Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1984 г., вып. 25.

УДК 519.854

ВЕРХНЯЯ ОЦЕНКА ЧИСЛА РЕГУЛЯРНЫХ ОТСЕЧЕНИЙ ДЛЯ ОДНОГО СЕМЕЙСТВА ЗАДАЧ НА КОНУСЕ

А.А.Колоколов, Е.В.Цепкова

При исследовании дробных алгоритмов отсечения целочисленного программирования (ЦП) в [1, 2] используется специальное разбиение ($\mathcal{L}$-разбиение) допустимой области соответствующей непрерывной задачи. На его основе получены верхняя оценка числа регулярных отсечений, требуемых для решения задачи ЦП (в общем случае), и нижняя оценка - для одного класса алгоритмов булева программирования.

В данной работе указанный подход применен к анализу однопараметрического семейства задач ЦП на конусе с параметром в правой части системы линейных ограничений. Построена верхняя оценка числа регулярных отсечений, общая для всего рассматриваемого семейства.

§ 1. Регулярный процесс отсечения

Пусть $\mathbb{Z}^n$ - множество всех n-мерных целочисленных векторов, Ω - выпуклое замкнутое множество из R^n, имеющее лексикографически максимальный элемент $\bar{x}$, причем $\bar{x} \bar{\in} \mathbb{Z}^n$. Рассмотрим следующую задачу ЦП: найти лексикографически максимальный элемент множества $\Omega \cap \mathbb{Z}^n$, т.е.

$$z^* = lexmax\,(\Omega \cap \mathbb{Z}^n). \tag{1}$$

При исследовании дробных алгоритмов отсечения особый интерес представляют те точки из Ω, которые должны быть отсечены в процессе решения задачи (1), а именно:

$$\Omega_* = \{x:\ x \in \Omega,\ x \succ z \quad \forall z \in \Omega \cap \mathbb{Z}^n\}.$$

Здесь $\succ$ - знак лексикографического сравнения. В дальнейшем множество Ω_* называется дробным накрытием. Если $\Omega \cap \mathbb{Z}^n = \emptyset$, то, очевидно, $\Omega_* = \Omega$. Нетрудно также показать, что для любого $p \in \mathbb{Z}^n$ и $\Omega' = \Omega + p$ имеют место соотношения:

1) $\Omega'_* = \Omega_* + p$;
2) если $z^* = lexmax(\Omega \cap \mathbb{Z}^n)$, то $z^* + p = lexmax(\Omega' \cap \mathbb{Z}^n)$.

Для изучения регулярного дробного процесса отсечения нам потребуются некоторые сведения об $\mathcal{L}$-разбиении. $\mathcal{L}$-разбиение множества $\Omega \subseteq R^n$ определяется следующим образом:

а) каждая точка $z \in Z^n$ образует отдельный класс разбиения;

б) нецелочисленные точки x и y эквивалентны, $x \overset{\mathcal{L}}{\sim} y$, если $\varphi(x) = \varphi(y)$, $x_i = y_i$, $i = 1, \dots, \varphi(x)-1$, $[x_{\varphi(x)}] = [y_{\varphi(x)}]$, где $\varphi(x) = \min\{i : x_i \neq [x_i], i = 1, \dots, n\}$. Соответствующее фактор-множество обозначим $\Omega/\mathcal{L}$. Его элементы называются $\mathcal{L}$-отрезками. Если $x \overset{\mathcal{L}}{\sim} y$ $(x \succ y)$, то x и y неотделимы, т.е. не существует $z \in Z^n$ такого, что $x \succ z \succ y$.

Для любого ограниченного Ω множество $\Omega/\mathcal{L}$ является конечным. Отметим также, что если $p \in Z^n$, то $(\Omega + p)/\mathcal{L} = \Omega/\mathcal{L} + p$.

Линейное неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_j x_j \leq \gamma_0$$

с вещественными коэффициентами γ_j, $j = 0, 1, \dots, n$, называется регулярным отсечением (точки $\bar{x}$), если выполнены следующие условия:

1) $(\gamma, x) > \gamma_0$ для всех $x \in V_{\bar{x}}$;

2) $(\gamma, z) \leq \gamma_0$ для всех $z \in \Omega \cap Z^n$,

где $V_{\bar{x}}$ - $\mathcal{L}$-отрезок множества Ω, содержащий точку $\bar{x}$.

П р о ц е с с $\mathcal{D}$

0) Полагаем $\Omega^{(1)} = \Omega$, $t = 1$.

1) Находим $x^{(t)} = \operatorname{lex\,max} \Omega^{(t)}$. Если либо $x^{(t)} \in Z^n$, либо $\Omega^{(t)} = \emptyset$, то процесс завершается. В первом случае получено оптимальное решение задачи (1), во втором - решения нет.

2) Заменяем $\Omega^{(t)}$ на $\bar{\Omega}^{(t)}$ путем исключения из текущей системы ограничений некоторых отсечений. При этом должно выполняться $x^t = \operatorname{lex\,max} \bar{\Omega}^{(t)}$.

3) Строим регулярное отсечение $(\gamma^{(t)}, x) \leq \gamma_0^{(t)}$.

4) Присоединяем полученное отсечение к ограничениям задачи, полагая

$$\Omega^{(t+1)} = \bar{\Omega}^{(t)} \cap \{x : (\gamma^{(t)}, x) \leq \gamma_0^{(t)}\}.$$

Переходим к следующей итерации на шаг 1, $t := t + 1$.

Пусть $J_{\mathcal{D}}(\Omega)$ - максимальное число отсечений, используемых процессом $\mathcal{D}$ при решении задачи (1). В [1] в терминах $\mathcal{L}$-разбиения получена верхняя оценка для $J_{\mathcal{D}}(\Omega)$.

Т е о р е м а 1. Для регулярного процесса отсечения $\mathcal{D}$ и задачи (1) с ограниченным дробным накрытием Ω_* имеет место неравенство

$$J_{\mathcal{D}}(\Omega) \leq |\Omega_*/\mathcal{L}|. \tag{2}$$

Эта теорема, очевидно, остается справедливой, если условие ограниченности заменить более слабым требованием конечности $\Omega_* / \mathcal{L}$.

§ 2. Исследование семейства задач на конусе

Пусть A - целочисленная $(n \times n)$-матрица, $\det A \neq 0$, b и d - целочисленные n-векторы. Для параметра $\lambda \in R$ определим конус $K^\lambda = \{x : Ax \leq b + \lambda d\}$. Предположим, что существует $\bar{x}(\lambda) = \operatorname{lexmax} K^0$. Легко увидеть, что тогда найдутся $\bar{x}(\lambda) = \operatorname{lexmax} K^\lambda$ для всех $\lambda \in R$.

Рассмотрим следующую задачу ЦП: найти лексикографически максимальный элемент $z^*(\lambda)$ множества $K^\lambda \cap Z^n$, т.е.

$$z^*(\lambda) = \operatorname{lexmax}(K^\lambda \cap Z^n). \tag{3}$$

Для фиксированного λ эта задача является частным случаем задачи (1), поэтому для нее справедлива оценка типа (2) при условии ограниченности K^λ_* : $J_{\mathcal{D}}(K^\lambda) \leq |K^\lambda_* / \mathcal{L}|$. Величина $|K^\lambda_* / \mathcal{L}|$ зависит от λ. Ниже будет построена верхняя оценка числа регулярных отсечений, общая для всего семейства задач (3) на конусах K^λ, $\lambda \in R$, которая не зависит от этого параметра. Отметим, что при сделанных выше предположениях $z^*(\lambda)$ существуют.

Перейдем к построению указанной оценки. Положим $\Phi(\lambda) = |K^\lambda_* / \mathcal{L}|$ и найдем $Q \doteq \min\{q : q \geq 1, q \in Z, q\hat{d}_j \in Z, \quad j = 1, \dots, n\}$, где $\hat{d}_j$ - j-я компонента вектора $\hat{d} = A^{-1} d$, $j = 1, \dots, n$. Ясно, что $Q \leq |\det A|$. Отметим ряд свойств задачи (3):

а) $\bar{x}(\lambda) = \bar{x}(0) + \lambda \hat{d}$;

б) $\lambda = iQ$, $i \in Z$, то $\lambda \hat{d} \in Z^n$;

в) для любых $\lambda, \mu \in R$ имеет место $K^{\lambda+\mu} = K^\lambda + \mu \hat{d}$.

Лемма 1. Для произвольных $i \in Z$ и $\lambda \in R$ справедливы соотношения:

$$K^{\lambda+iQ}_* = K^\lambda_* + iQ\hat{d}, \tag{4}$$

$$z^*(\lambda + iQ) = z^*(\lambda) + iQ\hat{d}, \tag{5}$$

$$\Phi(\lambda + iQ) = \Phi(\lambda). \tag{6}$$

Доказательство. Равенства (4), (5) следуют из свойств "а"-"в" задачи (3), целочисленности вектора $iQ\hat{d}$ и свойств сдвига на этот вектор. Из (4) и $iQ\hat{d} \in Z^n$ вытекает $K^{\lambda+iQ}_*/\mathcal{L} = K^i_*/\mathcal{L} + iQ\hat{d}$, откуда получаем (6). Лемма доказана.

Таким образом, ввиду периодичности $\Phi(\lambda)$, достаточно исследовать ее для $\lambda \in [0, Q)$. Нам необходимо исключить ситуации, когда $\Phi(\lambda) = +\infty$. Это достигается выделением тех конусов, для которых K^λ_* ограничено при любом $\lambda \in R$.

Для $y \in \mathbb{R}^n$ введем в рассмотрение конус $K(y)=\{x: Ax \leq y\}$. Положим $\tilde{x}(y) = \operatorname{lex}\max K(y)$, $\tilde{z}^*(y) = \operatorname{lex}\max(K(y) \cap \mathbb{Z}^n)$. Будем говорить, что $K(y)$ заострен по x_1, если $\tilde{x}_1(y) \geq x_1$ для всех $x \in K(y)$, $x \neq \tilde{x}(y)$. Например, если $x_0 = (c, x)$ имеет единственную точку максимума на конусе $A'x \leq b'$ (в вершине конуса), то легко видеть, что в $\mathbb{R}^{n+1}$ конус вида

$$x_0 - (c,x) \leq 0,$$
$$A'x \leq b'$$

является заостренным по x_0. Отметим, что если $K(y)$ заострен по x_1, то все конусы $K(y')$, $y' \in \mathbb{R}^n$, также обладают этим свойством.

Л е м м а 2. Дробное накрытие $K_*(y)$ ограничено для любого $y \in \mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда конус $K(\mathbf{0})$ заострен по x_1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $K(\mathbf{0})$ заострен по x_1. Построим множество

$$\bar{K}(y) = \{x: x \in K(y),\ x_1 \geq \tilde{z}_1^*(y)\}.$$

Ясно, что $K_*(y) \subseteq \bar{K}(y)$. Покажем, что $\tilde{K}(y)$ ограничено. Предположим противное. Так как $\bar{K}(y)$ выпукло и замкнуто, то в нем найдется луч вида

$$\mathcal{L} = \{u: u = \tilde{x}(y) + \lambda t,\ \lambda \geq 0\}$$

с направляющим вектором $t \neq \mathbf{0}$, который лежит в $K(\mathbf{0})$. Поскольку $\tilde{x}_1(y) \geq \tilde{x}_1(y) + \lambda t_1 \geq \tilde{z}^*_1(y)$ для всех $\lambda \geq 0$, то $t_1 = 0$. Но это противоречит заостренности по x_1 конуса $K(\mathbf{0})$.

Пусть теперь $K_*(y)$ ограничено при любом $y \in \mathbb{R}^n$. Выберем $y = \hat{y}$, для которого $\tilde{x}_1(\hat{y})$ дробное (это, очевидно, всегда можно сделать). Предположим, что $K(\mathbf{0})$ не удовлетворяет условию заостренности по x_1. Тогда в нем найдется вектор $t \neq \mathbf{0}$, у которого $t_1 \geq 0$. Ясно, что t_1 не может быть положительным. Следовательно, $t_1 = 0$. Но тогда в $K(\hat{y})$ содержится луч вида

$$\hat{\mathcal{L}} = \{u: u = \tilde{x}(\hat{y}) + \lambda t,\ \lambda \geq 0\}.$$

Так как $u_1 = \tilde{x}_1(\hat{y}) > \tilde{z}_1^*(\hat{y})$ для любого $u \in \hat{\mathcal{L}}$, то $\hat{\mathcal{L}} \subseteq K_*(\hat{y})$. Но это противоречит ограниченности $K_*(\hat{y})$. Лемма доказана.

Таким образом, для ограниченности K_*^λ достаточно потребовать выполнения условия заостренности по x_1 для $K(\mathbf{0})$. В этом случае $\Phi(\lambda) < +\infty$ для всех $\lambda \in [0, Q)$. Так как область значений $\Phi(\lambda)$ лежит в $\mathbb{Z}_+$, то она принимает лишь конечное число различных значений на этом отрезке. Следовательно, существует $\max \Phi(\lambda)$, $\lambda \in [0, Q)$. Отсюда и из теоремы 1 вытекает

Т е о р е м а 2. Если конус $K(\mathbf{0})$ является заостренным по x_1, то для регулярного процесса отсечения $\mathcal{D}$ и любого $\lambda \in \mathbb{R}$ имеет место оценка

$$J_{\mathscr{D}}(K^{\lambda}) \leq \max_{\mu\in[0,Q)} \Phi(\mu) . \tag{7}$$

Если параметр λ принимает лишь целые значения, то максимум в (7) достаточно взять по $\mu = 0, 1, \ldots, Q-1$. В некоторых случаях вместо условия заостренности по x_1 можно использовать более слабые. В частности, если $b = 0$ и $\lambda \in \mathbb{Z}$, то $\Phi(\lambda) < +\infty$ обеспечивается ограниченностью дробного накрытия K^1_*. Отметим также, что имеются семейства конусов для $\lambda \in \mathbb{Z}$, у которых свойство конечности $K^1_* / \mathscr{L}$ не переносится на все множества $K^{\lambda}_*/\mathscr{L}$.

В заключение рассмотрим численный пример. Пусть конус K^{λ} задается неравенствами

$$x_1 - 2x_2 \leq 10 ,$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 5 + \lambda .$$

Здесь $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $b = (10, 5)^T$, $d = (0,1)^T$, $|\det A| = 5$, $Q = 5$,

$\bar{x}(0) = z^*(0) = (8, 1)^T$. В случае $\mu = 5$ опять получаем точку из $\mathbb{Z}^2$: $\bar{x}(5) = z^*(5) = (10, 0)^T$. Функция $\Phi(\mu)$ имеет вид $\Phi(0) = \Phi(5) = 0$, $\Phi(4) = 1$, а для остальных $\mu \in [0, Q]$

$$\Phi(\mu) = \begin{cases} 2, & \mu \in (0, 2\frac{1}{2}) \cup (4,5); \\ 3, & \mu = 2\frac{1}{2}, 3; \\ 4, & \mu \in (2\frac{1}{2}, 3) \cup (3,4). \end{cases}$$

Так как $\max_{\mu\in[0,5)} \Phi(\mu) = 4$, то для решения любой задачи из приведенного семейства требуется не более 4 регулярных отсечений. Если $\lambda \in \mathbb{Z}$, то оценка равна 3.

Поступила в ред.-изд.отдел
30 марта 1983 г.

Литература

1. Колоколов А.А. Регулярные отсечения при решении задач целочисленной оптимизации. – В кн.: Целочисленные экстремальные задачи (Управляемые системы), вып. 21, Новосибирск, 1981, с. 18-25.

2. Колоколов А.А. Нижняя оценка числа итераций для одного класса алгоритмов отсечения. – В кн.: Экстремальные задачи исследования операций (Управляемые системы), вып. 23, Новосибирск, 1983, с. 64-69.

3. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. – М.: Мир, 1974, 519 с.