Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1983 г., вып. 23.

УДК 519.8

НИЖНЯЯ ОЦЕНКА ЧИСЛА ИТЕРАЦИЙ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА АЛГОРИТМОВ ОТСЕЧЕНИЯ

А.А.Колоколов

Для исследования двойственных алгоритмов отсечения целочисленного программирования (ЦП) в [2, 3] развивается подход, основанный на разбиении допустимой области соответствующей непрерывной задачи на классы эквивалентности (L-отрезки) специального вида. В терминах L-отрезков введена мера отсечения, дано описание класса регулярных отсечений, обеспечивающих конечность алгоритмов, получены верхние оценки числа итераций (отсечений). Исследованы [2] свойства таких разбиений для ряда задач ЦП.

В данной работе указанный подход применяется к построению нижней оценки числа итераций (отсечений) для одного класса двойственных алгоритмов отсечения ЦП, содержащего, в частности, B-алгоритм [4]. В отличие от имеющихся оценочных результатов для полностью целочисленного алгоритма Гомори [5] и прямых алгоритмов отсечения [1], полученная здесь нижняя оценка выписывается не для патологического семейства задач, а для любой задачи ЦП, решаемой рассматриваемыми алгоритмами. Следует также отметить ее близость к ранее полученной верхней оценке (см. [2]).

§ 1. Предварительные сведения

Пусть Z^n – множество всех n-мерных целочисленных векторов. Разбиение на L-отрезки непустого множества $\Omega \subseteq R^n$ определим следующим образом.

а) каждая точка $z \in Z^n$ образует отдельный класс;

б) нецелочисленные точки x и y эквивалентны, $x \overset{L}{\sim} y$, если $\varphi(x) = \varphi(y)$, $[x_{\varphi(x)}] = [y_{\varphi(y)}]$, $x_i = y_i$, $i = 1, \ldots, \varphi(x) - 1$, где $\varphi(x) = \min\{i : x_i \neq [x_i], i = 1, \ldots, n\}$. Соответствующее фактор-множество обозначим Ω / L. Отметим, что для ограниченного Ω множество Ω / L является конечным и его можно записать в виде $\Omega / L = \{V_1, \ldots, V_p\}$, $V_i \dot{\succ} V_{i+1}$, $i = 1, \ldots, p-1$, причем $V_i \dot{\succ} V_{i+1} \Leftrightarrow x' \dot{\succ} x''$ для всех $x' \in V_i$, $x'' \in V_{i+1}$. Если $x \overset{L}{\sim} y$, $x \dot{\succ} y$, то они, очевидно, неотделимы, т.е. не существует $z \in Z^n$, для которой $x \dot{\succeq} z \dot{\succeq} y$. Будем называть L-отрезки, состоящие из нецелочисленных точек, дробными.

Пусть $S \in \{1, \ldots, n\}$ и $Z^{n,s}$ – множество всех n-мерных векторов, у которых первые S компонент являются целыми, $Z^{n,n} = Z^n$. Предположим, что

Ω - выпуклое замкнутое множество[1] в R^n, имеющее лексикографически максимальный элемент $\bar{x}$, $\bar{x} \bar{\in} Z^{n,s}$. Рассмотрим следующую задачу ЦП: найти лексикографический максимум множества $\Omega \cap Z^{n,s}$, т.е.

$$z^* = \operatorname{lex\,max}(\Omega \cap Z^{n,s}). \tag{1}$$

При исследовании двойственных алгоритмов отсечения особый интерес представляют те точки из Ω, которые непременно должны быть отсечены, а именно:

$$\Omega_* = \{x : x \in \Omega,\ x \succ z \quad \text{для всех} \quad z \in \Omega \cap Z^{n,s}\}.$$

Если $\Omega \cap Z^{n,s} = \emptyset$, то, очевидно, Ω совпадает с Ω_*.

Рассмотрим линейное неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_j x_j \le \gamma_0 \tag{2}$$

с вещественными коэффициентами γ_j, $j = 1,\dots,n$. Будем говорить, что неравенство (2) исключает (отрезает) L-отрезок $V \in \Omega/L$, если $(\gamma, x) > \gamma_0$ для всех $x \in V$, $\gamma = (\gamma_1,\dots,\gamma_n)$. Неравенство (2) называется регулярным отсечением, если выполняются следующие условия:

1) $(\gamma, x) \le \gamma_0$ исключает L-отрезок $V_{\bar{x}} \in \Omega/L$, содержащий точку $\bar{x}$;
2) $(\gamma, z) \le \gamma_0$ для всех $z \in \Omega \cap Z^{n,s}$.

Будем говорить, что регулярное отсечение имеет глубину h, если оно исключает из Ω_*/L точно h L-отрезков. Глубину отсечения (2) обозначим $h(\bar{\gamma})$, $\bar{\gamma} = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$.

§ 2. Класс отсечений $\mathcal{T}(\bar{x})$

Опишем класс рассматриваемых отсечений. Пусть $B^n = \{x : 0 \le x_i \le 1$, $i = 1,\dots,n\}$, $\tilde{x}$ - некоторая точка из B^n, причем $\tilde{x} \bar{\in} Z^n$. Положим $J_+(\tilde{x}) = \{j : \tilde{x}_j = 1,\ j = 1,\dots,\varphi(\tilde{x})-1\}$, $J_0(\tilde{x}) = \{j : \tilde{x}_j = 0,\ j = 1,\dots,\varphi(\tilde{x})-1\}$.

Через $\mathcal{T}(\tilde{x})$ обозначим множество всех линейных неравенств вида (2), коэффициенты которых удовлетворяют условиям:

1) $\gamma_j = 0$, $j = \varphi(\tilde{x})+1,\dots,n$;
2) $\gamma_j \le 0$, $j \in J_0(\tilde{x})$;
3) $0 < \gamma_{\varphi(\tilde{x})} \le \gamma_j$, $j \in J_+(\tilde{x})$,
4) $\gamma_0 = \sum_{j \in J_+(\tilde{x})} \gamma_j$.

Легко проверить, что в $\mathcal{T}(\tilde{x})$ содержатся отсечение B-алгоритма

$$\sum_{j \in J_+(\tilde{x})} x_j - \sum_{j \in J_0(\tilde{x})} x_j + x_{\varphi(\tilde{x})} \le |J_+(\tilde{x})| \tag{3}$$

---

[1] Отметим, что приводимые здесь результаты могут быть перенесены на случай невыпуклых задач.

и его усиление

$$\sum_{j\in J_+(\tilde{x})} x_j + x_{\varphi(\tilde{x})} \leq |J_+(\tilde{x})| . \qquad (4)$$

Далее рассматривается задача (1) для $\Omega \subset B^n$, а в качестве $\tilde{x}$ выбирается $\bar{x} = lex\,max\,\Omega$.

Утверждение 1. Любое неравенство из класса $\mathcal{T}(\bar{x})$ является регулярным отсечением.

Доказательство. Проверим условие отсечения L-отрезка $V_{\bar{x}} \in \Omega/L$. Пусть $x' \in V_{\bar{x}}$, тогда $x'_{\varphi(x')} \in (0,1)$, $\varphi(x') = \varphi(\bar{x})$ и

$$\sum_{j\in J_+(\bar{x})} \gamma_j x'_j + \gamma_{\varphi(\bar{x})} x'_{\varphi(\bar{x})} > \sum_{j\in J_+(\bar{x})} \gamma_j ,$$

поскольку $\gamma_{\varphi(\bar{x})} > 0$. Покажем, что любая точка из $\Omega \cap Z^{n,s}$ удовлетворяет $(\gamma, x) \leq \gamma_0$. Предположим противное, т.е. найдется $z \in \Omega \cap Z^{n,s}$, для которой

$$\sum_{j\in J_+(\bar{x})} \gamma_j z_j + \sum_{j\in J_0(\bar{x})} \gamma_j z_j + \gamma_{\varphi(\bar{x})} z_{\varphi(\bar{x})} > \sum_{j\in J_+(\bar{x})} \gamma_j .$$

Так как $\gamma_j \leq 0$ для $j \in J_0(\bar{x})$, то

$$\sum_{j\in J_+(\bar{x})} \gamma_j z_j + \gamma_{\varphi(\bar{x})} z_{\varphi(\bar{x})} > \sum_{j\in J_+(\bar{x})} \gamma_j .$$

Это неравенство, очевидно, может иметь место лишь при $z_{\varphi(\bar{x})} = 1$. Если $J_+(\bar{x}) = \varnothing$, то $z \succ \bar{x}$, что противоречит выбору $\bar{x}$. Пусть $J_+(\bar{x}) \neq \varnothing$. Если для некоторого $j_0 \in J_+(\bar{x})$ выполняется $z_{j_0} = 0$, то, учитывая $\gamma_{\varphi(\bar{x})} \leq \gamma_{j_0}$, получаем

$$\sum_{j\in J_+(\bar{x})} \gamma_j z_j + \gamma_{\varphi(\bar{x})} \leq \sum_{j\in J_+(\bar{x})} \gamma_j .$$

Следовательно, $z_j = 1$ для всех $j \in J_+(\bar{x})$. Но тогда $z \succ \bar{x}$, что противоречит лексикографической максимальности $\bar{x}$. Утверждение доказано.

Будем говорить, что отсечение $(\gamma', x) \leq \gamma'_0$ не сильнее отсечения $(\gamma, x) \leq$, если $Q \subseteq Q'$, где $Q = \{x : (\gamma, x) \leq \gamma_0, x \in \Omega\}$, $Q' = \{x : (\gamma', x) \leq \gamma'_0, x \in$ $\}$. Для глубин $h(\bar{\gamma})$ и $h(\bar{\gamma}')$ таких отсечений, очевидно, справедливо неравенство $h(\bar{\gamma}) \geq h(\bar{\gamma}')$.

Утверждение 2. Любое отсечение из класса $\mathcal{T}(\bar{x})$ не сильнее отсечения (4).

Доказательство. Ясно, что произвольное отсечение (2) из класса $\mathcal{T}(\bar{x})$ не сильнее отсечения

$$\sum_{j\in J_+(\bar{x})} \gamma_j x_j + \gamma_{\varphi(\bar{x})} x_{\varphi(\bar{x})} \leq \sum_{j\in J_+(\bar{x})} \gamma_j . \qquad (5)$$

Покажем, что (5) не сильнее (4). Если $J_+(\bar{x}) = \varnothing$, то это очевидно. Пусть $J_+(\bar{x}) \neq \varnothing$ и $x' \in \Omega$ удовлетворяет (4). Умножим (4) на $\gamma_{\varphi(\bar{x})} > 0$:

$$\gamma_{\varphi(\bar{x})} \sum_{j\in J_+(\bar{x})} x'_j + \gamma_{\varphi(\bar{x})} x'_{\varphi(\bar{x})} \le \gamma_{\varphi(\bar{x})} |J_+(\bar{x})| . \qquad (6)$$

Так как $x' \in B^n$, то для нее выполняются соотношения

$$(\gamma_j - \gamma_{\varphi(\bar{x})}) x'_j \le (\gamma_j - \gamma_{\varphi(\bar{x})}), \ j \in J_+(\bar{x}) . \qquad (7)$$

Суммируя (6) и все неравенства (7), получаем

$$\sum_{j\in J_+(\bar{x})} \gamma_j x'_j + \gamma_{\varphi(\bar{x})} x'_{\varphi(\bar{x})} \le \sum_{j\in J_+(\bar{x})} \gamma_j .$$

Утверждение доказано.

Для построения нижней оценки числа итераций нам потребуется оценить сверху глубину отсечений из $\mathcal{T}(\bar{x})$.

Утверждение 3. Глубина отсечений из класса $\mathcal{T}(\bar{x})$ не превышает числа целочисленных переменных задачи (1), т.е. величины S.

Доказательство. Ввиду утверждения 2 для получения верхней оценки глубины отсечений из класса $\mathcal{T}(\bar{x})$ достаточно исследовать отсечение (4). Опишем множество исключаемых им дробных L-отрезков.

Пусть V' - некоторый дробный L-отрезок из Ω/L, отличный от $V_{\bar{x}}$, и $x' \in V'$. Положим $\eta(\bar{x},x') = min\{i : \bar{x}_i \ne x'_i, i=1,\dots,n\}$. Так как $\bar{x}$ и x' принадлежат различным L-отрезкам, то $\eta(\bar{x},x') \le \varphi(\bar{x})$. Если $\eta(\bar{x},x') = \varphi(\bar{x})$, то $x'_{\varphi(\bar{x})} = 0$ и легко проверить, что x' удовлетворяет неравенству (4). Следовательно, дробные L-отрезки, у которых $\eta(\bar{x},x') = \varphi(\bar{x})$, не исключаются отсечением (4).

Пусть теперь $\eta(\bar{x},x') < \varphi(\bar{x})$. Тогда, очевидно, $J_+(\bar{x}) \ne \emptyset$. Ясно также, что $\eta(\bar{x},x') \bar{\in} J_0(\bar{x})$. Итак, остается рассмотреть случай $\eta(\bar{x},x') \in J_+(\bar{x})$. Нетрудно проверить, что если $x'_p = 0$, $p = \eta(\bar{x},x')$, то L-отрезок V' не исключается. Действительно,

$$\sum_{j\in J_+(\bar{x})} x'_j + x'_{\varphi(\bar{x})} \le |J_+(\bar{x})| - 1 + x'_{\varphi(\bar{x})} \le |J_+(\bar{x})| .$$

Таким образом, отсечение (4) может исключить из $\Omega_*/L \setminus \{V_{\bar{x}}\}$ лишь дробные L-отрезки, у которых $x'_p \in (0,1)$. Любой такой L-отрезок удовлетворяет условиям а) $\varphi(x') \in J_+(\bar{x})$ и б) $x'_j = \bar{x}_j$, $j = 1,\dots,\varphi(x')-1$. Их число, очевидно, не превышает $|J_+(\bar{x})|$. Учитывая $V_{\bar{x}}$, получаем, что глубина любого отсечения из $\mathcal{T}(\bar{x})$ не более $|J_+(\bar{x})| + 1 \le S$. Утверждение доказано.

Нетрудно построить примеры задач ЦП, для которых полученная оценка достигается. Можно также показать, что в $\mathcal{T}(\bar{x})$ имеются отсечения глубины 1.

§ 3. Оценки числа отсечений

Перейдем к исследованию двойственных алгоритмов отсечения, основанных на неравенствах из $\mathcal{T}(\bar{x})$.

Процесс T.

0) Полагаем $\Omega^{(1)} = \Omega$, $K = 1$.

1) Находим $x^{(K)} = \operatorname{lexmax} \Omega^{(K)}$. Если либо $x^{(K)} \in Z^{n,s}$, либо $\Omega^{(K)} = \varnothing$, то процесс завершается. В первом случае получаем оптимальное решение задачи (1), во втором – решения нет.

2) Заменяем $\Omega^{(K)}$ на $\bar{\Omega}^{(K)}$ путем исключения из текущей системы ограничений некоторых неравенств – отсечений. При этом должно выполняться $x^{(K)} = \operatorname{lexmax} \bar{\Omega}^{(K)}$.

3) Строим отсечение из класса $\mathcal{T}(x^{(K)})$: $(\gamma^{(K)}, x) \le \gamma_0^{(K)}$.

4) Присоединяем полученное отсечение к ограничениям задачи и полагаем $\Omega^{(K+1)} = \bar{\Omega}^{(K)} \cap \{x : (\gamma^{(K)}, x) \le \gamma_0^{(K)}\}$.

Переходим к выполнению следующей итерации (на шаг 1).

Так как все отсечения процесса регулярны, а Ω_*/L – конечное множество, то процесс T решает (1) за конечное число итераций, при этом используется не более $|\Omega_*/L|$ отсечений (см. [2]).

Т е о р е м а. Для решения задачи (1) процессом T потребуется не менее $]\frac{1}{S}|\Omega_*/L|[$ отсечений.

Эта оценка непосредственно следует из описания T и утверждения 3.

Близость нижней и верхней оценок числа отсечений указывает на то, что различные алгоритмы решения задачи (1), получающиеся конкретизацией процесса T, примерно одинаковы (по числу итераций), а величина $|\Omega_*/L|$ достаточно точно описывает сложность решения задачи этими алгоритмами. Задачи с большим числом элементов в Ω_*/L являются трудными для T. Примеры таких задач легко выписываются на основе полученной нижней оценки. К ним относится, в частности, контрпример [6] для метода ветвей и границ.

Поступила в ред.-изд.отдел
12 мая 1982 г.

Л и т е р а т у р а

1. Колоколов А.А. Некоторые оценки для прямых алгоритмов метода отсечения в целочисленном программировании. – В кн.: Математический анализ экономических моделей, ч.Ш. Новосибирск, ИЭиОПП СО АН СССР, 1972, с. 154–161.

2. Колоколов А.А. О лексикографической структуре некоторых выпуклых многогранных множеств. – 5-я Всесоюз. конф. по пробл.теоретич. кибернетики. Тез. докл. Новосибирск, 1980, с. 77–79.

3. Колоколов А.А. Регулярные отсечения при решении задач целочисленной оптимизации. – В кн.: Целочисленные экстремальные задачи (Управляемые системы), Новосибирск, 1981, вып. 21, с. 18–25.

4. Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. Дискретное программирование. – М.: Наука, 1969, – 368 с.

5. Финкельштейн Ю.Ю. Оценка числа итераций для полностью целочисленного алгоритма Гомори. - Докл. АН СССР, 1970, т.193, № 3, с. 543-546.

6. Jeroslow R.C. Trivial integer programs unsolvable by branch - and - bound (short communication). - Math. Programming, 1974, 6, N 1, p. 105-109.