Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1984 г., вып. 25

УДК 519.85-1

О МИНИМИЗАЦИИ КВАДРАТИЧНЫХ ПОЛИНОМОВ ОТ БУЛЕВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

А.А.Агеев

В работе продолжается исследование задач минимизации полиномов от булевых переменных (см. [1-3]). В [3] построено конструктивное сведение задачи минимизации квадратичного полинома общего вида к NP-трудной (см. [6]) задаче минимизации квадратичного полинома с неотрицательными коэффициентами при нелинейных членах.

Основные результаты настоящей работы относятся к последней задаче. Установлены некоторые полезные свойства эквивалентной ей задачи о покрытии. Показано, что непрерывная релаксация данной задачи сводится к задаче о максимальном потоке в двудольной сети. Показано также, что для всякого оптимального решения непрерывной релаксации существует оптимальное решение исходной задачи, совпадающее с ним в булевых компонентах.

С использованием этих свойств для задачи минимизации квадратичного полинома предлагается точный алгоритм типа ветвей и границ и, кроме того, для задачи минимизации квадратичного полинома с неотрицательными коэффициентами при нелинейных членах - эффективный приближенный алгоритм с оценкой точности, равной 2.

§ 1. Предварительные замечания

Напомним общие понятия, используемые в работе, и сделаем необходимые пояснения относительно схемы доказательств некоторых утверждений.

1. Всякую экстремальную задачу можно рассматривать как класс индивидуальных задач с конкретно заданными исходными данными. Подзадачей экстремальной задачи будем называть задачу, соответствующую некоторому подклассу этого класса. Под сводимостью задач понимается полиномиальная сводимость по Тьюрингу, определенная в [7]. Две задачи будем называть эквивалентными, если они взаимно сводимы.

Алгоритм называется эффективным, если время его работы ограничено полиномом от длины записи исходных данных. Задачу, для которой существует такой алгоритм решения, называют эффективно решаемой.

Доказательства сводимости одной задачи к другой будут проводиться по единой схеме, состоящей в построении некоторых эффективных преобразований допустимых решений одной задачи в допустимые решения другой. Ниже в виде признака сводимости представлено неформализованное обоснование этой схемы в общем случае.

Рассмотрим две экстремальные задачи:

$$f(x) \to \min_{x \in X} \qquad (P)$$

и

$$g(y) \to \min_{y \in Y} . \qquad (Q)$$

<u>Признак сводимости.</u> Пусть имеются эффективный алгоритм, преобразующий индивидуальную задачу $\rho \in P$ в индивидуальную задачу $\sigma(\rho) \in Q$, и отображения $\varphi : Y \to X$ и $\psi : X \to Y$, порождаемые эффективными алгоритмами и обладающие свойствами:

$$\forall y \in Y \quad f(\varphi(y)) \leq g(y),$$

$$\forall x \in X \quad g(\psi(x)) \leq f(x).$$

Тогда задача P сводится к задаче Q . Кроме того, если y^* - оптимальное решение задачи $\sigma(\rho)$, то $\varphi(y^*)$ - оптимальное решение задачи ρ , и, наоборот, если x^* - оптимальное решение задачи ρ , то $\psi(x^*)$ - оптимальное решение задачи $\sigma(\rho)$.

Пусть $x \in X$, $y \in Y$. Справедливость утверждения вытекает из цепочек неравенств:

$$f(x) \geq g(\psi(x)) \geq g(y^*) \geq f(\varphi(y^*))$$

и

$$g(y) \geq f(\varphi(y)) \geq f(x^*) \geq g(\psi(x^*)) .$$

2. Известно, что всякую вещественнозначную функцию f от булевых переменных $x_1, \dots, x_n$ можно представить в виде полинома

$$f(x) = \sum_{\alpha \subset \{1,\dots,m\}} c_\alpha \prod_{i \in \alpha} x_i .$$

Выражение $c_\alpha \prod_{i \in \alpha} x_i$ называют членом полинома, величину $\max\{|\alpha| \mid \alpha \subset \{1,\dots,m\},\ c_\alpha \neq 0\}$ - степенью. Член полинома называется линейным, если $|\alpha| \leq 1$, и нелинейным - в противном случае.

Задачу минимизации полинома будем записывать следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n_1} c_j \left(1 - \prod_{i \in \alpha_j} x_i\right) + \sum_{\ell = n_1+1}^{n} c_\ell \prod_{i \in \alpha_\ell} x_i \to \min_{(x_i)},$$

где $c_j \geqslant 0,\ \alpha_j \subset \{1, \ldots, m\},\ j = \overline{1,n},\ n_1 \leqslant n.$

В таком виде она возникает при исследовании ряда моделей оптимальной унификации и размещения производства [4].

3. Задачей о минимальном покрытии называют следующую задачу:

$$\sum_{i=1}^{m} c_i u_i \to \min_{(u_i)},$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \geqslant 1,\ j = \overline{1,n},$$

$$u_i \in \{0, 1\},\quad i = \overline{1,m},$$

где $c_i \geqslant 0,\ a_{ij} \in \{0,1\},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$

Задача о вершинном покрытии минимального веса является подзадачей данной задачи, соответствующей случаю

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} = 2,\quad j = \overline{1,n}.$$

Допустимое решение (u_i) задачи о минимальном покрытии называют тупиковым, если уменьшение любой его компоненты приводит к недопустимому решению.

§ 2. Некоторые сводимости

Рассмотрим задачу минимизации полинома от булевых переменных с неотрицательными коэффициентами при нелинейных членах

$$\sum_{i=1}^{m} a_i (1 - x_i) + \sum_{j=1}^{n} b_j \prod_{i \in \alpha_j} x_i \to \min_{(x_i)}, \tag{1}$$

где $a_i,\ b_j \geqslant 0,\ \alpha_j \subset \{1, \ldots, m\},\ |\alpha_j| \geqslant 2,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$

Поставим в соответствие задаче (1) задачу о минимальном покрытии вида:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \to \min_{(u_i),(v_j)}, \tag{2}$$

$$\sum_{i\in\alpha_j} u_i + v_j \geq 1, \ j=\overline{1,n}, \tag{3}$$

$$u_i, \ v_j \geq 0, \ i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}; \tag{4}$$

$$u_i, \ v_j \in \{0,1\}, \ i=\overline{1,m}, \ j=\overline{1,n}. \tag{5}$$

В [3, лемма 2] показано, что задача (1) эквивалентна задаче (2) - (5).

Задачу (2)-(5) преобразуем в следующую задачу о вершинном покрытии минимального веса (с аддитивной константой в целевой функции):

$$\sum_{i=1}^{m} a_i s_i + \sum_{j=1}^{n} b_j \Big(\sum_{k\in\alpha_j} t_{kj} - |\alpha_j| + 1\Big) \to \min_{(s_i)(t_{kj})}, \tag{6}$$

$$s_i + t_{ij} \geq 1, \ i \in \alpha_j, \ j=\overline{1,n}, \tag{7}$$

$$t_{ij} + t_{kj} \geq 1, \ i,k \in \alpha_j, \ j=\overline{1,n}, \tag{8}$$

$$s_i, \ t_{kj} \in \{0,1\}, \ i=\overline{1,m}, \ k\in\alpha_j, \ j=\overline{1,n}. \tag{9}$$

Л е м м а 1. Задача (2)-(5) сводится к задаче (6)-(9).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим следующее отображение из области (7)-(9) в область (3)-(5):

$$u_i = s_i, \ i=\overline{1,m}; \tag{10}$$

$$v_j = \sum_{k\in\alpha_j} t_{kj} - |\alpha_j| + 1, \ j=\overline{1,n}. \tag{11}$$

Покажем допустимость решения (u_i), (v_j), полученного из допустимого решения (s_i) (t_{kj}) по формулам (10), (11). Очевидно, что u_i, $v_j \in \{0,1\}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$. Кроме того, из (7) получаем

$$\sum_{i\in\alpha_j} u_i + v_j = \sum_{i\in\alpha_j}(s_i + t_{ij}) - |\alpha_j| + 1 \geq$$
$$\geq |\alpha_j| - |\alpha_j| + 1 = 1.$$

Заметим также, что значения целевых функций (2) и (6) на соответствующих по формулам (10)-(11) допустимых решениях совпадают.

Наоборот, поставим в соответствие допустимому решению задачи (3)-(5) допустимое решение задачи (7)-(9) по формулам:

$$s_i = u_i, \ i=\overline{1,m},$$

$$t_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{, если } \quad v_j = 1,\ k \in \alpha_j, \\ 1 & \text{, если } \quad v_j = 0,\ k \neq i(j), \\ 0 & \text{, если } \quad v_j = 0 \text{ и } k = i(j), \end{cases}$$

где $i(j)$ – произвольно выбранный номер из множества $\{k \in \alpha_j \mid u_k = 1\}$, $j \in \{j \mid v_j = 0\}$. Нетрудно понять, что при таком соответствии решение (s_i), (t_{kj}) действительно допустимо и значения целевых функций (2) и (6) на соответствующих допустимых решениях совпадают.

Таким образом, выполнены условия признака сводимости, и, следовательно, задача (2)-(5) сводится к задаче (6)-(9).

Из доказанной леммы и сделанного выше замечания вытекает, что задача (1) сводится к задаче (6)-(9). Поскольку задача (2)-(5) совпадает с общей задачей о минимальном покрытии, то лемма 2 указывает также конструктивное сведение общей задачи о покрытии к задаче о вершинном покрытии минимального веса. Используя сведение задачи минимизации полинома общего вида к задаче о минимальном покрытии (см. [3, теорема 1]), нетрудно получить конструктивное сведение задачи минимизации полинома к задаче о вершинном покрытии минимального веса.

Ценность всех этих конструкций заключается в том, что задача о вершинном покрытии минимального веса обладает хорошими свойствами, позволяющими, несмотря на ее трудноремаемость, строить относительно эффективные процедуры типа ветвей и границ (см. [8-10]). Отрицательным моментом является значительное увеличение размерности решаемой задачи (в задаче (6) - (9) $m + \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|$ переменных).

Возникает естественный вопрос: не обладает ли аналогичными хорошими свойствами сама задача о минимальном покрытии (2)-(5)? Если это так, то рост размерности уже не будет сдерживающим фактором и появится реальная возможность построения более эффективных методов решения задачи (1).

Положительному решению данного вопроса в случае квадратичных полиномов посвящена основная часть работы.

Следующая лемма, имеющая общий характер, потребуется при доказательстве теоремы 1.

Задаче (2)-(5) поставим в соответствие следующую задачу:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i s_i + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{1}{|\alpha_j| - 1} \cdot \Big(\sum_{k \in \alpha_j} t_{kj} - 1 \Big) \longrightarrow \min_{(s_i),\,(t_{kj})}\ ; \qquad (12)$$

$$\sum_{i\in\alpha_j\setminus\{k\}} s_i + t_{kj} \geqslant 1, \quad k\in\alpha_j, \quad j=\overline{1,n}; \tag{13}$$

$$\sum_{k\in\alpha_j} t_{kj} \geqslant 1, \quad j=\overline{1,n}; \tag{14}$$

$$s_i,\ t_{kj} \geqslant 0, \quad i=\overline{1,m}, \quad k\in\alpha_j, \quad j=\overline{1,n}; \tag{15}$$

$$s_i,\ t_{kj} \in\{0,1\}, \quad i=\overline{1,m}, \quad k\in\alpha_j, \quad j=\overline{1,n}. \tag{16}$$

Л е м м а 2. а) Задача (2)-(5) сводится к задаче (12)-(16). б) Задача (2)-(4) сводится к задаче (12)-(15).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим следующее отображение из области (13)-(15) в область (3)-(4):

$$u_i = s_i, \quad i=\overline{1,m}; \tag{17}$$

$$v_j = \frac{1}{|\alpha_j|-1}\Big(\sum_{k\in\alpha_j} t_{kj} - 1\Big), \quad j=\overline{1,n}. \tag{18}$$

Пусть (s_i), (t_{kj}) – допустимое решение задачи (13)-(15). Проверим допустимость решения (u_i), (v_j), полученного по формулам (17)-(18). Из (14) и (15), очевидно, вытекает, что $u_i \geqslant 0$, $v_j \geqslant 0$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$. Суммируя неравенства (13), получаем

$$(|\alpha_j|-1)\sum_{i\in\alpha_j} s_i + \sum_{k\in\alpha_j} t_{kj} \geqslant |\alpha_j|, \quad j=\overline{1,n}.$$

Отсюда

$$\sum_{i\in\alpha_j} s_i + \frac{1}{|\alpha_j|-1}\Big(\sum_{k\in\alpha_j} t_{kj} - 1\Big) =$$

$$= \sum_{i\in\alpha_j} u_i + v_j \geqslant 1, \quad j=\overline{1,n}.$$

Легко видеть, что значения целевых функций (2) и (12) на соответствующих по формулам (17)-(18) допустимых решениях совпадают.

Построим по допустимому решению (u_i), (v_j) задачи (2)-(4) допустимое решение задачи (12)-(15). Положим

$$s_i = u_i, \quad i=\overline{1,m}, \tag{19}$$

$$t_{kj}=\begin{cases} t'_{kj}\ , \text{ если } \sum\limits_{i\in\alpha_j} t'_{ij}\geq 1,\ k\in\alpha_j\ ,\\ t'_{kj}\ , \text{ если } \sum\limits_{i\in\alpha_j} t'_{ij}< 1,\ k\in\alpha_j\setminus\{i(j)\},\\ t'_{kj}+\delta_j\ , \text{ если } \sum\limits_{i\in\alpha_j} t'_{ij}< 1,\ k=i(j),\end{cases} \tag{20}$$

где $t'_{kj} = max\{0, 1-\sum\limits_{i\in\alpha_j\setminus\{k\}} u_i\}$,

$i(j)$ - произвольный номер из множества α_j ,

$$\delta_j = 1-\sum_{i\in\alpha_j} t'_{ij},\quad j=\overline{1,n}.$$

Несложно проверяется допустимость решения (s_i), (t_{kj}) , полученного по формулам (19), (20) из допустимого решения (u_i), (v_j) .

Покажем, что значение целевой функции (2) на допустимом решении (u_i), (v_j) не меньше чем значение целевой функции (12) на соответствующем допустимом решении (s_i) , (t_{kj}) . С этой целью проверим справедливость неравенств

$$\sum_{k\in\alpha_j} t_{kj} \leq (|\alpha_j|-1)\,v_j+1,\quad j=\overline{1,n}. \tag{21}$$

Действительно, в случае $v_j > 0$ имеем

$$\sum_{k\in\alpha_j} t_{kj} = \sum_{k\in\alpha_j} t'_{kj} = \sum_{k\in\alpha_j} max\{0, 1-\sum_{i\in\alpha_j} u_i + u_k\} =$$
$$= |\alpha_j|\,(1-\sum_{i\in\alpha_j} u_i) + \sum_{i\in\alpha_j} u_i \leq (|\alpha_j|-1)\,v_j+1 .$$

В случае $v_j = 0$ обозначим

$$\gamma_j = \{k\in\alpha_j \mid 1-\sum_{i\in\alpha_j\setminus\{k\}} u_i > 0\}.$$

Предположим, что $\gamma_j \neq \emptyset$. Имеем:

$$\sum_{k\in\alpha_j} t'_{kj} = \sum_{k\in\alpha_j} max\{0, (1-\sum_{i\in\alpha_j} u_i)+u_k\} =$$
$$= \sum_{k\in\gamma_j} [(1-\sum_{i\in\alpha_j} u_i)+u_k] = |\gamma_j|\,(1-\sum_{i\in\alpha_j} u_i) + \sum_{k\in\gamma_j} u_k =$$
$$=(|\gamma_j|-1)\,(1-\sum_{i\in\alpha_j} u_i) - \sum_{k\in\alpha_j\setminus\gamma_j} u_k + 1 \leq 1 .$$

Следовательно,

$$\sum_{\kappa\in\alpha_j} t_{\kappa j} = 1,$$

и неравенство (21) для данного j выполнено. Если $\gamma_j = \varnothing$, то также

$$\sum_{\kappa\in\alpha_j} t_{\kappa j} = 1,$$

так как

$$\sum_{\kappa\in\alpha_j} t'_{\kappa j} = 0.$$

Утверждение п."б", таким образом, вытекает из признака сводимости.

Убедимся в справедливости утверждения п."а". В качестве отображения из области (13)-(16) в область (3)-(5) возьмем суперпозицию двух отображений. Первое преобразует допустимое решение (s_i), $(t_{\kappa j})$ в некоторое тупиковое допустимое решение $(\bar{s}_i)$, $(\bar{t}_{\kappa j})$ такое, что

$$\bar{s}_i \le s_i,\ \bar{t}_{\kappa j} \le t_{\kappa j},\ i=\overline{1,m},\ \kappa\in\alpha_j,\ j=\overline{1,n}.$$

Второе по формулам (17)-(18) переводит тупиковое допустимое решение $(\bar{s}_i)$, $(\bar{t}_{\kappa j})$ задачи (12)-(16) в допустимое решение (u_i), (v_j) задачи (2)-(5). Очевидно, что результирующее отображение может быть представлено эффективным алгоритмом и значение целевой функции (12) на допустимом решении (s_i), $(t_{\kappa j})$ не превосходит значения целевой функции (2) на допустимом решении (u_i), (v_j).

В качестве отображения из области (3)-(5) в область (13)-(16) возьмем отображение, представленное формулами (19)-(20). Нетрудно проверить, что допустимые решения задачи (2)-(5) при таком отображении переводятся в допустимые решения задачи (12)-(16).

Таким образом, выполнены условия признака сводимости, и, следовательно, задача (2)-(5) сводится к задаче (12)-(16).

Лемма доказана.

§ 3. Некоторые свойства задачи минимизации квадратичного полинома

В этом параграфе мы переходим к исследованию задачи минимизации квадратичного полинома с неотрицательными коэффициентами при нелинейных членах

$$\sum_{i=1}^{m} a_i(1-x_i) + \sum_{j<\kappa} b_{j\kappa}\, x_j\, x_\kappa \to \min_{(x_i)}, \tag{22}$$

где $a_i,\ b_{j\kappa} \geqslant 0,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,\kappa-1},\ \kappa=\overline{2,m}.$

Заметим, что по лемме 1 из [3] задача минимизации квадратичного полинома с коэффициентами произвольного знака сводится к задаче (22).

Далее нам потребуются некоторые результаты работ [8] и [9], относящиеся к задаче о вершинной упаковке. Переформулируем их в виде леммы 3 для задачи о вершинном покрытии.

Запишем задачу о вершинном покрытии в следующем виде:

$$\sum_{i\in V} c_i y_i \longrightarrow \min_{(y_i)}, \tag{23}$$

$$y_i + y_j \geq 1, \ (i,j)\in E, \tag{24}$$

$$y_i \geq 0, \quad i \in V, \tag{25}$$

$$y_i \in \{0,1\}, \ i\in V, \tag{26}$$

где V - множество вершин, E - множество ребер некоторого неориентированного графа $G=(V,E)$.

Л е м м а 3. а) Существует оптимальное решение $(\tilde{y}_i^*)$ задачи (23)-(25), обладающее свойством $\tilde{y}_i^* \in \{0, 1/2, 1\}$, $i\in V$.

б) Пусть $(\tilde{y}_i^*)$ - оптимальное решение задачи (23)-(25) такое, что $\tilde{y}_i^*\in\{0, 1/2, 1\}$, $i\in V$. Обозначим $I_\ell = \{i \mid \tilde{y}_i^* = \ell\}$, $\ell = 0,1$. Тогда существует оптимальное решение (y_i^*) задачи (23)-(26) такое, что $y_i^* = \ell$ для всех $i \in I_\ell$, $\ell = 0,1$.

Рассмотрим задачу о минимальном покрытии, эквивалентную задаче (22):

$$\sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j<k} b_{jk} w_{jk} \longrightarrow \min_{(u_i),(w_{jk})}; \tag{27}$$

$$u_j + u_k + w_{jk} \geq 1, \ j=\overline{1,k-1}, \ k=\overline{2,m}; \tag{28}$$

$$u_i, w_{jk} \geq 0, \ i=\overline{1,m}, \ j=\overline{1,k-1}, \ k=\overline{2,m}; \tag{29}$$

$$u_i, w_{jk} \in\{0,1\}, \ i=\overline{1,m}, \ j=\overline{1,k-1}, \ k=\overline{2,m}. \tag{30}$$

Т е о р е м а 1. а) Существует оптимальное решение $(\tilde{u}_i^*), (\tilde{w}_{jk}^*)$ задачи (27)-(29), обладающее свойством

$$\tilde{u}_i^*, \tilde{w}_{jk}^* \in\{0, 1/2, 1\}, \ i=\overline{1,m}, \ j=\overline{1,k-1}, \ k=\overline{2,m}. \tag{31}$$

б) Пусть $(\tilde{u}_i^*)$, $(\tilde{w}_{jk}^*)$ - оптимальное решение задачи (27)-(29), обладающее свойством (31). Обозначим $I_\ell = \{i \mid \tilde{u}_i^* = \ell\}$, $\ell = 0,1$. Тогда

существует оптимальное решение (u_i^*), (w_{jk}^*) задачи (27)-(30) такое, что $u_i^* = \ell$, если $i \in I_\ell$, $\ell = 0,1$.

Доказательство. Из леммы 2 вытекает, что задачи (27)-(29) и (27)-(30) сводятся соответственно к задачам (32)-(34) и (32)-(35) следующего вида:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i s_i + \sum_{j<k} b_{jk} (t_{jk}^1 + t_{jk}^2 - 1) \longrightarrow \min_{(s_i),(t_{jk}^\ell)}, \tag{32}$$

$$\left.\begin{aligned} s_j + t_{jk}^1 &\geq 1 \\ s_k + t_{jk}^2 &\geq 1 \\ t_{jk}^1 + t_{jk}^2 &\geq 1 \end{aligned}\right\} j = \overline{1,k-1},\ k = \overline{2,m}, \tag{33}$$

$$s_i, t_{jk}^\ell \geq 0,\quad i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,k-1},\ k = \overline{2,m},\ \ell = 1,2, \tag{34}$$

$$s_i, t_{jk}^\ell \in \{0,1\},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,k-1}, k = \overline{2,m},\ \ell = 1,2, \tag{35}$$

причем если (s_i^*), $(t_{jk}^{\ell *})$ - оптимальное решение задачи (32)-(34) ((32)-(35)), то

$$u_i^* = s_i^*,\ w_{jk}^* = t_{jk}^{1*} + t_{jk}^{2*} - 1,$$

$$i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,k-1},\ k = \overline{2,m}, - \tag{36}$$

оптимальное решение задачи (27)-(29) ((27)-(30)).

Утверждение п. "а" непосредственно вытекает из вида формул (36) и утверждения п. "а" леммы 3.

Пусть выполнены условия, сформулированные в п."б". На основании признака сводимости допустимое решение $(\tilde{s}_i^*)$, $(\tilde{t}_{jk}^{\ell *})$, полученное по формулам (19)-(20) из оптимального решения $(\tilde{u}_i^*)$, $(\tilde{w}_{jk}^*)$ задачи (27)-(29), является оптимальным для задачи (32)-(34). Поскольку $\tilde{s}_i^* = \tilde{u}_i^*$ и $\tilde{s}_i^*$, $\tilde{t}_{jk}^{\ell *} \in \{0, 1/2, 1\}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,k-1}$, $k = \overline{2,m}$, $\ell = \overline{1,2}$, то из п."б" леммы 3 получаем, что существует оптимальное решение (s_i^*), $(t_{jk}^{\ell *})$ задачи (32)-(35) такое, что

$$s_i^* = \ell \quad \text{, если} \quad i \in I_\ell,\ \ell = 0,1 .$$

С другой стороны, по лемме 2 можно построить оптимальное решение (u_i^*), (w_{jk}^*) задачи (27)-(30) такое, что $u_i^* = s_i^*$, и, очевидно, оно будет обладать требуемыми свойствами. Теорема доказана.

§ 4. О построении нижней оценки минимума квадратичного полинома

В [1,2] рассматривалась задача минимизации квадратичного полинома с разделяющимися переменными:

$$\sum_{i=1}^{m} f_i(1-x_i)+\sum_{j=1}^{n} g_j(1-y_j)+ \\ +\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} h_{ij}x_i y_j \to \min_{(x_i),(y_j)}, \tag{37}$$

где $f_i, g_j, h_{ij} \geqslant 0, \quad i=\overline{1,m}, \quad j=\overline{1,n}.$

Показано, что данная задача сводится к задаче о минимальном разрезе и, следовательно, является эффективно решаемой.

В этом параграфе мы построим сведение задачи (27)-(29) к задаче (37). Оптимальное значение целевой функции задачи (27)-(29) обеспечивает хорошую нижнюю оценку минимума квадратичного полинома (22).

Т е о р е м а 2. Задача (27)-(29) сводится к задаче (37).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Задаче (27)-(29) поставим в соответствие задачу о покрытии вида:

$$1/2\,\Big[\sum_{i=1}^{m} a_i(p_i^1+p_i^2)+\sum_{j<k} b_{jk}(q_{jk}^1+q_{jk}^2)\Big]\to \\ \to \min_{(p_i^\ell)\,(q_{jk}^\ell)}; \tag{38}$$

$$p_j^1+p_k^2+q_{jk}^1 \geqslant 1,\ j=\overline{1,m-1},\ k=\overline{j+1,m}; \tag{39}$$

$$p_j^2+p_k^1+q_{jk}^2 \geqslant 1,\ j=\overline{1,m-1},\ k=\overline{j+1,m}; \tag{40}$$

$$p_i^\ell,\ q_{jk}^\ell \in\{0,1\},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,m-1},\ k=\overline{j+1,m},\ \ell=1,2. \tag{41}$$

На основании п. "а" теоремы 1 к ограничениям задачи (27)-(29) можно добавить

$$u_i, w_{jk}\in\{0, 1/2, 1\},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,m-1},\ k=\overline{j+1,m}. \tag{42}$$

Рассмотрим отображение из области (39)-(41) в область (28), (29), (42):

$$u_i = 1/2\,(p_i^1+p_i^2),\quad i=\overline{1,m}; \tag{43}$$

$$w_{jk}=1/2\,(q_{jk}^1+q_{jk}^2),\ j=\overline{1,m-1},\ k=\overline{j+1,m}. \tag{44}$$

Проверим допустимость. Ясно, что $u_i\,,\ w_{jk} \in \{0,\ 1/2\,,\ 1\}$. Кроме того, имеем

$$u_j + u_k + w_{jk} = 1/2(p_j^1 + p_k^2 + q_{jk}^1) + 1/2(p_j^2 + p_k^1 + q_{jk}^2) \geq 1\,.$$

Значения целевых функций (27) и (38) на соответствующих по формулам (43), (44) допустимых решениях совпадают.

Пусть теперь (u_i), (w_{jk}) - допустимое решение системы (28), (29), (42). Положим

$$p_i^\ell = \begin{cases} 1 &, \text{если} \quad u_i = 1\,; \\ 1 &, \text{если} \quad u_i = 1/2,\ \ell = 1\,; \\ 0 &, \text{если} \quad u_i = 1/2,\ \ell = 2; \\ 0 &, \text{если} \quad u_i = 0\,. \end{cases} \tag{45}$$

$$q_{jk}^\ell = \begin{cases} 1 \ , \text{если} \quad w_{jk} = 1\,; \\ max\{0, 1 - p_j^1 - p_k^2\} &, \text{если} \quad w_{jk} = 1/2,\ \ell = 1\,; \\ max\{0, 1 - p_j^2 - p_k^1\} &, \text{если} \quad w_{jk} = 1/2,\ \ell = 2; \\ 0 \ , \text{если} \quad w_{jk} = 0\,. \end{cases} \tag{46}$$

Ограничения (39)-(40) несложно проверить перебором всех случаев. Пусть, например, $u_j = 1/2$, $u_k = 0$, $w_{jk} = 1/2$. Тогда $p_j^1 = 1$, $p_j^2 = 0$, $p_k^\ell = 0$, $q_{jk}^1 = 0$, $q_{jk}^2 = 1$, $\ell = 1, 2$, и справедливость неравенств (39), (40) в случае таких j и k очевидна. Нетрудно показать, что значение целевой функции на допустимом решении задачи (27)-(29) не меньше значения целевой функции (38) на соответствующем, согласно формулам (45)-(46), допустимом решении задачи (38)-(41).

Таким образом, выполнены условия признака сводимости, и, следовательно, задача (27)-(29) сводится к задаче (38)-(41). Для завершения доказательства остается заметить, что по лемме 2 из [3], задача (38)-(41) сводится к задаче (37).

Из доказанной теоремы и теоремы 1 работы [2] вытекает, что задача (27)-(29) сводится к задаче о максимальном потоке в двудольной сети, имеющей $2m$ внутренних вершин. Таким образом, если при поиске максимального потока использовать алгоритм Карзанова [11], то трудоемкость построения нижней оценки полинома (22) будет $O(m^3)$, трудоемкость построения нижней оценки квадратичного полинома общего вида соответственно $O(m^3 + p^3)$, где m - число переменных, p - число нелинейных членов с отрицательными коэффициентами.

§ 5. Алгоритмы решения задачи (22)

Рассмотрим следующий приближенный алгоритм, состоящий из двух этапов.

На первом этапе отыскивается оптимальное решение $(\tilde{u}_i^*)$, $(\tilde{w}_{kj}^*)$ задачи (27)-(29), обладающее свойством (31).

На втором этапе полагаем

$$\tilde{u}_i = \begin{cases} 1 & \text{, если } \tilde{u}_i^* > 0\,, \\ 0 & \text{, если } \tilde{u}_i^* = 0\,, \end{cases}$$

$$\tilde{w}_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{, если } \tilde{w}_{jk}^* > 0\,, \\ 0 & \text{, если } \tilde{w}_{jk}^* = 0\,. \end{cases}$$

Очевидно, что $(\tilde{u}_i)$, $(\tilde{w}_{jk})$ - допустимое решение задачи (27)-(30). В качестве приближенного решения задачи (22) берем булев вектор $\tilde{x}_i = 1 - \tilde{u}_i$, $i = \overline{1,m}$.

Оценим точность алгоритма. Обозначим значения целевой функции (27) на решениях $(\tilde{u}_i^*)$, $(\tilde{w}_{jk}^*)$, $(\tilde{u}_i)$, $(\tilde{w}_{jk})$, и оптимальном решении соответственно $\tilde{\Phi}^*$, $\tilde{\Phi}$ и Φ^*. Значения полинома (22) на приближенном решении $(\tilde{x}_i)$ и оптимальном решении (x_i^*) обозначим соответственно $\tilde{P}$ и P^*. Тогда, поскольку $\tilde{\Phi}^* \le \Phi^* = P^*$ и $\tilde{P} \le \tilde{\Phi}$, имеем

$$\frac{\tilde{P}}{P^*} \le \frac{\tilde{\Phi}}{\Phi^*} \le \frac{\tilde{\Phi}}{\tilde{\Phi}^*} \le 2\,.$$

В [10] приведен пример, показывающий, что эта оценка неулучшаема даже в частном случае задачи о вершинном покрытии минимальной мощности.

Трудоемкость построенного алгоритма определяется трудоемкостью первого этапа и, следовательно, равна $O(m^3)$.

Установленные выше специфические свойства (теоремы 1 и 2) задачи минимизации квадратичного полинома (22) эффективно могут быть использованы при построении улучшенного варианта метода ветвей и границ для решения данной задачи. Здесь мы представим лишь краткое схематическое описание этой модификации. Нижняя граница на каждом шаге алгоритма находится из решения задачи о максимальном потоке в двудольной сети. К ней сводится задача (37) (см. [3]). При этом мы получаем оптимальное решение задачи (38)-(41), а из него, по формулам (43)-(44), оптимальное решение $(\tilde{u}_i^*)$, $(\tilde{w}_{jk}^*)$ задачи (27)-(29). Если это решение булево, то вектор $x_i^* = 1 - \tilde{u}_i^*$, $i = \overline{1,m}$, является оптимальным решением задачи (22) на рассматриваемом подмножестве. Если же нет, то, на основании п. "б" теоремы 1, при переходе к следующему шагу (в случае одностороннего ветвления) мы можем зафиксировать все булевы компоненты вектора $(1 - \tilde{u}_i^*)$, существенно сокращая тем самым количество просматриваемых подмножеств допустимых решений. Указанные факторы, а также плотная нижняя граница обеспечивают значительное уменьшение числа шагов алгоритма по сравнению с известными ранее реализациями [4, 5].

Поступила в ред.-изд.отдел
4 марта 1984 г.

Литература

1. Агеев А.А. Об одной двухуровневой задаче стандартизации. – В кн.: Материалы Всесоюзной научной студенческой конференции. Математика. Новосибирск, 1979, с. 3-8.

2. Агеев А.А. О минимизации некоторых полиномов от булевых переменных. – В кн.: Целочисленные экстремальные задачи (Управляемые системы), Новосибирск, 1981, вып. 21, с. 3-5.

3. Агеев А.А. О сложности задач минимизации полиномов от булевых переменных. – В кн.: Экстремальные задачи исследования операций (Управляемые системы), Новосибирск, 1983, вып.23, с. 3-11.

4. Береснев В.Л., Гимади Э.Х., Дементьев В.Т. Экстремальные задачи стандартизации. – Новосибирск: Наука, 1978. – 333 с.

5 Береснев В.Л. Алгоритмы минимизации полиномов от булевых переменных. – Проблемы кибернетики, 1979, вып.36, с. 225-246.

6. Трубин В.А. Универсальность одного класса квадратичных целочисленных задач. – Кибернетика, 1977, № 2, с. 147.

7. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – М.: Мир, 1982, – 416 с.

8. Nemhauser G.L., Trotter L.E. Properties of vertex packing and independence system polyhedra. – Math. Program., 1974, v.6, p. 48-61.

9. Nemhauser G.L., Trotter L.E. Vertex packings: structural properties and algorithms. – Math. Program., 1975, v.8, p. 232-248.

10. Hochbaum D.S. Efficient bounds for the stable set, vertex cover and set packing problems. – Discrete Applied Mathematics, 1983, v.6, p. 243-255.

11. Адельсон-Вельский Г.М., Диниц Е.А., Карзанов А.В. Потоковые алгоритмы. – М.: Наука, 1975. -119с.