Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1984 г., вып. 24

УДК 519.854+863

О ЗАДАЧЕ ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНОГО ДИНАМИЧЕСКОГО РЯДА С ОГРАНИЧЕННЫМ ВРЕМЕНЕМ ЖИЗНИ ИЗДЕЛИЙ

Г.И.Ибрагимов

Исследованию задачи выбора оптимального динамического ряда изделий посвящена работа [1]. Эта задача рассматривается в предположении, что срок годности (время жизни) изделий сравним с длиной рассматриваемого промежутка времени и, следовательно, выбывания изделий из строя "по старости" не происходит. Однако при планировании развития типажа и номенклатуры изделий на длительную перспективу указанный фактор является существенным, а его явный учет в соответствующих моделях необходимым.

В настоящей статье рассматривается задача выбора оптимального динамического ряда с ограниченным временем жизни изделий и показывается, что алгоритм ее решения может быть построен на основе того же подхода, что и алгоритм для задачи без учета времени жизни. Основной результат состоит в доказательстве сводимости рассматриваемой задачи к задаче, исследованной в [1].

1. Пусть $t = 1, 2, \dots, T$ – номера контрольных моментов на рассматриваемом промежутке времени. Начало этого промежутка считаем 0 -контрольным моментом. Пусть множество номеров $I = \{1, 2, \dots, m\}$ задает исходный ряд изделий (образцов изделий), а множество номеров $J(t)$ – область применения изделий в t -й, $t = 1, 2, \dots, T$, контрольный момент. Считаем, что $J(t) \cap J(t') = \emptyset$ при $t \neq t'$ и $\bigcup_{t=1}^{T} J(t) = J = \{1, 2, \dots, n\}$.

Для $j \in J$ обозначим через $t(j)$ такой номер t, что $j \in J(t)$. По аналогии с моделью из [1] для $i \in I$ считаем известной величину C_i^0; для $i \in I$, $\tau = 1, 2, \dots, T$, – величину $C_{i\tau}^{п}$ и для $i \in I$, $j \in J$, – величину $C_{ij}^{в}$, P_{ij}. Кроме того, для $i \in I$ предполагаем заданной величину $\rho_i > 0$, называемую временем жизни i -го изделия. Считаем, что i -е изделие, произведенное на отрезке времени между ($\tau - 1$)-м и τ -м контрольными моментами, не может быть использовано в t -й контрольный момент, если $t > \tau + \rho_i - 1$.

Пусть $x_i \in \{0, 1\}$, $i \in I$; $x_{ij} \geqslant 0$, $i \in I$, $j \in J$; $v_{i\tau}$, $i \in I$, $\tau = 1, 2, \dots, T$, – переменные, имеющие тот же содержательный смысл, что и в случае модели из [1].

Задача выбора оптимального динамического ряда с ограниченным временем жизни изделий записывается следующим образом:

$$\sum_{i\in I}\Big\{c_i^o x_i+\sum_{\tau=1}^{T} c_{i\tau}^{n} v_{i\tau}+\sum_{j\in J} c_{ij}^{\text{в}} x_{ij}\Big\}\longrightarrow \min_{(x_i)(x_{ij})(v_{i\tau})}; \quad (1)$$

$$\sum_{i\in I} x_{ij}=1,\ j\in J; \quad (2)$$

$$0\le x_{ij}\le x_i,\ i\in I,\ j\in J; \quad (3)$$

$$\sum_{j\in J(t)} p_{ij}\, x_{ij}\le \sum_{t-\rho_i<\tau\le t} v_{i\tau},\ i\in I,\ t=1,2,\dots,T; \quad (4)$$

$$x_i\in\{0,1\},\ i\in I. \quad (5)$$

2. Будем говорить [2], что экстремальная задача (класс конкретных экстремальных задач) P сводится к экстремальной задаче (классу конкретных экстремальных задач) Q, если, во-первых, существует эффективный алгоритм, строящий по исходным данным всякой конкретной задачи $p\in P$ исходные данные некоторой конкретной задачи $\varphi(p)\in Q$, и, во-вторых, существует эффективный алгоритм, строящий по исходным данным задачи $\varphi(p)$ и любому ее оптимальному решению некоторое оптимальное решение исходной задачи p.

Для $i\in I,\ \tau=1,2,\dots,T,\ j\in J$ положим

$$p_{i\tau j}=\begin{cases} p_{ij}, & \text{если } \tau\le t(j)<\tau+\rho_i,\\ \infty & \text{– в противном случае.}\end{cases}$$

Имеет место

Т е о р е м а. Задача (1) – (5) сводится к следующей задаче:

$$\sum_{i\in I}\Big\{c_i^o x_i+\sum_{\tau=1}^{T} c_{i\tau}^{n} v_{i\tau}+\sum_{\tau=1}^{T}\sum_{j\in J} c_{ij}^{\text{в}} x_{i\tau j}\Big\}\longrightarrow \min_{(x_i)(x_{i\tau j})(v_{i\tau})}; \quad (6)$$

$$\sum_{i\in I}\sum_{\tau=1}^{T} x_{i\tau j}=1,\ j\in J; \quad (7)$$

$$0\le x_{i\tau j}\le x_i,\ i\in I,\ \tau=1,2,\dots,T,\ j\in J; \quad (8)$$

$$\sum_{j\in J(t)} p_{i\tau j}\, x_{i\tau j}\le v_{i\tau},\ i\in I,\ t=1,2,\dots,T,\ \tau=1,2,\dots,T; \quad (9)$$

$$x_i \in \{0,1\},\ i \in I. \tag{10}$$

Доказательство. Пусть (x_i^*) $(x_{i\tau_j}^*)$ $(v_{i\tau}^*)$ - оптимальное решение задачи (6)-(10). Построим по нему оптимальное решение задачи (1)-(5). Для этого положим

$$x_{ij} = \sum_{\tau=1}^{T} x_{i\tau_j}^*,\ i \in I,\ j \in J.$$

Покажем, что (x_i^*) (x_{ij}) $(v_{i\tau}^*)$ - решение задачи (1) - (5). Справедливость соотношений (2) и (3) следует из (7) и (8), а соотношение (4) из неравенства

$$\sum_{t-\rho_i<\tau\le t}\ \sum_{j\in J(t)} p_{i\tau_j}\, x_{i\tau_j}^* \le \sum_{t-\rho_i<\tau\le t} v_{i\tau}^*$$

и равенств

$$\sum_{t-\rho_i<\tau\le t}\ \sum_{j\in J(t)} p_{i\tau_j}\, x_{i\tau_j}^* = \sum_{j\in J(t)} p_{ij} \sum_{\tau=1}^{T} x_{i\tau_j}^* = \sum_{j\in J(t)} p_{ij}\, x_{ij}.$$

Покажем теперь, что (x_i^*) (x_{ij}) $(v_{i\tau}^*)$ - оптимальное решение. Для этого заметим прежде всего, что на исходном решении (x_i^*) $(x_{i\tau_j}^*)$ $(v_{i\tau}^*)$ и на построенном решении (x_i^*) (x_{ij}) $(v_{i\tau}^*)$ значения целевых функций (6) и (1) равны. Рассмотрим $(\tilde{x}_i)$ $(\tilde{x}_{ij})$ $(\tilde{v}_{i\tau})$ - оптимальное решение задачи (1)-(5) и построим по нему решение $(\tilde{x}_i)$ $(x_{i\tau_j})$ $(\tilde{v}_{i\tau})$ задачи (6)-(10), на котором значение целевой функции (6) равняется оптимальному значению целевой функции (1). Отсюда и будет вытекать требуемая оптимальность решения (x_i^*) (x_{ij}) $(v_{i\tau}^*)$.

Положим

$$V_{it} = \sum_{t-\rho_i<\tau\le t} \tilde{v}_{i\tau},\ i\in I,\ t=1,2,\dots,T,$$

и пусть

$$x_{i\tau_j} = \begin{cases} \dfrac{\tilde{v}_{i\tau}}{V_{it(j)}}\ \tilde{x}_{ij} & \text{, если } t(j)-\rho_i<\tau\le t(j), \\ 0 & \text{- в противном случае,} \end{cases}$$

$$i\in I,\ \tau=1,2,\dots,T,\ j\in J.$$

Покажем, что $(\tilde{x}_i)$ $(x_{i\tau_j})$ $(\tilde{v}_{i\tau})$ - решение задачи (6) - (10). Справедливость неравенства (8) следует из (3), равенства (7) - из соотношений

$$\sum_{i\in I}\sum_{\tau=1}^{T} x_{i\tau j}=\sum_{i\in I}\sum_{t(j)-\rho_i<\tau\le t(j)}\frac{\tilde{v}_{i\tau}}{V_{it(j)}}\tilde{x}_{ij}=\sum_{i\in I}\tilde{x}_{ij}=1,$$

а неравенства (9) при $\tau > t(j)$ или $\tau \le t(j)-\rho_i$ - из условия

$$\sum_{j\in J(t)} p_{i\tau j}\, x_{i\tau j}=0,$$

а при $t(j)-\rho_i<\tau\le t(j)$ - из соотношений

$$\sum_{j\in J(t)} p_{i\tau j}\, x_{i\tau j}=\sum_{j\in J(t)} p_{i\tau j}\frac{\tilde{v}_{i\tau}}{V_{it}}\tilde{x}_{ij}=\frac{\tilde{v}_{i\tau}}{V_{it}}\sum_{j\in J(t)} p_{ij}\,\tilde{x}_{ij}\le$$

$$\le\frac{\tilde{v}_{i\tau}}{V_{it}}\sum_{t-\rho_i<\tau'\le t}\tilde{v}_{i\tau'}=\tilde{v}_{i\tau}.$$

Покажем, наконец, что на построенном решении $(\tilde{x}_i)\ (x_{i\tau j})(\tilde{v}_{i\tau})$ значение целевой функции (6) равняется оптимальному значению целевой функции (1). Это вытекает из равенств

$$\sum_{\tau=1}^{T}\sum_{j\in J} c_{ij}^{в}\, x_{i\tau j}=\sum_{t=1}^{T}\sum_{j\in J(t)}\sum_{t-\rho_i<\tau\le t} c_{ij}^{в}\frac{\tilde{v}_{i\tau}}{V_{it}}\tilde{x}_{ij}=$$

$$=\sum_{j\in J} c_{ij}^{в}\,\tilde{x}_{ij}.$$

Теорема доказана.

3. Нетрудно показать, что задача (6)-(10) сводится к задаче вида

$$\sum_{i\in I} c_i^{0} x_i+\sum_{i\in I}\sum_{\tau=1}^{T}\varphi_{i\tau}(x_{i\tau 1},\dots,x_{i\tau n})\to\min_{(x_i)\,(x_{i\tau j})};$$

$$\sum_{i\in I}\sum_{\tau=1}^{T} x_{i\tau j}=1,\quad j\in J;$$

$$0\le x_{i\tau j}\le x_i,\ i\in I,\ \tau=1,2,\dots,T,\ j\in J;$$

$$x_i\in\{0,1\},\quad i\in I,$$

где

$$\varphi_{i\tau}(x_{i\tau 1},\dots,x_{i\tau n})=c_{i\tau}^{п}\max_{t=1,\dots,T}\sum_{j\in J(t)} p_{i\tau j}\, x_{i\tau j}+\sum_{j\in J} c_{ij}^{в}\, x_{i\tau j}.$$

Последняя задача, очевидно, сводится к обобщенной задаче, рассмотренной в [1]. Поэтому для решения задачи (6)-(10) и, следовательно, задачи (1) - (5) может быть использован алгоритм для решения обобщенной задачи, построенный в [1].

Поступила в ред.-изд.отдел
14 ноября 1983 г.

Литература

1. Береснев В.Л., Ибрагимов Г.И., Кочетов Ю.А. Алгоритм решения задачи оптимального выбора динамического ряда изделий. Настоящий сборник, с. 3-19.

2. Береснев В.Л., Гимади Э.Х., Дементьев В.Т. Экстремальные задачи стандартизации. Новосибирск: Наука, 1978. - 333 с.