Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1984 г., вып. 24.

УДК 519.651

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ И ОПТИМАЛЬНЫХ РАЗДЕЛЯЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ

Б.А.Морякин

При решении оптимизационной задачи синтеза измерительной системы используется целевая функция, вид и параметры которой зависят от статистических свойств случайных процессов, протекающих в системе. Характеристика качества функционирования измерительной системы зависит от алгоритма обработки информации, определяемого решением задачи синтеза оптимального разделяющего оператора. В статье приводятся некоторые результаты анализа случайных процессов и оптимального разделяющего оператора.

Пусть H_ω, H_t - два экземпляра гильбертовых пространств, элементами которых являются функции вида:

$$a(\omega):\Omega\to R;\quad \varphi(t):T\to R;$$
$$T\subset R;\quad a(\omega)\in H_\omega;\quad \varphi(t)\in H_t.$$

Полагаем, что функции из H_ω измеримы относительно σ-алгебры $\mathfrak{S}$ множеств из Ω и σ-алгебры Σ из R, т.е. каждая функция $a_i\in H_\omega$ определена на вероятностном пространстве $\{\Omega,\mathfrak{S},\mu\}$ и имеет выборочное пространство $\{R,\Sigma,\mu_i\}$.

Введем ортогональный проектор $\mathcal{P}_n: H_t\to H_{t,n}$ со значениями в n-мерном подпространстве $H_{t,n}\subset H_t$. Случайный процесс $\mathcal{P}_n x:\Omega\to H_{t,n}$ определен на вероятностном пространстве $\{\Omega,\mathfrak{S}_n,\mu^n\}$ и имеет выборочное пространство $\{R^n,\Sigma^n,\mu_x^n\}$. Если система $\{\varphi_i\}^n$ функций из H_t является базисом подпространства $H_{t,n}$, а $\{a_i\}_1^n$ - координаты случайного процесса $\mathcal{P}_n x$ в этом базисе, то $\mathcal{P}_n x=\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\varphi_i$.

Измеримая функция $f(a_1,\dots,a_n)$ интегрируема по слабому распределению μ^n на слабой σ-алгебре $\mathfrak{S}_n<\mathfrak{S}$ множеств, являющихся прообразами множеств из σ-алгебры Σ^n относительно совокупности отображений $\{a_i\}_1^n$, т.е. $A\in\mathfrak{S}_n\Rightarrow A=\{\omega:a_1\in B_1\wedge\dots\wedge a_n\in B_n\}$, если $B_1\times\dots\times B_n\in\Sigma^n$, и интеграл имеет вид

$$M_A f(a_1,\dots,a_n)=\frac{1}{\mu^n(A)}\int\limits_A f(a_1,\dots,a_n)\mu^n(d\omega),\ \mu(A)\neq 0.$$

Если подынтегральная функция является произведением функций $f(a_1,\dots,a_n)=a_1 a_2$, то этот интеграл вводит скалярное произведение $(a_1,a_2)_A=M_A a_1\cdot a_2$ в гильбертовом пространстве случайных величин H_ω и полунорму $\|a\|_A=(a,a)_A^{1/2}$. Обозначение множества $A\in\mathfrak{S}_n$ будем опускать, если $A=\Omega$.

Вводим K -метрику в функциональное пространство H_t скалярным произведением $(\varphi_1,\varphi_2)_K=\int\limits_T\varphi_1\cdot K\varphi_2\,dt$, где K - симметричный неотрицательно-определенный в H_t оператор. Букву K в обозначении скалярного произведения будем опускать, если $K=\mathcal{I}$ - тождественный оператор. Скалярное произведение $(\varphi,\varphi)_K^{1/2}$ вводит норму в подпространстве $H_{t,n}$, если это подпространство не имеет с ядром оператора K общих точек.

Ниже рассматривается пространство $H_{t,n}$ размерности n ; K-норма в $H_{t,n}$ вводится скалярным произведением $\|\varphi\|_K=(\varphi,\varphi)_K^{1/2}$, где K - положительно-определенная симметричная матрица размера $(n\times n)$.

Будем называть AK -полунормой случайного процесса $x:\Omega\to H_{t,n}$ величину $\left[M_A\|x\|_K^2\right]^{1/2}=\left[\int\limits_A\|x\|_K^2\mu^n(d\omega)\right]^{1/2}$. При $A=\Omega$ она является его нормой.

Система функций $\{a_i\}_1^n$ в пространстве H_ω, являющихся координатами случайного процесса x в базисе $\{\varphi_i\}_1^n$, порождает подпространство $H_{\omega,n}(x)\in H_\omega$. С каждым случайным процессом вида $\Omega\to H_{t,n}$ связываются две системы векторов $\{\varphi_i\}_1^n$ и $\{a_i\}_1^n$ в гильбертовых пространствах H_t и H_ω. Матрица Грама системы векторов $\{a_i\}_1^n$ является корреляционной матрицей случайного процесса x.

Рассмотрим случайную функцию $x:\Omega\to H_{t,n}$.

У т в е р ж д е н и е 1. В пространстве значений $H_{t,n}$ случайной функции x существует ортонормированный базис Φ^0, в котором ее корреляционная матрица имеет диагональный вид.

Д о к а з а т е л ь с т в о этого утверждений аналогично доказательству известной теоремы о приводимости двух симметричных матриц к диагональному виду. Пусть $\Phi=(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ - строка базисных элементов в $H_{t,n}$ и $a=(a_1,\dots,a_n)^T$ - столбец координат функции $x\in H_{t,n}$ в этом базисе, т.е. $x=\Phi a$. Введем матрицы Грама для систем векторов Φ и a:

$$G_\varphi=\Phi^T\Phi\,;\quad G_a=M a a^T.$$

Из тождества $x=\Phi a=\Phi UU^{-1}a=\Phi' a'$ следует, что при преобразовании базиса $\Phi'=\Phi U$ вектор координат преобразуется в вектор $a'=U^{-1}a$. При этом матрицы Грама преобразуются в соответствии с равенствами $G_{\varphi'}=U^T G_\varphi U$; $G_{a'}=U^{-1}G_a U^{-1(T)}$. Существует матрица U, приводящая матрицу $G_{\varphi'}$ к единичной, т.е. $G_{\varphi'}=\mathcal{I}$. Тогда собственная матрица V симметричной матрицы $G_{a'}$ приводит ее к диагональному виду Λ, элементы которой равны собственным значениям матрицы $G_{a'}$. В силу ортогональности собственных векторов симметричной матрицы, матрица V ортогональная, поэтому полученный базис $\Phi^0=\Phi UV$

ортонормирован. Компоненты вектора $a^0=V^{-1}U^{-1}a$ в H_ω являются главными осями корреляционного эллипсоида случайной функции x, а квадраты их длин равны собственным числам матрицы $G_{a'}$.

Пусть $E_{t,r}$ - множество всех подпространств в $H_{t,n}$ размерности $r<n$. Введем ортогональное разложение $x=\mathcal{P}_r x+(\mathcal{I}-\mathcal{P}_r)x$, для которого

$$M\|x\|^2=M\|\mathcal{P}_r x\|^2+M\|(\mathcal{I}-\mathcal{P}_r)x\|^2.$$

Подпространство $H^0_{t,r}$, в котором достигается минимум

$$\min_{H_{t,r}\in E_{t,r}} M\|(\mathcal{I}-\mathcal{P}_r)x\|^2=M\|(\mathcal{I}-\mathcal{P}^0_r)x\|^2,$$

где $\mathcal{P}^0_r$ - проектор в $H^0_{t,r}$, называется <u>подпространством быстрой сходимости</u>.

Утверждение 2. Подпространство быстрой сходимости $H^0_{t,r}$ есть линейная оболочка элементов $\varphi^0_1,\dots,\varphi^0_r$, упорядоченных отношением $\lambda_1\geqslant\dots\geqslant\lambda_r$. В случае кратных собственных значений это подпространство может быть не единственное.

Для доказательства рассмотрим множество проекторов $\mathcal{P}_r$ в подпространстве размерности r. Базисы этих подпространств будем считать ортонормированными. Базис Φ_r подпространства $H_{t,r}$ может быть получен с помощью равенства $\Phi=\Phi^0 C$, где C - матрица $(n\times n)$ ранга n (причем из $\Phi^T\Phi=\mathcal{I}$ следует $C^TC=\mathcal{I}$). Базис подпространства $H_{t,r}$ получим умножением матрицы Φ на диагональную матрицу $\mathcal{I}^{(r)}_n=[1,\dots,1,0,\dots,0]$, содержащую r единиц, т.е. $\Phi_r=\Phi\mathcal{I}^{(r)}_n$. Используя равенство

$$\mathcal{P}_r x=\Phi_r\Phi_r^T\Phi^0a^0=\Phi_r\mathcal{I}^{(r)}_n C^T\Phi^{0(T)}\Phi^0a^0=\Phi_r\mathcal{I}^{(r)}_n C^Ta^0,$$

получим

$$M\|\mathcal{P}_r x\|^2=Sp\,\Lambda C\mathcal{I}^{(r)}_n\Phi_r^T\Phi_r\mathcal{I}^{(r)}_nC^T=Sp\,\Lambda C\mathcal{I}^{(r)}_nC^T.$$

След матрицы $C\mathcal{I}^{(r)}_nC^T$ есть сумма квадратов норм

$$Sp\,C\mathcal{I}^{(r)}_nC^T=\sum_{j=1}^{r}\|c_j\|^2,$$

поэтому

$$Sp\,\Lambda C\mathcal{I}^{(r)}_nC^T=\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{n}c^2_{ij}\lambda_i .$$

Сумма $\sum_{i=1}^{n}c^2_{ij}\lambda_i$ есть среднеарифметическое собственных чисел, так как $\|c_j\|=1\ \forall j\in\{1;r\}$, поэтому

$$\max_{c_1,\dots,c_r\in R^n} M\|\mathcal{P}_r x\|^2=\sum_{j=1}^{r}\lambda_j.$$

Отсюда следует справедливость доказываемого утверждения.

Утверждение 3. Пусть x, V – независимые случайные процессы со значениями в $H_{t,n}$ и $y = x + V$. Оператор B^0, удовлетворяющий условию минимума

$$q^0 = M\|x - B^0 y\|^2 \min_{B \in \mathcal{L}(H_{t,n})} M\|x - By\|^2 \tag{1}$$

в классе линейных операторов $\mathcal{L}(H_{t,n})$, действующих в $H_{t,n}$, является оператором простой структуры.

Доказательство. Введем в $H_{t,n}$ ортонормированный базис $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. Каждый элемент $\varphi_K \in H_{t,n}$ определен значениями n линейно-независимых функционалов. Располагая их в столбец, получим квадратную $(n \times n)$-матрицу Φ; условие ортонормированности базиса имеет вид $\Phi^T \Phi = J$. Используя разложения функций x, y по базису Φ ($x = \Phi a$ и $y = \Phi b$) запишем функционал (1) в виде

$$q = M\|\Phi(a - \Phi^T B \Phi b)\|^2 = M(a - \Phi^T B \Phi b)^T (a - \Phi^T B \Phi b).$$

Из определения метрики в пространстве H_ω следует

$$q = \sum_{i=1}^{n} \|a_i - (\Phi^T B \Phi b)_i\|^2. \tag{2}$$

Задача минимизации функционала (1) сводится к задаче нахождения ближайшего элемента на линейной оболочке $H_{\omega,n}(y)$ элементов $b_1, \dots, b_n \in H_{\omega,n}(y)$ для элементов $a_1, \dots, a_n \in H_\omega$. Оптимальный матричный оператор B^0 удовлетворяет условиям ортогональности $a_i - (\Phi^T B^0 \Phi b)_i \perp H_{\omega,n}(y)$, $i = 1, \dots, n$, или, в матричном виде, $M a b^T = \Phi^T B^0 \Phi M b b^T$. Для невырожденной матрицы $M b b^T$ имеем

$$\Phi^T B^0 \Phi = G_{ab} G_b^{-1} = G_a G_b^{-1}, \tag{3}$$

при $G_{ab} = G_a$. Корреляционная матрица G_a симметрична и положительно определена, поэтому для нее существует симметричная матрица $G_a^{1/2}$. Подстановкой в (3) получим равенство $\Phi^T B^0 \Phi = G_a^{1/2} G_a^{1/2} G_b^{-1} G_a^{1/2} G_a^{-1/2}$, из которого видно, что матрица B^0 подобна симметричной матрице $G_a^{1/2} G_b^{-1} G_a^{1/2}$ и поэтому имеет простую структуру.

Утверждение 4. Собственный базис Ψ оператора B^0 ортонормирован в метрике K^0, определяемой равенством $\Phi^T K^0 \Phi = G_b^{-1}$, и в этом базисе корреляционные матрицы случайных процессов x и y имеют диагональный вид.

Доказательство. Симметричная матрица $G_a^{1/2} G_b^{-1} G_a^{1/2}$ имеет ортогональную собственную матрицу U:

$$G_a^{1/2} G_b^{-1} G_a^{1/2} U = U \Lambda_B .$$

Матрица $\Phi G_a^{1/2} U \Lambda_B^{-1/2}$ является собственной для оператора B^0, так как

$$B^0 \Phi G_a^{1/2} U \Lambda_B^{-1/2} = \Phi G_a^{1/2} (G_a^{1/2} G_b^{-1} G_a^{1/2}) U \Lambda_B^{-1/2} = \Phi G_a^{1/2} U \Lambda_B^{-1/2} \Lambda_B ,$$

поэтому собственный базис оператора B^0 определяется формулой

$$\Psi = \Phi G_a^{1/2} U \Lambda_B^{-1/2}.$$

Матрица Грама системы векторов Ψ в K^0-метрике равна

$$\Psi^T K^0 \Psi = \Lambda_B^{-1/2} U^T G_a^{1/2} \Phi^T K^0 \Phi G_a^{1/2} U \Lambda_B^{-1/2} = J,$$

что доказывает первую часть утверждения.

Отметим, что в G_a^{-1}-метрике матрица Грама собственных элементов оператора B^0 также имеет диагональный вид:

$$\Psi^T G_a^{-1} \Psi = \Lambda_B^{-1} .$$

При переходе от базиса Φ к базису Ψ корреляционные матрицы преобразуются к виду:

$$(G_a^{1/2} U \Lambda_B^{-1/2})^{-1} G_a (G_a^{1/2} U \Lambda_B^{-1/2})^{-1(T)} = \Lambda_B ,$$

$$(G_a^{1/2} U \Lambda_B^{-1/2})^{-1} G_b (G_a^{1/2} U \Lambda_B^{-1/2})^{-1(T)} =$$

$$= (\Lambda_B^{-1/2} U^T G_a^{1/2} G_b^{-1} G_a^{1/2} U \Lambda_B^{-1/2})^{-1} = J,$$

что доказывает вторую часть утверждения.

Система векторов Ψ может быть нормирована различным образом с помощью диагональной матрицы, при этом корреляционные матрицы остаются диагональными. Введем нормировку Λ базисных элементов $\bar{\Psi} = \Psi \Lambda^{1/2}$ такую, что в основной метрике $\forall i \in \{1; n\}$ справедливо $\|\bar{\Psi}_i\| = 1$. Матрица Грама системы векторов Ψ в основной метрике $\Psi^T \Psi = \Lambda_B^{-1/2} U^T G_a U \Lambda_B^{-1/2}$ имеет диагональный i-й элемент:

$$\{\Psi^T \Psi\}_{ii} = \lambda_{Bi}^{-1} u_{\cdot i}^T G_a u_{\cdot i} ,$$

поэтому нормирующая диагональная матрица Λ равна

$$\Lambda = [\lambda_{B1} (u_{\cdot 1}^T G_a u_{\cdot 1})^{-1}, \ldots, \lambda_{Bn} (u_{\cdot n}^T G_a u_{\cdot n})^{-1}].$$

Корреляционные матрицы случайных процессов x и y в базисе $\bar{\Psi}$ остаются диагональными, обозначим их Λ_x и Λ_y. Произведение $\Lambda_x \Lambda_y^{-1}$ есть инвариант при преобразованиях базиса диагональными матрицами, поэтому $\Lambda_x \Lambda_y^{-1} = \Lambda_B$. Отсюда находим собственные значения оптимального разделяющего оператора B^0:

$$\lambda_i = \frac{\|\bar{a}_i\|^2}{\|\bar{b}_i\|^2} = \frac{\|\bar{a}_i\|^2}{\|\bar{a}_i\|^2 + \|\bar{c}_i\|^2} , \quad i \in \{1; n\} , \tag{4}$$

где случайные величины $\bar{a}_i$ и $\bar{b}_i$ определяются разложениями

$$x = \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i \bar{\Psi}_i , \quad y = \sum_{i=1}^{n} \bar{b}_i \bar{\Psi}_i , \quad V = \sum_{i=1}^{n} \bar{c}_i \bar{\Psi}_i$$

в базисе $\bar{\Psi}$.

Из равенств (4) видно, что спектр оператора B^0 принадлежит замкнутому интервалу $\lambda_i \in [0;1]$ и из $\lambda_i = 1$ следует $\|\bar{C}_i\| = 0$. Если $\|\bar{C}_1\| = \ldots = \|\bar{C}_r\| = 0$ и $\|\bar{C}_i\| \neq 0$ при $i > r$, то областью значений случайного процесса V является подпространство $H_{t,n-r}(\bar{\Psi}_{r+1},\ldots,\bar{\Psi}_n)$. Если T_0 - собственное подпространство оператора B^0, соответствующее собственному значению $\lambda = 1$, то разложение $H_{t,n} = T_0 + H_{t,n-r}(V)$ K^0-ортогонально, т.е. $T_0 \perp_{K^0} H_{t,n-r}(V)$.

Утверждение 5. Пусть оператор B^0 имеет собственное значение $\lambda_1 = 1$ кратности r и T_0 - соответствующее собственное подпространство размерности r. Тогда для системы r линейных функционалов $F_r = f_1,\ldots,f_r$, удовлетворяющих условию неравенства нулю определителя $|F_r^T \Psi_r| \neq 0$, существует K^*-метрика в области определения оператора B^0, для которой выполняется равенство $F_r^T \mathcal{P}_{K^*}\Psi = F_r^T B^0 \Psi$, где $\mathcal{P}_{K^*}$ - K^*-ортогональный проектор в подпространство T_0.

Доказательство. Подставляя вместо проектора его общее выражение и используя равенство $B^0\Psi = \Psi\Lambda_B$, получим

$$F_r^T \Psi_r(\Psi_r^T K^* \Psi_r)^{-1}\Psi_r^T K^*\Psi = F_r^T \Psi \Lambda_B . \tag{5}$$

Утверждение справедливо, если в классе $\mathcal{K}$ симметричных неотрицательно-определенных матриц существует матрица K^*, для которой это равенство выполняется. Построим ее. При условиях утверждения имеем равенство

$$\Psi_r^T K^*\Psi = (\Psi_r^T K^*\Psi_r)(F_r^T\Psi_r)^{-1} F_r^T \Psi\Lambda_B . \tag{6}$$

Правую часть прямоугольной матрицы размера $(r \times n)$ запишем в блочном виде:

$$\|C_{11} \vdots C_{12}\| = \|\lambda_1(\Psi_r^T K^*\Psi_r)(F_r^T\Psi_r)^{-1}F_r^T\Psi_r \vdots (\Psi_r^T K^*\Psi_r)(F_r^T\Psi_r)^{-1}F_r^T\Psi_{n-r}\Lambda_B'\|,$$

где $\Psi_{n-r} = \Psi_{r+1},\ldots,\Psi_n$ - строка $n-r$ собственных векторов матрицы B^0, $\Lambda_B' = [\lambda_{r+1},\ldots,\lambda_n]$. Введем матрицу C:

$$C = \left\| \begin{array}{c|c} C_{11} & C_{12} \\ \hline C_{12}^T & C_{22} \end{array} \right\| ,$$

где блок C_{22} - произвольная симметричная неотрицательно-определенная матрица. Блок $C_{11} = \Psi_r^T K^*\Psi_r$ симметричен и положительно определен, так как система векторов Ψ_r ортогональна в основной метрике. Первые блоки в проверяемом равенстве (6) тождественно равны в любой $K > 0$ метрике пространства $H_{t,n}$. Введем симметричную матрицу $Q = \Psi^{-1(T)} C \Psi^{-1}$ и покажем, что в Q - метрике выполняется равенство вторых блоков. Отметим, что $Q \leq 0$, так как $C_{11} > 0$, $C_{22} \geq 0$, поэтому, в силу инерции квадратичных форм, $C \geq 0$, а матрица Q эквивалентна матрице C. Подставляя в левую часть равенства (6) матрицу $Q = K^*$ и учитывая, что столбцы матриц Ψ и Ψ^{-1} образуют биортонормированную систему, получим $\|\mathcal{I}_r \vdots 0\| C = \|C_{11} \vdots C_{12}\|$, т.е. при $Q = K^*$ левая и правая части проверяемого равенства (6) тождественно равны.

Матрица K^*, удовлетворяющая уравнению (6), не единственная в классе $\mathcal{K}$, так как блоки $C_{11} > 0$ и $C_{22} \geq 0$ могут выбираться произвольно в классе симметричных матриц.

Равенство (5) в поэлементной записи имеет вид:

$$f_s \mathcal{P}_{K^*} \Psi_i = f_s(\Psi_i)\lambda_i, \quad s \in \{1, r\}, \quad i \in \{1; n\}.$$

Отсюда видно, что в K^*-метрике пространства $H_{t,n}$ линейный функционал от проекции в T_0 базисного элемента Ψ_i равен значению этого функционала на базисном элементе, уменьшаемом в λ_i раз.

В базисе Φ пространства $H_{t,n}$ случайный процесс x имеет разложение $x = \Phi a$. Элементы случайного вектора $a = (a_1, \ldots, a_n)$ порождают в пространстве случайных величин H_ω подпространство $H_{\omega,n}$. Линейным преобразованием базиса и координат $x = \Phi U U^{-1} a = \Phi' a'$ базис Φ преобразуется в базис Φ', а система случайных величин $\{a_i\}_1^n$ преобразуется в систему $\{a'\}_1^n$. Рассмотрим такие преобразования, которые приводят матрицу Грама системы векторов $\{a'\}_1^n$ к блочно-диагональному виду:

$$G' = \left\| \begin{array}{c|c} G'_r & 0 \\ \hline 0 & G'_{n-r} \end{array} \right\|, \tag{7}$$

$a'^{(r)} = (a'_1, \ldots, a'_r)$, $a'^{(n-r)} = (a'_{r+1}, \ldots, a'_n)$, G_r и G_{n-r} - матрицы Грама случайных векторов $a'^{(r)}$ и $a'^{(n-r)}$. Подпространство $H_{\omega,n} \subset H_\omega$ распадается при этом на ортогональные подпространства $H_{\omega,n} = H_{\omega,r} + H_{\omega,n-r}$ в силу ортогональности их базисов $a'^{(r)} \perp a'^{(n-r)}$. Построение ортогональных базисов произведем следующим образом: берем r векторов $a'^{(r)} = a^{(r)}$ и достраиваем к ним ортогональную систему векторов $a'^{(n-r)} \perp a^{(r)}$. Полученная система векторов $a' = (a_1, \ldots, a_r, a'_{r+1}, \ldots, a'_n)$ имеет блочно-диагональную матрицу Грама. Указанное преобразование может быть выполнено с помощью матриц

$$U = \left\| \begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline C & I_{n-r} \end{array} \right\|; \quad U^{-1} = \left\| \begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline -C & I_{n-r} \end{array} \right\|.$$

Прямоугольная матрица C размера $(n-r) \times r$ находится из условия (7). Имеем

$$G_{a'} = \left\| \begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline -C & I_{n-r} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c|c} G_r & B^T \\ \hline B & G_{n-r} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c|c} I_r & -C^T \\ \hline 0 & I_{n-r} \end{array} \right\|$$

$$= \left\| \begin{array}{c|c} G_r & B^T \\ \hline -CG_r + B & -CB^T + G_{n-r} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c|c} I_r & -C^T \\ \hline 0 & I_{n-r} \end{array} \right\|.$$

Равенство нулевой матрице недиагонального блока $CG_r - B = 0$ определяет матрицу $C = BG_r^{-1}$, а также диагональный блок

$$G'_{n-r} = CG_rC^T - BC^T - CB^T + G_{n-r} = G_{n-r} - BG_r^{(-1)}B^T.$$

Введем ортогональный проектор $\mathcal{P}_{t,r} : H_{t,n} \to H_{t,r}$, который в базисе Φ имеет вид $\mathcal{P}_{t,r}x = \Phi \mathcal{I}_n^{(r)} a$, где $\mathcal{I}_n^{(r)} = [1,\dots,1,0,\dots,0]$ - диагональная матрица ранга r. В базисах Φ и Φ' образы элементов a и a' относительно матрицы проектирования $\mathcal{I}_n^{(r)}$ равны

$$\mathcal{I}_n^{(r)} a' = (a'_1,\dots,a'_r,0,\dots,0) = (a_1,\dots,a_r,0,\dots,0) = \mathcal{I}_n^{(r)} a.$$

При $C \neq 0$ первые r элементов базисов Φ и Φ' не равны, поэтому $\Phi \mathcal{I}_n^{(r)} a \neq \Phi' \mathcal{I}_n^{(r)} a'$.

Утверждение 6. Имеет место неравенство

$$M\|x - \Phi' \mathcal{I}_n^{(r)} a'\|_Q^2 \leq M\|x - \Phi \mathcal{I}_n^{(r)} a\|_Q^2. \qquad (8)$$

Доказательство. Вектор координат элемента $x \in H_{t,n}$ в базисе Φ находится из равенства $x = \Phi a \Rightarrow a = (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T x$, поэтому в базисе Φ' имеем $\Phi' \mathcal{I}_n^{(r)} a' = \Phi(\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T\Phi' \mathcal{I}_n^{(r)} a$. Используем это выражение для преобразования левой части неравенства (8):

$$x = \Phi' \mathcal{I}_n^{(r)} a' = \Phi(a - (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T\Phi' \mathcal{I}_n^{(r)} a') =$$

$$= \Phi(a - U\mathcal{I}_n^{(r)}U^{-1}a). \qquad (9)$$

Запишем следующие преобразования:

$$\mathcal{I}_n - U\mathcal{I}_n^{(r)}U^{-1} = \mathcal{I}_n - \left\|\begin{array}{c|c} \mathcal{I}_r & 0 \\ \hline C & 0 \end{array}\right\| \left\|\begin{array}{c|c} \mathcal{I}_r & 0 \\ \hline -C & \mathcal{I}_{n-r} \end{array}\right\| = \mathcal{I}_n - \left\|\begin{array}{c|c} \mathcal{I}_r & 0 \\ \hline C & 0 \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline -C & \mathcal{I}_{n-r} \end{array}\right\|.$$

Используя полученное равенство, находим матрицу Грама случайного вектора $a - U\mathcal{I}_n^{(r)}U^{-1}a$:

$$\left\|\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline -C & \mathcal{I}_{n-r} \end{array}\right\| \left\|\begin{array}{c|c} G_n^{(r)} & B^T \\ \hline B & G_n^{(n-r)} \end{array}\right\| \left\|\begin{array}{c|c} 0 & -C^T \\ \hline 0 & \mathcal{I}_{n-r} \end{array}\right\| =$$

$$= \left\|\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline -CG_n^{(r)} + B & -CB^T + G_n^{(n-r)} \end{array}\right\| \left\|\begin{array}{c|c} 0 & -C^T \\ \hline 0 & \mathcal{I}_{n-r} \end{array}\right\| =$$

$$= \left\|\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & CG_rC^T - BC^T - CB^T + G_r \end{array}\right\| = G_n^{\prime(n-r)},$$

подстановка которой в правую часть равенства (9) дает

$$M\|x-\Phi' \mathcal{I}_n^{(\tau)} a'\|_Q^2 = Sp(\Phi^T Q \Phi) G_n^{\prime(n-\tau)} . \tag{10}$$

Введем операторы проектирования $\mathcal{P}_{t,\tau} x = \Phi \mathcal{I}_n^{(\tau)}$ и $\mathcal{P}'_{t,\tau} x = \Phi' \mathcal{I}_n^{\prime(\tau)} a'$ и запишем ортогональное разложение

$$x-\mathcal{P}_{t,\tau} x = \mathcal{P}'_{t,\tau}(x-\mathcal{P}_{t,\tau} x)+(\mathcal{I}-\mathcal{P}'_{t,\tau})(x-\mathcal{P}_{t,\tau} x) =$$
$$=(x-\mathcal{P}'_{t,\tau} x)+(\mathcal{P}'_{t,\tau} x-\mathcal{P}_{t,\tau} x).$$

Случайные процессы в правой части равенства порождают ортогональные подпространства $H_{\omega, n-\tau}$ и $H_{\omega,\tau}$, в силу ортогональности случайных векторов $a^{\prime(n-\tau)} \perp a^{(\tau)}$, поэтому корреляционная матрица G_1 случайного процесса $x-\mathcal{P}_{t,\tau} x$ равна сумме корреляционных матриц $G_1 = G_n^{\prime(n-\tau)} + G_2$, где

$$G_2 = \left\|\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & C G_\tau C^T \end{array}\right\| .$$

Подстановкой в правую часть неравенства (8) получим

$$M\|x-\Phi \mathcal{I}_n^{(\tau)} a\|_Q^2 = Sp(\Phi^T Q \Phi) G_n^{\prime(n-\tau)} + Sp(\Phi^T Q \Phi) G_2 . \tag{11}$$

Здесь второе слагаемое есть след произведения неотрицательно-определенных симметричных матриц, поэтому (10) и (11) дают неравенство (8).

Рассмотрим сумму независимых случайных процессов $y = x + V$. Пусть в базисе Φ корреляционная матрица G_x случайного процесса x имеет вид

$$G_x = \left\|\begin{array}{c|c} G_{x\tau} & B_x^T \\ \hline B_x & G_{x(n-\tau)} \end{array}\right\| ,$$

а G_V имеет диагональный вид $G_V = [G_{V\tau}, G_{V(n-\tau)}]$. Тогда корреляционная матрица G_y равна

$$G_y = \left\|\begin{array}{c|c} G_{x\tau} + G_{V\tau} & B_x^T \\ \hline B_x & G_{x(n-\tau)} + G_{V(n-\tau)} \end{array}\right\|$$

и преобразование U, приводящее матрицу G_y к блочно-диагональному виду, равно

$$U = \left\|\begin{array}{c|c} \mathcal{I}_\tau & 0 \\ \hline G_y & \mathcal{I}_{n-\tau} \end{array}\right\| ,$$

где прямоугольная матрица C_y удовлетворяет равенству

$$C_y = B G_{y\tau}^{-1} = B(G_{x\tau} + G_{V\tau})^{-1} .$$

Сравнивая это равенство с $C_x = B G_{x\tau}^{-1}$, получим $C_x = C_y(\mathcal{I} + G_{V\tau} G_{x\tau}^{-1})$.

Отсюда видно, что базисы

$$\Phi'_x = \Phi \left\| \begin{array}{c|c} J_r & 0 \\ \hline C_x & J_{n-r} \end{array} \right\| \quad \text{и} \quad \Phi'_y = \Phi \left\| \begin{array}{c|c} J_r & 0 \\ \hline C_y & J_{n-r} \end{array} \right\|,$$

в которых матрицы G_x и G_y имеют блочно-диагональный вид, при рассмотренных условиях различны.

При дополнительном условии $G_{Vr}=0$ матрицы C_x и C_y равны $C_x = C_y$. Случайный процесс V', удовлетворяющий этому условию, получается из исходного V приравниваем нулю значений функционалов $d_1, \dots, d_r$ в разложении $V=\Phi d$, т.е. $V' = \sum_{i=r+1}^{n} d_i \varphi_i$. Случайный процесс $y' = x + V'$ при этом имеет разложение

$$y' = \sum_{i=1}^{r} a_i \varphi_i + \sum_{i=r+1}^{n} (a_i + d_i)\varphi_i .$$

Матрица C_x и, следовательно, базис Φ', в котором матрица G_x имеет блочно-диагональный вид, получаются из условия достижения нижней границы

$$\min M\| y' - \Phi' J_n^{(r)}(a+d')\|_Q^2 ,$$

где $d' = (0, \dots, 0, d_{r+1}, \dots, d_n)$.

Введем случайный процесс u: значения первых r функционалов $u_1, \dots, u_r$ в базисе Φ равны оценкам функционалов $a_1, \dots, a_r$ случайного процесса x в этом же базисе, т.е. $u_1 = \hat{a}_1, \dots, u_r = \hat{a}_r$, а значения остальных функционалов определяются равенствами $u_{r+1} = a_{r+1} + d_{r+1}, \dots, u_n = a_n + d_n$

Корреляционная матрица случайного процесса u имеет вид

$$G_u = \left\| \begin{array}{c|c} G_{ur} & B_u^T \\ \hline B_u & G_{u\,(n-r)} \end{array} \right\| .$$

Значения случайного процесса u при заданных значениях случайного процесса y определены. Блок C_u матрицы U_u, приводящей корреляционную матрицу G_u к блочно-диагональному виду, находится из условия достижения нижней границы $\min M\|u - \Phi'_u J_n^{(r)} u\|_Q^2$, где $\Phi'_u = \Phi U_u$. Базис Φ'_u может быть использован в качестве приближения базиса Φ'_x. Ошибка приближения обусловлена тем, что случайные величины $a_1, \dots, a_r$ и $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_r$ не равны. Блок C_u равен $C_u = B_u G_{ur}^{-1}$, и разность базисных элементов $\Phi'_u - \Phi'_x$ определяется соотношением

$$\Phi'_u - \Phi'_x = \Phi(U_u - U_x) = \Phi \left\| \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline B_u G_{ur}^{-1} - B G_{xr}^{-1} & 0 \end{array} \right\| .$$

Полученное соотношение используется для оценки погрешности приближения элементов базиса Φ'_x элементами базиса Φ'_u.

Поступила в ред.-изд.отдел

23 марта 1982 г.