Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1984 г., вып. 24.

УДК 518.733.431

К ТЕОРИИ ДВУМЕРНЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР УБЕГАНИЯ

Н.Ю.Сатимов

1. Рассматривается задача убегания (см. [1-3]) для квазилинейной дифференциальной игры

$$\dot{y} = Cy + f(u,v), \tag{1}$$

где $y \in R^2$, C - постоянная матрица, u - управляющий параметр преследования, v - управляющий параметр убегания, $u \in P \subset R^p$, $v \in Q \subset R^q$, P и Q - непустые компактные множества, $f : P \times Q \to R^2$ - непрерывная функция, терминальное множество $M = \{m\}$, $m \in R^2$.

В настоящей работе для игры (1) получено достаточное условие убегания, которое не вытекает из известных результатов (см., например, [1, 3-9]). Приведен иллюстрирующий пример. В конце работы полученный результат переносится на один класс нелинейных дифференциальных игр.

2. Введем некоторые обозначения, сформулируем предположения и основной результат.

В (1) от переменного y перейдем к переменному z по формуле $y = z + m$. Получим дифференциальную игру

$$\dot{z} = Cz + f(u,v) + a', \tag{2}$$

где $a' = Cm$. Терминальным множеством для игры (2) будет начало координат плоскости R^2: $M = \{0\}$. Предполагается, что множество

$$R = \bigcap_{u \in P} f(u,Q) \neq \emptyset. \tag{3}$$

Пусть a'' - произвольная точка множества R. Через $g(u,v)$ обозначим функцию $f(u,v) - a''$. Ясно, что

$$R_1 = \bigcap_{u \in P} g(u,Q) \ni 0.$$

Введем в рассмотрение дифференциальную игру

$$\dot{z} = Cz + g(u,v) + a, \tag{4}$$

где $a = a' + a''$, терминальное множество $M = \{0\}$. Разумеется, с точки зрения задачи убегания игры (1) и (4) эквивалентны. Поэтому в дальнейшем изучается лишь игра (4).

Легко видеть, что в случае, когда в (4) $a=0$, в игре (4) возможно убегание. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что если $z_0 \neq 0$ и каждое значение $v(t)$ параметра v выбирать как наименьшее в лексикографическом смысле решение уравнения (см. [3])

$$g(u(t), v)=0, \quad v\in Q, \tag{5}$$

где значения $u(t)$, $0\leq t<\infty$, $u(t)\in P$, параметра u образуют измеримую функцию, то траектория $z=z(t)$, $0\leq t<\infty$, уравнения

$$\dot z = Cz, \quad z(0)=z_0, \tag{6}$$

полученного из (4) с учетом равенств $g(u(t), v(t))=0, a=0$, ни при каком значении времени t, $0<t<\infty$, не попадет в точку 0 (ибо точка 0, очевидно, является точкой покоя уравнения (6)).

С учетом сказанного выше остается рассмотреть лишь случай, когда в (5)

$$a\neq 0. \tag{7}$$

Пусть a_1, a_2 - компоненты вектора a, ψ - вектор с компонентами $-a_2, a_1$ $(\psi, g(u,v))$ - скалярное произведение векторов ψ и $g(u,v)$,

$$N=\min_{u\in P}\max_{v\in Q}|(\psi, g(u,v))|.$$

Т е о р е м а. Если выполнены условия (3), (7) и число $N>0$, то в игре (4) возможно убегание.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Через $z=\varphi(t)$, $-\infty<t<\infty$, обозначим решение уравнения

$$\dot z = Cz + a, \tag{8}$$

проходящее при $t=0$ через току 0: $\varphi(0)=0$; через L обозначим кривую $\{\varphi(t): -\infty<t<\infty\}$, а через L_1 - кривую $\{\varphi(t): -\infty<t\leq 0\}$.

Для произвольного начального положения $z_0\neq 0$ фазовой точки z, очевидно, возможны лишь следующие два случая: 1) $z_0 \bar\in L_1$; 2) $z_0\in L_1$.

Пусть $z_0\bar\in L_1$. В этом случае каждое значение $v(t)$ параметра v предлагается выбирать как наименьшее в лексикографическом смысле решение уравнения (5). Тогда полученная функция $v(t)$, $0\leq t<\infty$, будет измеримой (см. [3]). Решение же полученного в результате такого выбора уравнения (8), проходящее через точку z_0 при $t=0$, ни при каком значении времени t, $0<t<\infty$, не попадает в точку 0. В противном случае через точку 0 проходят две траектории, что противоречит теореме единственности траекторий автономных дифференциальных уравнений.

Следовательно, из начального положения $z_0\bar\in L_1$ возможно уклонение от встречи.

Пусть теперь $z_0 \in L_1$. Так как $a \neq 0$ (см. (7)), то одна из компонент a_1, a_2 вектора a отлична от нуля. Пусть для определенности $a_1 \neq 0$ (в случае, когда $a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$, рассуждения проводятся аналогично). Имеем $\dot{\varphi}_1(0) = a_1 \neq 0$ (см. (8)). Поэтому уравнение $z_1 = \varphi_1(t)$ относительно переменного t допускает решение

$$t = \psi(z_1), \quad -\delta \le z_1 \le \delta,$$

где δ – некоторое положительное число. Следовательно,

$$z_2 = \varphi_2(t) = \varphi_2(\psi(z_1)) = h(z_1), \ -\delta \le z_1 \le \delta,$$

т.е. $z_2 = h(z_1), -\delta \le z_1 \le \delta$, – уравнение кривой L в окрестности точки 0, а $z_2 = h(z_1), -\delta \le z_1 \le 0$ (в случае $a_1 > 0$) – уравнение кривой L_1 в окрестности 0 ($z_2 = h(z_1), 0 \le z_1 \le \delta$, при $a_1 < 0$). Нетрудно показать, что $h(z_1), -\delta \le z_1 \le 0$ – бесконечно дифференцируемая функция. Элементарные вычисления показывают, что $h'(0) = a_2 / a_1$. В силу непрерывности функции $h'(z_1)$, $-\delta \le z_1 \le 0$, можно найти число $\delta_1 \in (0, \delta]$ такое, что при всех $z_1 \in [-\delta_1, 0]$ справедливо

$$\left| h'(z_1) - \frac{a_2}{a_1} \right| \le \frac{N}{2|a_1| N_1}, \quad \max_{i, u \in P, v \in Q} |g_i(u,v)| = N_1 . \qquad (9)$$

В дальнейшем функция $h(z_1)$, $-\delta \le z_1 \le 0$, рассматривается на отрезке $[-\delta_1, 0]$. Пусть

$$z' = \left(-\frac{\delta_1}{2}, h\left(-\frac{\delta_1}{2}\right)\right), \quad z'' = (-\delta_1, h(-\delta_1)).$$

Нетрудно убедиться, что существует число $\tau > 0$ такое, что фазовая точка z, выходящая из точки z' при $t = 0$ и движущаяся в соответствии с уравнением $\dot{z} = Cz + g(u_0(t), v_0(t)) + a$, где $u_0(t)$ и $v_0(t)$ – произвольные функции, определенные и измеримые на $[0, \infty)$, $u_0(t) \in P$, $v_0(t) \in Q$, на отрезке $[0, \tau]$ не может совпасть ни с одной из точек z'', 0.

Предположим, что $\varphi(t_1) = z_0$, $\varphi(t_2) = z'$, $T = t_2 - t_1$. Ясно, что уменьшив δ_1, если это необходимо, можно считать $T > 0$.

Используя числа δ_1, τ, T, можно управлять параметром v следующим образом. Для каждого $t \in [0, T]$ значение $\bar{v}(t)$ выбирается как наименьшее в лексикографическом смысле решение уравнения (5). Тогда фазовая точка z будет двигаться по кривой L_1, при $t = T$ достигнет точки z', не попадая при этом в точку 0. Начиная с момента $t = T$, каждое значение $\bar{v}(t)$ для $t \in [T, T + \tau]$ до некоторого момента $T_1 \in [T, T + \tau]$, который будет указан ниже, выбирается как наименьшее в лексикографическом смысле решение уравнения

$$|(\psi, g(u(t), v))| = N(u(t)), \quad v \in Q, \qquad (10)$$

где $N(u) = \max\limits_{v \in Q} |(\psi, g(u,v))|$. Как отмечено в [4], функция $N(u)$, $u \in P$, непрерывная. Поэтому полученная функция $\bar{v}(t)$, $0 \le t < \infty$, будет измеримой (см. [3]). Далее, очевидно, что

$$N(u(t)) \geqslant \min_{u \in P} \max_{v \in Q} |(\psi, g(u,v))| = N. \tag{11}$$

Пусть $z = z(t)$, $T \le t \le T + \tau$, – решение уравнения

$$\dot{z} = Cz + g(u(t), \bar{v}(t)) + a, \quad z(T) = z'. \tag{12}$$

Как указано выше, кривая $\{z(t) : T \le t \le T + \tau\}$ не переходит через точки z'', 0. Утверждается, что найдется момент времени $T_1 \in [T, T+\tau]$ такой, что $z(T_1) \bar{\in} L_1$. В противном случае $z(t) \in L_1$ на $[T, T+\tau]$, т.е. $z_2(t) = h(z_1(t))$ для всех $t \in [T, T+\tau]$. Следовательно,

$$\dot{z}_2(t) = h'(z_1(t)) \cdot \dot{z}_1(t) \tag{13}$$

для почти всех t из отрезка $[T, T+\tau]$. Для каждого из этих значений t на основании (12), (13) имеем

$$C_{21} z_1(t) + C_{22} z_2(t) + g_2(t) + a_2 =$$

$$= h'(z_1(t)) \cdot [C_{11} z_1(t) + C_{12} z_2(t) + g_1(t) + a_1], \tag{14}$$

где через C_{ij} обозначены элементы матрицы C, через $g_1(t), g_2(t)$ – компоненты вектора $g(u(t), \bar{v}(t))$. Кривая $z_2 = h(z_1), -\delta_1 \le z_1 \le 0$, является частью кривой L_1. Поэтому существует число $s = s(t)$ такое, что $z(t) = \varphi(s)$. Следовательно (см. (14)),

$$C_{21} \varphi_1(s) + C_{22} \varphi_2(s) + g_2(t) + a_2 =$$

$$= h'(\varphi_1(s))[C_{11} \varphi_1(s) + C_{12} \varphi_2(s) + g_1(t) + a_1]. \tag{15}$$

Так как, очевидно, $\varphi_2(s) = h(\varphi_1(s))$, то $\dot{\varphi}_2(s) = h'(\varphi_1(s) \cdot \dot{\varphi}_1(s))$, т.е. $C_{21} \varphi_1(s) + C_{22} \varphi_2(s) + a_2 = h'(\varphi_1(s)) \cdot [C_{11} \varphi_1(s) + C_{12} \varphi_2(s) + a_1]$. Значит, $g_2(t) = h'(\varphi_1(s)) \cdot g_1(t)$ (см. (15)). С учетом этого равенства имеем

$$g_2(t) = \frac{a_2}{a_1} g_1(t) + \left[h'(\varphi_1(s)) - \frac{a_2}{a_1}\right] g_1(t). \tag{16}$$

Поэтому (см. (16)) $-a_2 g_1(t) + a_1 g_2(t) = (\psi, g(u(t), \bar{v}(t))) = \left[h' \varphi_1(s) - \frac{a_2}{a_1}\right] a_1 g_1(t)$. Так как $-\delta_1 \le \varphi_1(s) \le 0$, то (см. (9), (10), (16))

$$N(u(t)) = |(\psi, g(u(t), \bar{v}(t)))| = \left|h'(\varphi_1(s)) - \frac{a_2}{a_1}\right| |a_1 g_1(t)| \le$$

$$\leq \frac{N|a_1 g_1(t)|}{2|a_1| N_1} \leq \frac{N}{2},$$

что противоречит неравенству (11).

Таким образом, найдется момент времени $T_1 \in [T, T+\tau]$, для которого $z(T_1) \bar{\in} L_1$. Начиная с момента времени $t = T_1$, параметром v управляем так же, как и в случае 1. Тогда фазовая точка z, выходящая при $t = T_1$ из точки $z(T_1) \bar{\in} L_1$, ни при каком значении времени t, $T_1 < t < \infty$, не попадет в точку O. То, что точка z, вышедшая при $t = 0$ из точки $z_0 \in L_1$, не попадет в точку O при всех $t \in [0, T]$, показано выше. Следовательно, и в случае 2) фазовая точка z при всех значениях времени t, $0 < t < \infty$, не попадает в точку O.

Теорема доказана полностью.

3. П р и м е р. Пусть в (4) C - произвольная матрица, $f(u,v) = -u + v$, $P = \rho S$, $Q = \sigma S, \sigma \geq \rho$, $\sigma > 0$, S - единичный круг с центром в точке O, $a \neq 0$. Покажем, что для этого примера выполнены все условия теоремы п. 2. Действительно, имеем $\bigcap\limits_{u \in P} (Q - u) = (\sigma - \rho) S \ni 0$, $a \neq 0$ (см. (7)). Далее, пусть u - произвольная точка P. Возможны два случая: 1) $(\psi, -u) \leq 0$; 2) $(\psi, -u) > 0$. В первом случае выберем $v = \sigma\psi/|\psi|$. Тогда $|(\psi, -u + v)| = (\psi, -u) + \sigma|\psi| \geq \sigma|\psi| > 0$, ибо $|\psi| = |a| > 0$. Во втором случае положим $v = -\sigma\psi/|\psi|$. Тогда $|(\psi, -u + v)| = |(\psi, -u)| + \sigma|\psi| \geq \sigma|\psi|$. Следовательно, для любого $u \in P$ имеем

$$\max_{v \in Q} |(\psi, -u + v)| \geq \sigma|\psi|. \tag{17}$$

С другой стороны, если u ортогонален вектору ψ, то в (17) имеет место равенство. Значит,

$$N = \min_{u \in P} \max_{v \in Q} |(\psi, -u + v)| = \sigma \cdot |\psi| > 0.$$

Таким образом, для рассматриваемого примера выполнены все условия теоремы п.2. С другой стороны, отметим, что при $\sigma = \rho$ для этого примера не выполнено ни одно из известных условий убегания.

4. Обобщение теоремы п.2. Рассмотрим дифференциальную игру

$$\dot{z} = F(z) + g(u, v) + a, \tag{18}$$

где $z \in R^2$, $F(z)$ - вектор-функция, определенная, непрерывная и непрерывно дифференцируемая при всех $z \in R^2$, функция $g(u,v)$, $u \in P$, $v \in Q$,

такая же, как и в п.2, $a \neq 0$, $M = \{0\}$. Дополнительно предполагается, что

$$F(0) = 0, \quad |F(z)| \leq K(1+|z|).$$

для всех $z \in R^2$, где $K \geq 0$ - константа.

Почти дословным повторением рассуждений, примененных при доказательстве теоремы п.2, можно показать, что в игре (18) возможно убегание.

Поступила в ред.-изд.отдел
17 февраля 1984 г.

Литература

1. Понтрягин Л.С. Линейная дифференциальная игра убегания.- Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1971, т.112, с. 30-63.

2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. - М.: Наука, 1974. - 456 с.

3. Мищенко Е.Ф., Сатимов Н.Ю. Задача об уклонении от встречи в дифференциальных играх с нелинейными управлениями. - Дифференц. уравнения, 1973, т.9, № 10, с. 1792-1797.

4. Сатимов Н.Ю. Об одном способе уклонения от встречи. - Мат.сб.,1976, т.99, № 3, с. 380-393.

5. Сатимов Н.Ю., Рихсиев Б.Б. О квазилинейных дифференциальных играх убегания. - Дифференц. уравнения, 1978, т.14, № 6, с. 1046-1052.

6. Остапенко В.В. О нелинейной задаче убегания. - Кибернетика, 1978, № 4, с. 106-112.

7. Пацко В.С. Условия уклонения от точки в дифференциальной игре второго порядка. - Прикл. математика и механика, 1972, т.36, № 6, с. 1007-1014.

8. Сатимов Н.Ю., Рихсиев Б.Б. К полному исследованию обобщенного контрольного примера Л.С.Понтрягина.- Дифференц. уравнения, 1979, т.15, № 3, с. 436-443.

9. Мищенко Е.Ф., Сатимов Н.Ю. Задача уклонения от встречи в критическом случае. - Дифференц. уравнения, 1983, т.19, № 2, с. 220-229.