\mathcal{F}$.

2) Пусть дерево T_{i-1}^* построено и $(i,l)\in C_i(D')$. Если $(i,l)\in T_{i-1}^*$, то $T_i\subseteq T_{i-1}^*$, и, значит, в качестве дерева T_i^* может быть взято T_{i-1}^*.

Пусть $(i,l)\notin T_{i-1}^*$, а вершины $t\in T_{i-1}$, $j\notin T_{i-1}$, $K\in V$ таковы, что (j,t), $(i,K)\in C_{it}^*=C_{it}(T_{i-1}^*)$. Положим $T_i^*=T_{i-1}^*\cup\{(i,l)\}\setminus\{(i,K)\}$ и докажем что

$$W(T_i^*)=W^*, \tag{9}$$

т.е. дерево T_i^* является искомым. Предположим, что последнее неверно, т.е. $W(T_i^*)>W(T_{i-1}^*)$. Отсюда следует, что

$$a_{iK}+n_i(b_{iK}+R_K^*)<a_{il}+n_i(b_{il}+R_l^*), \tag{10}$$

где

$$n_i=\left|\{s\in V / C_i^*\subseteq C_s^*\}\right|,\ C_s^*=C_s(T_{i-1}^*),\ R_s^*=R_s(T_{i-1}^*).$$

Из (3) имеем

$$a_{il}+b_{il}+R_l^*\le a_{jt}+b_{jt}+R_t^*. \tag{11}$$

Далее рассмотрим два случая.

а) Цепь C_{it}^* состоит из единственного ребра, т.е. $K=t$, $j=i$. Из (11) и (10) получаем

$$a_{il}+b_{il}+R_l^*+(n_i-1)(b_{iK}+R_K^*)\le a_{iK}+n_i(b_{iK}+R_K^*)<$$
$$< a_{il}+b_{il}+R_l^*+(n_i-1)(b_{il}+R_l^*),$$

откуда $b_{iK}+R_K^*<b_{il}+R_l^*$, и, следовательно,

$$b_{iK}+R_K^*\le b_{il}+R_l^*-z. \tag{12}$$

Из (11) и (12) получаем

$$b_{il} + R_l^* \le a_{ik} - a_{il} + b_{ik} + R_k^* \le \Delta - z + b_{il} + R_l^* < b_{il} + R_l^* .$$

Противоречие доказывает (9).

б) Цепь C_{it}^* состоит из более чем одного ребра, т.е.

$$b_{jt} + R_t^* \le R_k^* . \tag{13}$$

Из $b_{ik} \ge z$ и неравенств (10), (11), (13) получаем

$$z + R_k^* \le b_{ik} + R_k^* < a_{il} - a + b_{il} + R_l^* \le a_{jt} - a + b_{jt} + R_t^* \le \Delta + R_k^* ,$$

что противоречит условию $z > \Delta$.

Теорема доказана полностью.

§ 2. Псевдоэффективный алгоритм локальной оптимизации

Алгоритм начинает работу с некоторого дерева $T_0 \in \mathcal{F}$. На каждом шаге K алгоритма строится новое дерево $T_K \in \mathcal{F}$ с весом $W(T_K) < W(T_{K-1})$, отличающееся от предыдущего дерева $T_{K-1} \in \mathcal{F}$ ровно одним ребром и имеющее наименьший вес среди всех деревьев $T \in \mathcal{F}$, отличающихся от T_{K-1} одним ребром. Алгоритм заканчивает работу, когда на каком-то шаге K вес нового дерева $W(T_K) = W(T_{K-1})$.

Введем следующие обозначения. Пусть $R_i^j(T) = \sum_{(p,q) \in C_{ij}(T)} b_{pq}$, $T \in \mathcal{F}$.

Для любого подмножества вершин $V' \subset V$ определим

$$h_i(V') = \begin{cases} 1 & \text{, если } i \in V' ; \\ 0 & \text{– в противном случае.} \end{cases}$$

Для дерева $T \in \mathcal{F}$ определим вектор (Q_i) $(i = 1, \dots, n)$, где $Q_i = j$ тогда и только тогда, когда ребро $(i, j) \in C_{i}(T')$. Для любого дерева $T' = (V', E')$ определим $R^j(T') = \sum_{i \in V'} R_i^j(T')$. Тогда $u_z(T) = R^0(T)$ для $T \in \mathcal{F}$.

Описанный алгоритм может быть реализован следующим образом.

Шаг 0. В качестве начального дерева $T_0 \in \mathcal{F}$ возьмем такое, что $W(T_0) = min\{W(P), W(D), W(D')\}$. Найдем вектор (Q_i). Для каждой пары вершин $i, j \in V$ вычислим $R_i^j(T_0)$.

Шаг K. $(K = 1, \dots, K)$. Для всех ребер $(t, l) \in T_{K-1}$ применим следующую процедуру.

Удалим ребро $(t, l) \in T_{K-1}$. Дерево T_{K-1} распадается на две компоненты связности $T^0 = (V^0, E^0)$, $0 \in V^0$ и $T' = (V', E')$. Найдем $h_i(V')$, и для каждой вершины $i \in V'$ вычислим $R^i(T') = \sum_{p=1}^{n} R_p^i(T_{K-1}) \cdot h_p(V')$. Для этого необ-

ходимо не более $O(n^2)$ арифметических операций.

Найдем ребро $(i,j) \in E$, $i \in V'$, $j \in V^0$, для которого выражение

$$W_{ij} = a_{ij} + |V'| \cdot (b_{ij} + R_j(T_{K-1})) + R^i(T')$$

принимает наименьшее значение. Дерево, получившееся после добавления такого ребра (i,j), обозначим $T_K(t,\ell)$. Очевидно, что его вес $W(T_K(t,\ell)) = W(T_{K-1}) + W_{ij} - W_{t\ell}$. Так как в любом графе с $(n+1)$-й вершиной не более n^2 ребер, то трудоемкость вычисления всех W_{ij}, $i \in V'$, $j \in V^0$, не превосходит $O(n^2)$.

Среди деревьев $T_K(t,\ell)$, $(t,\ell) \in T_{K-1}$, выберем дерево T_K наименьшего веса. Пусть V^0 и V' – подмножества, получившиеся после удаления ребра (t,ℓ), на котором был достигнут минимум величин $W(T_K(t,\ell))$, а $(i,j) \in T_K$, $i \in V'$, $j \in V^0$, – новое ребро. Тогда $R^p_q(T_K) = R^p_q(T_{K-1})$ для всех $p, q \in V^0$ и всех $p, q \in V'$. Величины $R^p_q(T_K)$ для $p \in V^0$, $q \in V'$ вычисляются по следующей формуле:

$$R^p_q(T_K) = R^i_q(T_K) + b_{ij} + R^j_p(T_K)$$

с трудоемкостью, не превосходящей $O(n^2)$. За $O(n^2)$ операций пересчитаем вектор (Q_i) для нового дерева T_K.

Если на каком-то шаге K вес нового дерева равен $W(T_K) = W(T_{K-1})$, то алгоритм заканчивает работу.

Т е о р е м а 2.1. Пусть все a_{ij}, b_{ij} – целые неотрицательные, $(i,j) \in E$. Тогда трудоемкость τ описанного алгоритма не превосходит $O(\Delta \cdot n^4)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что $\tau \le K \cdot t$, где t – трудоемкость одного шага, K – количество шагов. Так как $W(T_0) \le W(D)$, то $K \le \sum_{i=1}^{n} (A_i - a_i) \le \Delta \cdot n$. Покажем, что $t \le O(n^3)$. В описанном выше алгоритме трудоемкость нахождения дерева $T_K(t,\ell)$, $(t,\ell) \in T_{K-1}$, не превосходит $O(n^2)$. А так как в любом дереве $T \in \mathcal{F}$ ровно n ребер, то $t \le$ [illegible].
Теорема доказана.

Поступила в ред.-изд.отдел
29 ноября 1982 г.

Л и т е р а т у р а

1. Кристофидес Н. Теория графов: Алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978, 432с.