Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1984 г., вып. 25

УДК 519.8

О СРАВНЕНИИ ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНЫХ АЛГОРИТМОВ ОТСЕЧЕНИЯ

О.А.Заблоцкая

В [2] на основе $\mathcal{L}$-разбиения введен в рассмотрение класс вполне регулярных отсечений $\mathcal{T}^*(\bar{x})$, даны необходимые и достаточные условия принадлежности линейного неравенства этому классу, показано, что он обладает конечным числом порождающих, получены нижняя и верхняя оценки числа итераций для процессов, основанных на вполне регулярных отсечениях. Данная работа посвящена вопросам сравнения отсечений этого класса и основанных на них алгоритмов. Краткое сообщение об излагаемых результатах имеется в [1]. В работе показывается, что в $\mathcal{T}^*(\bar{x})$, в отличие от его подкласса $\mathcal{T}(\bar{x})$, изучавшегося в [3], нет "самого сильного" отсечения, однако некоторое расширение $\mathcal{T}^*(\bar{x})$ (замыкание соответствующего конуса отсечений) содержит конечную совокупность, обладающую указанным свойством. Устанавливается, что любой из рассматриваемых алгоритмов по числу итераций не быстрее чем процесс на выделенной совокупности. Аналогичный результат для класса $\mathcal{T}(\bar{x})$ был ранее получен в [4].

§ 1. Вполне регулярные отсечения

В [1-4] для исследования двойственных процессов отсечения используется понятие $\mathcal{L}$-отрезка как элемента $\mathcal{L}$-разбиения пространства R^n, т.е. разбиения на классы эквивалентности следующего типа:

а) каждая целочисленная точка z образует отдельный класс $\langle z \rangle$;

б) нецелочисленные точки x и y эквивалентны, если $\varphi(x) = \varphi(y)$, $[x_{\varphi(x)}] = [y_{\varphi(x)}]$, $x_i = y_i$, $i = 1,\dots,\varphi(x)-1$, где $\varphi(x) = \min\{i : x_i \neq [x_i],\ i = 1,\dots,n\}$.

Пусть $Z^{n,s}$ - множество всех n-мерных векторов, у которых первые s координат целые (s фиксировано), Ω - выпуклое замкнутое множество из куба

$$\mathcal{B}^n = \{x:\ 0 \le x_i \le 1,\ i = 1,\dots,n\}.$$

Рассмотрим задачу отыскания лексикографически максимального элемента множества $\Omega \cap Z^{n,s}$:

$$z^* = \operatorname{lex\,max}(\Omega \cap Z^{n,s}). \tag{1}$$

Предположим, что $\bar{x} = \operatorname{lex\,max}\Omega$ и $\bar{x} \notin Z^{n,s}$. В процессе решения задачи

(1) двойственным алгоритмом отсечения из Ω непременно должны быть исключены точки дробного накрытия, т.е. множества

$$\Omega_* = \{x :\ x \in \Omega,\ x \succ z \quad \forall z \in \Omega \cap Z^{n,s}\}.$$

Линейное неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_j x_j \le \gamma_0 \qquad (2)$$

с вещественными коэфициентами γ_j, $j = 0, 1, \ldots, n$, назовем вполне регулярным отсечением (точки $\bar{x}$), если:

1) оно исключает весь L-отрезок $V_{\bar{x}}$ куба B^n, содержащий точку $\bar{x}$;

2) $(\gamma, z) \le \gamma_0$ для любого $z \in B^n \cap Z^{n,s}$ такого, что $\bar{x} \succ z$.

Множество всех вполне регулярных отсечений (точки $\bar{x}$) обозначим через $\mathcal{T}^*(\bar{x})$. Введем в рассмотрение множества:

$$J_0(\bar{x}) = \{j :\ \bar{x}_j = 0,\ j = 1, \ldots, \varphi(\bar{x}) - 1\},$$

$$J_+(\bar{x}) = \{j :\ \bar{x}_j = 1,\ j = 1, \ldots, \varphi(\bar{x}) - 1\},$$

$$J_+^j(\bar{x}) = \{k :\ k \in J_+(\bar{x}),\ k < j\},\quad j \in J_0(\bar{x}).$$

Т е о р е м а 1 [2]. Класс отсечений $\mathcal{T}^*(\bar{x})$ совпадает с множеством всех неотрицательных линейных комбинаций следующих неравенств:

$$x_j \le 1, \qquad j \in J_+(\bar{x}); \qquad (3)$$

$$-x_j \le 0, \qquad j \in J_0(\bar{x}); \qquad (4)$$

$$\sum_{k \in J_+^j(\bar{x})} x_k + x_j \le |J_+^j(\bar{x})|, \quad j \in J_0(\bar{x}); \qquad (5)$$

$$\sum_{k \in J_+(\bar{x})} x_k + x_{\varphi(\bar{x})} \le |J_+(\bar{x})|, \qquad (6)$$

причем последнее входит в эти комбинации с положительным коэффициентом.

Обозначим через $\bar{\mathcal{T}}^*(\bar{x})$ множество всех неотрицательных линейных комбинаций неравенств (3)-(6). (Множество $\bar{\mathcal{T}}^*(\bar{x})$ отличается от $\mathcal{T}^*(\bar{x})$ тем, что неравенство (6) может входить в эти комбинации с нулевым коэффициентом.) Нетрудно видеть, что $\bar{\mathcal{T}}^*(\bar{x})$ является замыканием множества $\mathcal{T}^*(\bar{x})$ в евклидовой метрике. Элементы $\bar{\mathcal{T}}^*(\bar{x})$, как и элементы $\mathcal{T}^*(\bar{x})$, будем называть отсечениями.

Опишем двойственный процесс отсечения T^* для решения задачи (1), основанный на отсечениях класса $\bar{\mathcal{T}}^*(\bar{x})$.

П р о ц е с с T^*.

0) Полагаем $\Omega^{(1)} = \Omega$, $k = 1$.

1) Находим $x^{(K)} = \mathrm{lex\,max}\, \Omega^{(K)}$. Если $x^{(K)} \in Z^{n,s}$ или $\Omega^{(K)} = \emptyset$, то процесс заканчивается. В первом случае получено оптимальное решение задачи (1), во втором случае решения нет.

2) Заменяем $\Omega^{(K)}$ на $\bar{\Omega}^{(K)}$ путем исключения из текущей системы ограничений некоторых отсечений. При этом должно выполняться условие $x^{(K)} = \mathrm{lex\,max}\, \bar{\Omega}^{(K)}$.

3) Строим конечную совокупность отсечений $\Gamma^{(K)} \subseteq \bar{\mathcal{T}}^*(x^{(K)})$, $\Gamma^{(K)} \cap \mathcal{T}^*(x^{(K)}) \neq \emptyset$.

4) Присоединяем все линейные неравенства совокупности $\Gamma^{(K)}$ к ограничениям задачи, полагаем

$$\Omega^{(K+1)} = \Omega^{(K)} \cap \{x : (\gamma, x) \leq \gamma_0 \ \text{для всех отсечений из}\ \Gamma^{(K)}\},$$

$K := K+1$, и переходим к шагу 1.

Аналогичный процесс с использованием одного вполне регулярного отсечения на каждой итерации рассматривался в [2], и для него был получен следующий результат. Обозначим указанный процесс T_1^*, $|\Omega_*/\mathcal{L}|$ – число $\mathcal{L}$-отрезков дробного накрытия множества Ω, $\mathcal{J}_{T_1^*}(\Omega)$ – число итераций некоторой реализации процесса T_1^* при решении задачи (1) на множестве $\Omega \subset \mathcal{B}^n$.

Теорема 2 [2]. Для задачи (1) и любой реализации процесса T_1^* имеют место соотношения

$$\frac{1}{s}|\Omega_*/\mathcal{L}| \leq \mathcal{J}_{T_1^*}(\Omega) \leq |\Omega_*/\mathcal{L}|. \tag{7}$$

§ 2. Сравнение алгоритмов

Поставим в соответствие неравенству (2) точку $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n, \gamma_0)$ пространства R^{n+1}. Так как установленное соответствие взаимно-однозначно, то мы будем отождествлять точку $\bar{\gamma}$ и отвечающее ей неравенство (2).

Будем говорить, что совокупность отсечений Γ' не сильнее совокупности Γ, если $Q \subseteq Q'$, где $Q = \{x \in \Omega_* : (\gamma, x) \leq \gamma_0, \forall \bar{\gamma} \in \Gamma\}$, $Q' = \{x \in \Omega_* : (\gamma', x) \leq \gamma_0', \forall \bar{\gamma}' \in \Gamma'\}$. Если Γ и Γ' содержат по одному отсечению, то получаем сравнение отсечений, рассматриваемое в [3].

Далее нам потребуются следующие обозначения. Через R_j, $j = 1, \dots, \varphi(\bar{x})-1$, обозначим точки пространства R^{n+1}, соответствующие неравенствам (3) и (4); Y_j, $j \in J_0(\bar{x})$, – точки, соответствующие неравенствам (5); S – неравенству (6).

В [3] был описан класс отсечений $\mathcal{T}(\bar{x})$, содержащий, в частности, отсечения $\mathcal{B}$-алгоритма [5] и являющийся подклассом $\mathcal{T}^*(\bar{x})$, порожденным неравенствами (3), (4), (6). Там же было доказано, что любое отсечение этого класса не сильнее отсечения S, которое рассматривалось в [6]. Для всего множества $\mathcal{T}^*(\bar{x})$ это утверждение, вообще говоря, неверно. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим следующий

Пример. Пусть дано множество $\Omega \subset R^4$:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3; \\ 2x_1 + 2x_4 = 3; \\ x_3 + x_4 = 1; \\ 0 \le x_i \le 1, \quad i = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

Очевидно, $\Omega \cap Z^4 = \emptyset$. $\bar{x} = \operatorname{lexmax} \Omega = (1, 0, 1/2, 1/2)$. Тогда $\varphi(\bar{x}) = 3$, $J_+(\bar{x}) = \{1\}$, $J_0(\bar{x}) = \{2\}$. Так как множество $J_0(\bar{x})$ состоит из единственного элемента, то в обозначении Y_j индекс j опустим. Для полученной точки $\bar{x}$ неравенства S и Y имеют вид:

$$S: \; x_1 + x_3 \le 1, \qquad Y: \; x_1 + x_2 \le 1.$$

Дробное накрытие множества Ω состоит из следующих L-отрезков:

$$V_1 = \{\bar{x}\}; \; V_2 = \{x \in \Omega : \; 0 < x_1 < 1\} =$$

$$= \{x \in R^4 : \; x = (\varepsilon, 2 - 2\varepsilon, \varepsilon - 1/2, 3/2 - \varepsilon), \; 1/2 < \varepsilon < 1\}.$$

Отсечение S исключает L-отрезок V_1 и ту часть V_2, для которой $3/4 < \varepsilon < 1$. Неравенство Y сохраняет V_1 и полностью отсекает L-отрезок V_2. Следовательно, отсечения S и Y несравнимы в смысле данного выше определения.

Рассмотрим вполне регулярное отсечение

$$\bar{\gamma} = 2Y + 3S: \quad 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 5.$$

Легко проверить, что $\bar{\gamma}$ отсекает L-отрезок V_1 и часть V_2, для которой $5/8 < \varepsilon < 1$. Следовательно, S не сильнее $\bar{\gamma}$.

Поставим в соответствие дробной точке $\tilde{x} \in B^n$ множество отсечений вида (5) и (6):

$$\Gamma(\tilde{x}) = \{S; \; Y_j, \; j \in J_0(\tilde{x})\}.$$

Теорема 3. Любая конечная совокупность отсечений класса $\bar{T}^*(\bar{x})$ не сильнее совокупности $\Gamma(\bar{x})$.

Доказательство. Докажем, что любое отсечение $\bar{\gamma}$ класса $\bar{T}^*(\bar{x})$ не сильнее совокупности $\Gamma(\bar{x})$. По теореме 1, $\bar{\gamma}$ можно представить в виде

$$\bar{\gamma} = \sum_{j=1}^{\varphi(\bar{x})-1} \alpha_j R_j + \sum_{j \in J_0(\bar{x})} \beta_j Y_j + \delta S.$$

Пусть точка x' сохраняется всеми отсечениями из $\Gamma(\bar{x})$. Тогда, очевидно, она удовлетворяет и неравенствам δS, $\beta_j Y_j$, $j \in J_0(\bar{x})$. Так как $\Omega \subset B^n$,

то и неравенства $\alpha_j R_j, j=1,\dots,\varphi(\bar{x})-1$, точкой x' не нарушаются. Следовательно, x' сохраняется отсечением $\bar{\gamma}$. Значит, $\bar{\gamma}$ и любая конечная совокупность отсечений из $\bar{\mathcal{J}}^*(\bar{x})$ не сильнее совокупности $\Gamma(\bar{x})$. Теорема доказана.

Перейдем теперь к исследованию двойственного процесса отсечения, основанного на неравенствах из $\Gamma(\bar{x})$. Обозначим через T_0^* двойственный процесс отсечения без отбрасывания, который использует на каждой итерации все неравенства совокупности $\Gamma(\bar{x})$, соответствующей оптимуму текущей непрерывной задачи.

Л е м м а 1. Пусть точки $x', x'' \in \mathcal{B}^n$ не эквивалентны и $x' \succ x''$. Если x'' отрезается некоторым отсечением из $\Gamma(x')$, то совокупность отсечений $\Gamma(x')$ не сильнее совокупности $\Gamma(x'')$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$J_+(x')=\{k_1,\dots,k_{p'}\},\quad J_0(x')=\{j_1,\dots,j_{q'}\}.$$

Так как точка x'' отрезается некоторым отсечением из $\Gamma(x')$, то $\varphi(x'')\in$ $\in J_+(x')$. Из условия $x' \succ x''$ следует, что

$$\varphi(x'')=\eta(x',x'')\equiv \min\{i:\ x_i'=x_i'',\ i=1,\dots,n\}.$$

Значит,

$$J_0(x'')=\{j_1,\dots,j_{q''}\},\quad q''\le q';$$

$$J_+(x'')=\{k_1,\dots,k_{p''}\},\quad p''<p'.$$

Обозначим элементы множеств $\Gamma(x')$ и $\Gamma(x'')$ соответственно через Y_j', $j\in J_0(x')$, S и Y_j'', $j\in J_0(x'')$, S''. В силу соотношения между множествами $J_0(x')$ и $J_0(x'')$ получаем, что Y_j'' совпадает с Y_j', $j\in J_0(x'')$. Неравенство S'' имеет вид

$$\sum_{i=1}^{p''} x_{k_i}+x_{k_{p''+1}}\le p''.$$

Для $t>q''$ неравенство Y_{j_t}' получается сложением неравенства S'' с тривиальными ограничениями вида:

$$x_k\le 1,\quad k\in J_+^{j_t}\setminus\{k_1,\dots,k_{p''+1}\};$$

$$x_{j_t}\le 1.$$

А отсечение S' есть сумма S'' и неравенств

$$x_{k_i}\le 1,\quad i=p''+2,\dots,p';$$

$$x_{\varphi(x')}\le 1.$$

Отсюда видно, что любая точка x из $\mathcal{B}^n$, удовлетворяющая всем неравенствам из $\Gamma(x'')$, будет сохраняться любым отсечением из $\Gamma(x')$. Следователь-

но, совокупность отсечений $\Gamma(x')$ не сильнее совокупности $\Gamma(x'')$. Лемма доказана.

Л е м м а 2. Пусть $X=\{x^{(t)}\}_{t=1}^{q}$ – последовательность, порождаемая процессом T_0^*, $y \in \mathcal{B}^n$ – нецелочисленная точка и $y \vdash x^{(p)}$ для некоторого $p \in \{1,\ldots,q-1\}$. Тогда любая совокупность неравенств из $\bar{\mathcal{T}}^*(y)$ отсекает не более одной точки $x^{(t)}, t \geq p$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что некоторая совокупность G неравенств из $\bar{\mathcal{T}}^*(y)$ отсекает точки $x^{(p')}$ и $x^{(p'')}$, $p \leq p' < p''$. Совокупность G не сильнее $\Gamma(y)$. Следовательно, точки $x^{(p')}$ и $x^{(p'')}$ отрезаются совокупностью $\Gamma(y)$. Но тогда, по лемме 1, $x^{(p'')}$ исключается некоторым отсечением множества $\Gamma(x^{(p')})$ и не может быть членом последовательности X, что противоречит предположению. Лемма доказана.

Т е о р е м а 4. Для решения задачи (1) процессом T_0^* потребуется итераций не больше чем для решения той же задачи процессом T^*.

Действительно, совокупность отсечений, построенная по любой точке y, порожденной процессом T^*, отсекает, согласно лемме 2, не более одной точки x последовательности X, $y \vdash x$. Следовательно, процессу T^* потребуется итераций не меньше чем процессу T_0^*.

Чтобы проиллюстрировать полученный результат, вернемся к рассмотренному выше примеру. Для решения задачи (1) на приведенном в примере множестве Ω процессом T^*, использующим только отсечения вида S, без отбрасывания отсечений потребуются две итерации, так как процесс регулярен, $|\Omega_*/\mathcal{L}| = 2$ и на первой итерации $\mathcal{L}$-отрезок V_2 исключается не полностью. На решение той же задачи процессом T_0^* нужна лишь одна итерация: совокупность $\Gamma(\bar{x})$ состоит из двух неравенств: S и Y, а каждое из них исключает полностью по одному из двух $\mathcal{L}$-отрезков, образующих дробное накрытие множества Ω, соответственно V_1 и V_2.

Заметим, что совокупность $\Gamma(\bar{x})$ является минимальным множеством в том смысле, что для некоторых задач (см. пример) никакое собственное подмножество $\Gamma(\bar{x})$ не будет "самым сильным".

Отметим еще, что глубина любой совокупности отсечений из $\bar{\mathcal{T}}^*(\bar{x})$, т.е. количество различных $\mathcal{L}$-отрезков дробного накрытия, исключаемых этой совокупностью, не больше числа s целочисленных переменных задачи (1). Это вытекает из вида $\mathcal{L}$-отрезков, которые могут быть отсечены [2]. Следовательно, для процесса остается справедливой нижняя оценка вида (7).

Поступила в ред.-изд.отдел
23 октября 1984 г.

Л и т е р а т у р а

1. Заблоцкая О.А. О вполне регулярных отсечениях на единичном кубе. - Тезисы докладов Ш Всесоюзного совещания "Методы и программы решения оптимизационных задач на графах и сетях", ч. П, Ташкент, август 1984. Новосибирск, 1984, с. 50.

2. Заблоцкая О.А., Колоколов А.А. Вполне регулярные отсечения в булевом программировании. - В кн.: Экстремальные задачи исследования операций (Управляемые системы). Новосибирск, 1983, вып. 23, с. 55-63.

3. Колоколов А.А. Нижняя оценка числа итераций для одного класса алгоритмов отсечения. - В кн.: Экстремальные задачи исследования операций (Управляемые системы). Новосибирск, 1983, вып. 23, с. 64-69.

4. Колоколов А.А. О наискорейшем алгоритме в одном классе регулярных процессов отсечения. - Тезисы докладов Ш Всесоюзного совещания "Методы и программы решения оптимизационных задач на графах и сетях", ч. П, Ташкент, август 1984. Новосибирск, 1984, с. 70.

5. Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. Дискретное программирование. - М.: Наука, 1969. - 368 с.

6. Лейтен А. О получении отсечений в -алгоритме. - В кн.: Уч. зап. Тартус. ун-та, 1972, вып. 305, с. 269-272.