Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1984 г., вып. 24.

УДК 517.977.52

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА СОСТОЯНИЕ

В.А.Срочко

§ 1. Постановка задачи. Некоторые оценки

Пусть в прямоугольнике $P=S\times T$, $S=[s_0,s_1]$, $T=[t_0,t_1]$, управляемый процесс моделируется с помощью системы уравнений в частных производных

$$x_s^{(1)}=f^{(1)}(x^{(1)},x^{(2)},u(s,t),s,t),\quad x_t^{(2)}=f^{(2)}(x^{(1)},x^{(2)},u(s,t),s,t) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$x^{(1)}(s_0,t)=g^{(1)}(u^{(1)}(t),t),\quad x^{(2)}(s,t_0)=g^{(2)}(u^{(2)}(s),s). \tag{2}$$

Здесь $(u(s,t),u^{(1)}(t),u^{(2)}(s))$, $u\in E_{r}$, $u^{(1)}\in E_{r_1}$, $u^{(2)}\in E_{r_2}$ – набор управляющих воздействий, переменные $x^{(1)}(s,t),x^{(2)}(s,t),x^{(1)}\in E_{n_1},x^{(2)}\in E_{n_2}$ характеризуют состояние процесса в рассматриваемой области $(s,t)\in P$. Предположим, что правые части $f^{(1)}$, $f^{(2)}$ системы (1) непрерывны по совокупности $(x^{(1)},x^{(2)},u,s,t)$ своих аргументов вместе с частными производными по $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, вектор-функции $g^{(1)}(u^{(1)},t)$, $g^{(2)}(u^{(2)},s)$, определяющие начальные условия (2), непрерывны по $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ и кусочно-непрерывны по t, s соответственно.

Введем обычные требования на управляющие переменные

$$u(s,t)\in U,\ u^{(1)}(t)\in U_1,\ u^{(2)}(s)\in U_2,\quad s\in S,\ t\in T, \tag{3}$$

считая множества U, U_1, U_2 ограниченными. Допустимым управлением будем называть набор $w=(u(s,t),u^{(1)}(t),u^{(2)}(s))$ кусочно-непрерывных на P вектор-функций, удовлетворяющих условиям (3). Предположим, что каждое допустимое управление w порождает единственное решение $x^{(1)}(s,t),x^{(2)}(s,t)$ системы (1), (2), определенное на прямоугольнике P. Отметим, что согласно начальным условиям (2) и уравнениям (1) вектор-функция $x^{(1)}(s,t)$ $(x^{(2)}(s,t))$ для каждого $s\in S$ $(t\in T)$ кусочно-непрерывна по $t\in T$ $(s\in S)$.

На множестве W допустимых управлений определим совокупность функционалов

$$\Phi_i(w)=\int_{t_0}^{t_1}\varphi_i^{(1)}(x^{(1)}(s_1,t),t)\,dt+\int_{s_0}^{s_1}\varphi_i^{(2)}(x^{(2)}(s,t_1),s)\,ds,$$
$$i=0,\dots,N$$

в условиях дифференцируемости подынтегральных функций по $x^{(1)}, x^{(2)}$ соответственно. Поставим задачу оптимального управления:

$$\Phi_0(w) \to min, \quad w \in W, \tag{4}$$

при функциональных ограничениях типа неравенства на конечное состояние процесса

$$\Phi_i(w) \le 0, \quad i = 1, \dots, N. \tag{5}$$

Наша цель состоит в выводе необходимых условий оптимальности. Как известно, наиболее сильные результаты получаются здесь с помощью вариаций управления линейчатого типа, которые отличны от нуля в прямоугольной окрестности одной из характеристик системы (1). Такие вариации использовались в [1, 2] для изучения задачи (4) без ограничений (5). Результаты для случая ограничений типа равенства $(\Phi_i(w) = 0)$ получены в [3] как следствие общего принципа максимума в банаховом пространстве. В [4] задача (4), (5) исследована традиционным путем с помощью конусов вариаций игольчатого типа. В настоящей работе аналогичная техника развивается на уровне вариаций управления линейчатого типа. Предварительно изучается реакция системы и функционалов на пакет линейчатых вариаций. Методика вывода не использует специальных формул приращения функционалов и связана с непосредственным выделением и обработкой главных членов соответствующих приращений. Результаты представляются в форме условия максимума некоторого функционала в обыкновенной задаче оптимального управления.

Пусть w – допустимое управление, Δw – некоторая его вариация. Соответствующее приращение $(\Delta x^{(1)}, \Delta x^{(2)})$ состояния определяется соотношениями:

$$\Delta x_s^{(1)} = \Delta f^{(1)}(x^{(1)}, x^{(2)}, u, s, t), \quad \Delta x_t^{(2)} = \Delta f^{(2)}(x^{(1)}, x^{(2)}, u, s, t),$$

$$\Delta x^{(1)}(s_0, t) = \Delta g^{(1)}(u^{(1)}, t), \quad \Delta x^{(2)}(s, t_0) = \Delta g^{(2)}(u^{(2)}, s),$$

где приращения вектор-функций в правых частях берутся по всем аргументам, за исключением s, t. При этом имеют место следующие оценки [5]:

$$\|\Delta x^{(1)}(s,t)\| \le C\Big(\|\Delta g^{(1)}[t]\| + \int_{t_0}^{t_1}\|\Delta g^{(1)}[t]\|\,dt + \int_{s_0}^{s_1}\|\Delta g^{(2)}[s]\|\,ds +$$
$$+ \int_{s_0}^{s_1}\|\Delta_u f^{(1)}[s,t]\|\,ds + \int_{s_0}^{s_1}\int_{t_0}^{t_1}\|\Delta_u f[s,t]\|\,dt\,ds\Big), \tag{6}$$

$$\|\Delta x^{(2)}(s,t)\| \le C\Big(\|\Delta g^{(2)}[s]\| + \int_{s_0}^{s_1}\|\Delta g^{(2)}[s]\|\,ds + \int_{t_0}^{t_1}\|\Delta g^{(1)}[t]\|\,dt +$$
$$+ \int_{t_0}^{t_1}\|\Delta_u f^{(2)}[s,t]\|\,dt + \int_{s_0}^{s_1}\int_{t_0}^{t_1}\|\Delta_u f[s,t]\|\,dt\,ds\Big). \tag{7}$$

Здесь $\|\cdot\|$ – сумма модулей компонент, $(s,t)\overset{\circ}{\in} P$ ($\overset{\circ}{\in}$ – включение почти всюду), $C=const$, $f=(f^{(1)}, f^{(2)})$, символ Δ_u есть частное приращение по управлению u, квадратные скобки для аргументов означают полный подсчет вектор-функции в соответствующей точке.

§ 2. Приращение функционала на пакете вариаций

Пусть $w=(u(s,t), u^{(1)}(t), u^{(2)}(s))$, $s\in S$, $t\in T$ – допустимое управление. Определим пакет линейчатых вариаций для пары $(u(s,t), u^{(1)}(t))$. Пусть $(\tau_1,\ldots,\tau_m)$ – набор точек отрезка T с условием $t_0<\tau_1\leq\ldots\leq\tau_m<t_1$; $(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$ – набор положительных чисел; $\varepsilon>0$ – малый параметр. Каждой точке τ_k поставим в соответствие крайние индексы совпадающих с ней точек набора

$$i(k)=\min\{i\in(1,\ldots,k):\tau_i=\tau_k\},\ j(k)=\max\{j\in(k,\ldots,m):\tau_j=\tau_k\}.$$

Введем числа

$$\beta_k=\alpha_{i(k)}+\alpha_{i(k)+1}+\ldots+\alpha_k,\quad \gamma_k=\alpha_k+\alpha_{k+1}+\ldots+\alpha_{j(k)}$$

и образуем промежутки варьирования

$$T_k(\varepsilon)=(\tau_k-\gamma_k\varepsilon,\ \tau_k-(\gamma_k-\alpha_k)\varepsilon],\quad k=1,\ldots,m.$$

Отметим, что $mes\, T_k(\varepsilon)=\alpha_k\varepsilon$. Будем рассматривать такие значения $\varepsilon>0$, для которых выполняются условия $T_k(\varepsilon)\subset T$, $T_k(\varepsilon)\cap T_{k+1}(\varepsilon)=\emptyset$.

Выберем векторы $v_k^{(1)}\in U_1$, кусочно-непрерывные вектор-функции $v_k(s)\in U$, $s\in S$, и определим составляющие вариации пакета по формулам

$$(\Delta^k u(s,t), \Delta^k u^{(1)}(t))=\begin{cases}(v_k(s)-u(s,t),\ v_k^{(1)}-u^{(1)}(t)), & t\in T_k(\varepsilon)\\ (0,0), & t\in T\setminus T_k(\varepsilon).\end{cases}$$

Пакет вариаций образуем как сумму составляющих

$$(\Delta u(s,t), \Delta u^{(1)}(t))=\Big(\sum_{k=1}^{m}\Delta^k u(s,t),\ \sum_{k=1}^{m}\Delta^k u^{(1)}(t)\Big),\ s\in S,\ t\in T. \quad (8)$$

Отметим, что вариация (8) порождает допустимое управление.

Выделим индексное множество $K=\{k\in(1,\ldots,m): j(k)=k\}$ и пусть $K=\{k_1,\ldots,k_p\}$. Обозначим $\theta_\ell=\tau_{k_\ell}$, $q_\ell=\beta_{k_\ell}$, $\ell=1,\ldots,p$, введем промежутки $T_0=[t_0, \theta_1-q_1\varepsilon]$; $T_\ell=(\theta_\ell, \theta_{\ell+1}-q_{\ell+1}\varepsilon]$, $\ell=1,\ldots,p-1$; $T_p=(\theta_p, t_1]$ и пусть T_Δ – их объединение: $T_\Delta=T_0\cup T_1\cup\ldots\cup T_p$. Для пояснения отметим, что θ_ℓ, $\ell=1,\ldots,p$, – это не совпадающие точки набора $\{\tau_k\}$: $t_0<\theta_1<\ldots<\theta_p<t_1$. T_Δ – область нулевого варьирования:

$$T_\Delta = T \setminus \bigcup_{k=1}^{m} T_k(\varepsilon), \quad \bigcup_{k=1}^{m} T_k(\varepsilon) = \bigcup_{\ell=1}^{p} (\theta_\ell - q_\ell \varepsilon, \theta_\ell] .$$

Изучим воздействие пакета (8) на состояние управляемого процесса (1), (2). Начальные возмущения имеют вид

$$\Delta x^{(1)}(s_0,t) = \begin{cases} 0, & t \in T_\Delta \\ \Delta g^{(1)}[t], & t \in T_k(\varepsilon), k=1,\dots,m \end{cases}, \quad \Delta x^{(2)}(s,t_0) = 0, \quad s \in S .$$

Далее, на основании оценок (6), (7) сделаем заключение о порядке приращений $\Delta x^{(1)}(s,t)$, $\Delta x^{(2)}(s,t)$ относительно параметра ε :

$$\|\Delta x^{(1)}(s,t)\| \sim \begin{cases} \varepsilon, & t \in T_\Delta \\ 1, & t \in T \setminus T_\Delta \end{cases}, \quad \|\Delta x^{(2)}(s,t)\| \sim \varepsilon, \quad t \in T .$$

Подчеркнем, что величина $\|\Delta x^{(1)}(s,t)\|$ имеет нулевой порядок малости ($\|\Delta x^{(1)}(s,t)\| \not\to 0$ при $\varepsilon \to 0$) на участках $T_k(\varepsilon)$ ненулевого варьирования управления.

Проведем описание главных членов приращений $\Delta x^{(1)}(s,t)$, $\Delta x^{(2)}(s,t)$, $s \in S$, $t \in T$. Пусть $t \in T_\Delta$. В этой области приращения $\Delta x^{(1)}, \Delta x^{(2)}$ имеют порядок ε. Поэтому, полагая

$$\Delta x^{(i)}(s,t) = \delta x^{(i)}(s,t)\varepsilon + o(\varepsilon), \quad i = 1,2, \tag{9}$$

и используя уравнения для $\Delta x^{(i)}(s,t)$, получаем линейную систему в вариациях [1, 6]

$$\begin{aligned} \delta x_s^{(1)} &= f^{(1)}_{x^{(1)}}[s,t]\,\delta x^{(1)} + f^{(1)}_{x^{(2)}}[s,t]\,\delta x^{(2)}, \\ \delta x_t^{(2)} &= f^{(2)}_{x^{(1)}}[s,t]\,\delta x^{(1)} + f^{(2)}_{x^{(2)}}[s,t]\,\delta x^{(2)} \end{aligned} \tag{10}$$

с начальным условием

$$\delta x^{(1)}(s_0,t) = 0 \tag{11}$$

Отметим, что для $t \in T_0$ $\Delta x^{(1)}(s,t) = \Delta x^{(2)}(s,t) = 0$.

Пусть $t \in T_k(\varepsilon)$. Здесь $\|\Delta x^{(1)}(s,t)\| = O(1)$, поэтому допустимо представление $\Delta x^{(1)}(s,t) = \delta x^{(1)}(s,t) + O(\varepsilon)$. При этом вариации $\delta x^{(1)}(s,t)$ в соответствии с уравнением для $\Delta x^{(1)}(s,t)$ определяется условиями [1, 2]:

$$\delta x_s^{(1)} = f^{(1)}(x^{(1)} + \delta x^{(1)}, x^{(2)}, v_k, s, t) - f^{(1)}(x^{(1)}, x^{(2)}, u, s, t), \quad \delta x^{(1)}(s_0,t) = \Delta g^{(1)}[t].$$

Введем вектор-функцию $y^{(1)}(s,t) = x^{(1)}(s,t) + \delta x^{(1)}(s,t)$. По определению, она подчиняется уравнению

$$y_s^{(1)} = f^{(1)}(y^{(1)}, x^{(2)}, v_k, s, t), \quad y^{(1)}(s_0,t) = g^{(1)}(v_k^{(1)}, t). \tag{12}$$

Рассмотрим приращение $\Delta x^{(2)}(s,t)$. Поскольку

$$\Delta x^{(1)}(s,t)=\delta x^{(1)}(s,t)+O(\varepsilon);\ \Delta x^{(2)}(s,t)\sim\varepsilon,\ \Delta u(s,t)=v_k(s)-u(s,t),$$

$t\in T_k(\varepsilon)$, то имеет место следующее представление для интеграла

$$\int\limits_{T_k(\varepsilon)}\Delta f^{(2)}[s,t]\,dt=\int\limits_{T_k(\varepsilon)}\Delta_{y^{(1)},v_k}f^{(2)}[s,t]\,dt+O(\varepsilon).$$

Здесь $\Delta_{y^{(1)},v_k}f^{(2)}$ – частное приращение вектор-функции $f^{(2)}$:

$$\Delta_{y^{(1)},v_k}f^{(2)}=f^{(2)}(y^{(1)},x^{(2)},v_k,s,t)-f^{(2)}(x^{(1)},x^{(2)},u,s,t).$$

Далее, используя известную формулу разложения интеграла по малому параметру, характеризующему меру промежутка интегрирования, в точках непрерывности (s,τ_k) вектор-функции $\Delta_{y^{(1)},v_k}f^{(2)}[s,t]$ (т.е. почти всюду на P), получаем представление

$$\int\limits_{T_k(\varepsilon)}\Delta_{y^{(1)},v_k}f^{(2)}[s,t]\,dt=\alpha_k\Delta_{y^{(1)},v_k}f^{(2)}[s,\tau_k]\varepsilon+O(\varepsilon).$$

Пусть для каждого $t\in T$ множество $\mathring{S}(t)\subset S$ имеет полную меру на S: $mes\,\mathring{S}(t)=mes\,S$. Тогда включение $(s,t)\mathring{\in}P$ может быть записано соотношениями $s\in\mathring{S}(t)$, $t\mathring{\in}T$. В результате приходим к окончательному выражению для интеграла

$$\int\limits_{T_k(\varepsilon)}\Delta f^{(2)}[s,t]\,dt=\alpha_k\Delta_{y^{(1)},v_k}f^{(2)}[s,\tau_k]\varepsilon+O(\varepsilon),\ s\in\mathring{S}(\tau_k),\ \tau_k\mathring{\in}T. \quad (13)$$

Подсчитаем приращение $\Delta x^{(2)}(s,t)$ в точках $t=\theta_l$, $l=1,\dots,p$,

$$\Delta x^{(2)}(s,\theta_l)=\Delta x^{(2)}(s,\theta_l-q_l\varepsilon)+\sum_{k=i(k_l)}^{k_l}\int\limits_{T_k(\varepsilon)}\Delta f^{(2)}[s,t]\,dt=$$

$$=\Delta x^{(2)}(s,\theta_l-q_l\varepsilon)+\sum_{k=i(k_l)}^{k_l}\alpha_k\Delta_{y^{(1)},v_k}f^{(2)}[s,\tau_k]\varepsilon+O(\varepsilon).$$

Отсюда получаем промежуточные условия для вариации $\delta x^{(2)}$:

$$\delta x^{(2)}(s,\theta_l)=\delta x^{(2)}(s,\theta_l-q_l\varepsilon)+\sum_{k=i(k_l)}^{k_l}\alpha_k\Delta_{y^{(1)},v_k}f^{(2)}[s,\tau_k], \quad (14)$$

$$s\in\mathring{S}(\tau_k),\ \tau_k\mathring{\in}T,\ l=1,\dots,p.$$

Таким образом, вариации состояния на пакете (8) подчиняются линейным уравнениям (10) с начальным условием (11) и промежуточными соотношениями (14).

Перейдем на уровень приращения функционала $\Phi(w)$ (индекс i пока опустим). Используя представление (9) и выражение типа (13) для интеграла по области $T_k(\varepsilon)$, выделим главный член приращения $\Delta\Phi(w)$:

$$\Delta\Phi(w) = \Big(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \Delta_{y^{(1)}} \varphi^{(1)}[s_1,\tau_k] + \sum_{\ell=1}^{p} \int_{T_\ell} \nabla\varphi^{(1)}[s_1,t]' \delta x^{(1)}(s_1,t)\,dt +$$

$$+ \int_{s_0}^{s_1} \nabla\varphi^{(2)}[s,t_1]' \delta x^{(2)}(s,t_1)\,ds\Big)\varepsilon + o(\varepsilon). \tag{15}$$

Здесь $\Delta_{y^{(1)}} \varphi^{(1)}[s_1,\tau_k]$ – приращение функции $\varphi^{(1)}$ вида

$$\Delta_{y^{(1)}} \varphi^{(1)}[s_1,\tau_k] = \varphi^{(1)}(y^{(1)}(s_1,\tau_k),\tau_k) - \varphi^{(1)}(x^{(1)}(s_1,\tau_k),\tau_k).$$

Преобразуем интегральные слагаемые в (15), чтобы выразить результат в явном виде через параметры пакета (8). Введем в рассмотрение сопряженную систему для вектор-функций $\psi^{(1)}(s,t)$, $\psi^{(2)}(s,t)$:

$$\begin{aligned} \psi^{(1)}_s &= -f^{(1)}_{x^{(1)}}[s,t]'\psi^{(1)} - f^{(2)}_{x^{(1)}}[s,t]'\psi^{(2)}, \\ \psi^{(2)}_t &= -f^{(1)}_{x^{(2)}}[s,t]'\psi^{(1)} - f^{(2)}_{x^{(2)}}[s,t]'\psi^{(2)} \end{aligned} \tag{16}$$

с граничными условиями

$$\psi^{(1)}(s_1,t) = -\nabla\varphi^{(1)}(x^{(1)}(s_1,t),t),\ \psi^{(2)}(s,t_1) = -\nabla\varphi^{(2)}(x^{(2)}(s,t_1),s). \tag{17}$$

Возьмем за основу тождество

$$(\psi^{(1)}(s,t)'\delta x^{(1)}(s,t))_s + (\psi^{(2)}(s,t)'\delta x^{(2)}(s,t))_t = 0,$$

которое выполняется почти всюду в области $s \in S$, $t \in T_\Delta \setminus T_0$. После двойного интегрирования по этой области получаем

$$\sum_{\ell=1}^{p} \int_{T_\ell} \psi^{(1)}(s_1,t)'\delta x^{(1)}(s_1,t)\,dt + \sum_{\ell=1}^{p-1} \int_{s_0}^{s_1} \psi^{(2)}(s,\theta_{\ell+1}-q_{\ell+1}\varepsilon)'\delta x^{(2)}(s,\theta_{\ell+1}-$$

$$-q_{\ell+1}\varepsilon)\,ds + \int_{s_0}^{s_1} \psi^{(2)}(s,t_1)'\delta x^{(2)}(s,t_1)\,ds - \sum_{\ell=1}^{p} \int_{s_0}^{s_1} \psi^{(2)}(s,\theta_\ell)'\delta x^{(2)}(s,\theta_\ell)\,ds = 0.$$

Отсюда, учитывая условия (14), имеем

$$\sum_{\ell=1}^{p} \int_{T_\ell} \psi^{(1)}(s_1,t)'\delta x^{(1)}(s_1,t)\,dt + \int_{s_0}^{s_1} \psi^{(2)}(s,t_1)'\delta x^{(2)}(s,t_1)\,ds =$$

$$= \sum_{\ell=1}^{p} \sum_{k=i(k_\ell)}^{k_\ell} \alpha_k \int_{s_0}^{s_1} \psi^{(2)}(s,\theta_\ell)'\Delta_{y^{(1)},v_k} f^{(2)}[s,\tau_k]\,ds +$$

$$+\sum_{l=2}^{p}\int_{s_0}^{s_1}\left[\psi^{(2)}(s,\theta_l)-\psi^{(2)}(s,\theta_l-q_l\varepsilon)\right]'\delta x^{(2)}(s,\theta_l-q_l\varepsilon)\,ds.$$

Поскольку $\psi^{(2)}(s,\theta_l-q_l\varepsilon)=\psi^{(2)}(s,\theta_l)+O(\varepsilon)$, то последняя сумма есть величина порядка ε. Кроме того, по смыслу индекса $i(K_l)$ для $K=i(K_l)$, $i(K_l)+1,\dots,K_l$ $\tau_K=\theta_l$. Поэтому

$$\sum_{l=1}^{p}\int_{T_l}\psi^{(1)}(s_1,t)'\delta x^{(1)}(s_1,t)\,dt+\int_{s_0}^{s_1}\psi^{(2)}(s,t_1)'\delta x^{(2)}(s,t_1)\,ds=$$

$$=\sum_{K=1}^{m}d_K\int_{s_0}^{s_1}\psi^{(2)}(s,\tau_K)'\Delta y^{(1)}{}_{,v_K}f^{(2)}[s,\tau_K]\,ds+O(\varepsilon).$$

Учитывая граничные условия (17), на основании формулы (15) заключаем, что вариация функционала $\Phi(w)$ на пакете (8) представляется в виде

$$\delta\Phi(w)=\sum_{K=1}^{m}d_K\Big(\Delta y^{(1)}\varphi^{(1)}[s_1,\tau_K]-\int_{s_0}^{s_1}\psi^{(2)}(s,\tau_K)'\Delta y^{(1)}{}_{,v_K}f^{(2)}[s,\tau_K]\,ds\Big).\qquad(18)$$

Напомним, что вектор-функции $y^{(1)}(s,\tau_K)$ и $v_K(s)$ связаны уравнением (12).

§ 3. Вывод принципа максимума

Приступим к непосредственному исследованию задачи (4), (5). Пусть $w=(u(s,t),u^{(1)}(t),u^{(2)}(s)),s\in S,t\in T$ - допустимое управление, и соответствующее решение $(x^{(1)}(s,t),\,x^{(2)}(s,t))$ системы (1), (2) удовлетворяет ограничениям (5). Образуем индексное множество

$$I=\{0,\ i\in(1,\dots,N):\Phi_i(w)=0\}.$$

Пусть $(\psi^{(1,i)}(s,t),\ \psi^{(2,i)}(s,t)),\ i\in I$ - решения сопряженной системы (16), отвечающие граничным условиям

$$\psi^{(1,i)}(s_1,t)=-\nabla\varphi_i^{(1)}(x^{(1)}(s_1,t),t),\ \psi^{(2,i)}(s,t_1)=-\nabla\varphi_i^{(2)}(x^{(2)}(s,t_1),s).\qquad(19)$$

Проведем варьирование управления w с помощью простейшего варианта пакета (8), полагая $m=1$ (одна точка варьирования), $d_1=1$, $\tau_1=\tau$, $v_1(s)=v(s)$, $v_1^{(1)}=v^{(1)}$. Соответствующие вариации функционалов $\Phi_i(w),\ i\in I$, как следует из обшей формулы (18), имеют вид

$$\delta\Phi_i(\tau,v(s),v^{(1)})=\Delta y^{(1)}\varphi_i^{(1)}[s_1,\tau]-\int_{s_0}^{s_1}\psi^{(2,i)}(s,\tau)'\Delta y^{(1)}{}_{,v}f^{(2)}[s,\tau]\,ds.$$

Введем множество $V(\tau)$ кусочно-непрерывных на S вектор-функций $v(s)$ с условием $v(s) \in U$, $s \in S(\tau)$. Образуем множество вариаций

$$A = \{(\delta \Phi_i(\tau, v(s), v^{(1)}), i \in I) : \tau \in \mathring{T},\ v \in V(\tau),\ v^{(1)} \in U_1\}$$

и вспомогательный конус $B = \{(b_i, i \in I) : b_i < 0\}$. Докажем основной результат.

Т е о р е м а. Если управление w оптимально в задаче (4), (5), то $\operatorname{cone} A \cap B = \emptyset$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим противное. Это значит, что найдутся такие точки $\tau_k \in T$, вектор-функции $v_k \in V(\tau_k)$, векторы $v_k^{(1)} \in U_1$ и положительные числа α_k, $k = 1, \dots, m$, что

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \delta \Phi_i(\tau_k, v_k(s), v_k^{(1)}) < 0, \quad i \in I.$$

Упорядочим точки τ_k по возрастанию: $\tau_1 \le \tau_2 \le \dots \le \tau_m$ и построим пакет вариаций (8) на основе набора параметров $(\tau_k, \alpha_k, v_k(s), v_k^{(1)})$, $k = 1, \dots, m$. Соответствующие приращения функционалов Φ_i, $i \in I$, имеют вид

$$\Delta \Phi_i(w) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \delta \Phi_i(\tau_k, v_k(s), v_k^{(1)})\, \varepsilon + o(\varepsilon).$$

Следовательно, при достаточно малых $\varepsilon > 0$ управление $(u(s,t) + \Delta u(s,t)$, $u^{(1)}(t) + \Delta u^{(1)}(t)$, $u^{(2)}(s))$ уменьшает значение целевого функционала Φ_0 и порождает решение системы (1), (2), удовлетворяющее ограничениям (5). Это противоречит оптимальности исходного управления w. Теорема доказана.

Используя теорему об отделимости выпуклых конусов, сформулируем результат в форме правила множителей.

С л е д с т в и е 1. Если управление w оптимально в задаче (4), (5), то найдется такой вектор

$$\lambda^* = (\lambda_i^*, i \in I),\ \lambda_i^* \ge 0,\ \sum_{i \in I} \lambda_i^* = 1, \tag{20}$$

для которого

$$\sum_{i \in I} \lambda_i^* \delta \Phi_i(\tau, v(s), v^{(1)}) \ge 0,\ \tau \in \mathring{T},\ v \in V(\tau),\ v^{(1)} \in U_1.$$

Учитывая выражение для вариаций $\delta \Phi_i$, представим это условие в окончательной форме принципа максимума.

С л е д с т в и е 2. Пусть оптимальному управлению $(u(s,t), u^{(1)}(t)$, $u^{(2)}(s))$ соответствуют решения $(x^{(1)}(s,t), x^{(2)}(s,t))$, $(\psi^{(1,i)}(s,t), \psi^{(2,i)}(s,t))$, $i \in I$, задач (1), (2) и (16), (19). Тогда существует вектор λ^* с условиями (20), что для почти всех $t \in T$ пара $(u(s,t), u^{(1)}(t))$ доставляет максимум функционалу

$$F(v(s), v^{(1)}) = \sum_{i \in I} \lambda_i^* \Big(\int_{s_0}^{s_1} \psi^{(2,i)}(s,t)' f^{(2)}(y^{(1)}(s), x^{(2)}(s,t), v(s), s, t)\, ds - \varphi_i^{(1)}(y^{(1)}(s_1), t) \Big)$$

при условиях

$$y_s^{(1)} = f^{(1)}(y^{(1)}, x^{(2)}(s,t), v, s, t), \quad y^{(1)}(s_0) = g^{(1)}(v^{(1)}, t),$$
$$v(s) \in U, \quad s \in S(t), \quad v^{(1)} \in U_1 .$$

З а м е ч а н и е 1. Вполне аналогично можно сформулировать симметричное условие оптимальности относительно пары $(u(s,t), u^{(2)}(s))$. Оно получается в результате использования пакета по переменной s.

З а м е ч а н и е 2. Если применить принцип максимума Л.С.Понтрягина к обыкновенной задаче оптимального управления

$$F(v(s), v^{(1)}) \to max, \quad v \in V(t),$$

то получим условие оптимальности, доказанное в [4] с помощью вариаций игольчатого типа.

Поступила в ред.-изд.отдел
15 марта 1983 г.

Л и т е р а т у р а

1. Островский Г.М., Волин Ю.М. Методы оптимизации сложных химико-технологических схем. - М.: Химия, 1970. - 328 с.

2. Срочко В.А. Принцип максимума для одного класса систем с распределенными параметрами. - В кн.: Вопросы устойчивости и оптимизации динамических систем. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1983, с. 170-182.

3. Волин Ю.М., Островский Г.М. О принципе максимума в банаховом пространстве. - Кибернетика, 1969, № 5, с. 132-135.

4. Васильев О.В., Срочко В.А. К оптимизации одного класса управляемых процессов с распределенными параметрами. - Сиб. мат. ж., 1978, т. 19, № 2, с. 466-470.

5. Волин Ю.М., Островский Г.М., Финкельштейн А.В. Метод штрафных функций и принцип максимума Понтрягина в задачах оптимального управления. В кн.: Управляемые системы. Новосибирск, ИМ СО АН СССР, 1973, вып.11, с. 88-95.

6. Плотников В.И., Сумин В.И. Проблема устойчивости нелинейных систем Гурса-Дарбу. - Дифференц. уравнения, 1972, т.8, № 5, с. 845-856.