Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1985 г., вып. 26

УДК 519.854

ПРИБЛИЖЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ МИНИМИЗАЦИИ ПОЛИНОМОВ ОТ БУЛЕВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

А.А.Агеев

В ряде моделей оптимальной унификации [1] возникает задача минимизации полинома от булевых переменных вида:

$$\sum_{j=1}^{n_1} c_j\Big(1-\prod_{i\in\alpha_j} x_i\Big)+\sum_{j=n_1+1}^{n} c_j\prod_{i\in\alpha_j} x_i \to \min_{(x_i)}, \tag{1}$$

$$x_i\in\{0,1\},\ i=\overline{1,m}, \tag{2}$$

где $c_j \geqslant 0,\ \alpha_j\subset\{1,\ldots,m\},\ j=\overline{1,n},\ 1\leqslant n_1<n$.

Возможны два подхода к построению алгоритмов решения данной задачи – точный и приближенный. Точные алгоритмы решения задачи (1), (2) можно найти, например, в [2]. Все они имеют экспоненциальную оценку трудоемкости, что и неудивительно, поскольку эта задача NP-трудна [3]. Публикации, в которых бы содержались эффективные приближенные алгоритмы решения задачи (1), (2) с априорными оценками точности, нам не известны.

В настоящей работе предлагаются и исследуются два эффективных приближенных алгоритма решения задачи (1), (2). Установлены следующие качественные характеристики этих алгоритмов. Первый градиентный алгоритм имеет трудоемкость $O(m(n+\log_2 m))$ и неулучшаемую оценку точности

$$\max_{j=\overline{1,n_1}}|\alpha_j|\sum_{k=1}^{d}\frac{1}{k},$$

где

$$d=\max_{i=\overline{1,m}}\big|\{j: i\in\alpha_j,\ j\geqslant n_1+1\}\big|.$$

Второй алгоритм имеет неулучшаемую оценку точности $\max\limits_{j=\overline{n_1+1,n}}|\alpha_j|$. Оценка трудоемкости второго алгоритма в общем случае совпадает (по порядку) с оценкой трудоемкости метода эллипсоидов, примененного к некоторой специальной задаче линейного программирования. Отмечаются два важных частных случая задачи (1)-(2), в которых второй алгоритм удается реализовать с существенно меньшей трудоемкостью. В основе всех построений лежит переход к рас-

смотрению эквивалентной задачи целочисленного линейного программирования, обобщающей известную задачу о минимальном покрытии.

Определения общих понятий и замечания относительно используемой терминологии можно найти в [3, 4].

1. Сильная сводимость

Пусть P и Q – экстремальные задачи (классы индивидуальных задач с числовыми исходными данными) вида:

$$f(x) \to \min_{x \in X}, \qquad (P)$$

$$g(y) \to \min_{y \in Y}, \qquad (Q)$$

где целевые функции f и g неотрицательны. Обозначим через x^* оптимальное решение задачи $p \in P$. Допустимое решение x' задачи $p \in P$ назовем Δ -оптимальным, $\Delta \in R$, если

$$\frac{f(x')}{f(x^*)} \leqslant \Delta .$$

Пусть A – алгоритм решения задачи P, т.е. алгоритм, ставящий в соответствие исходным данным всякой задачи $p \in P$ некоторое допустимое решение $x_A \in X$. Оценкой точности алгоритма A будем называть функцию $\Delta(p)$, $p \in P$, такую, что для всех $p \in P$ решение x_A является $\Delta(p)$ -оптимальным. Оценку точности $\Delta(p)$ алгоритма A назовем неулучшаемой, если для любых $\varepsilon > 0$ и $d \in \{\Delta(p) : p \in P\}$ найдется задача $p \in P$ такая, что $\Delta(p) = d$ и

$$\frac{f(x_A)}{f(x^*)} \geqslant d - \varepsilon .$$

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что задача P сильно сводится к задаче Q, если, во-первых, существует эффективный алгоритм, ставящий в соответствие исходным данным всякой задачи $p \in P$ исходные данные некоторой задачи $\sigma(p) \in Q$, и, во-вторых, существует эффективный алгоритм, строящий по исходным данным задачи $\sigma(p)$ и любому ее Δ -оптимальному решению некоторое $h(\Delta)$ -оптимальное решение задачи p, где h – строго монотонно возрастающая функция такая, что $h(1) = 1$.

Сильная эквивалентность задач определяется стандартным образом.

Легко видеть, что из сильной сводимости вытекает обычная сводимость. В доказательствах сильной сводимости и выводе оценок точности будет использоваться более общая формулировка признака сводимости [4].

Признак сводимости. Пусть имеются эффективный алгоритм, преобразующий исходные данные задачи $p \in P$ в исходные данные задачи $\sigma(p) \in Q$ и отображения $\varphi : Y \to X$, $\psi : X \to Y$, порождаемые эффективными алгоритмами и обладающие свойствами

$$\forall y \in Y \quad f(\varphi(y)) \leq g(y),$$

$$\forall x \in X \quad g(\psi(x)) \leq f(x).$$

Тогда задача P сильно сводится к задаче Q. Кроме того, если y'– Δ-оптимальное решение задачи $\sigma(p)$, то $\varphi(y')$– Δ-оптимальное решение задачи p, и, наоборот, если x'– Δ-оптимальное решение задачи p, то $\psi(x')$–Δ-оптимальное решение задачи $\sigma(p)$.

2. Обобщенная задача о покрытии

Определение 2. Задачу

$$\sum_{k=1}^{\ell} c_k v_k \to \min_{(v_k),(u_k)}, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \geq 1, \quad j = \overline{1,n}, \tag{4}$$

$$v_k \geq b_{ik} u_i, \quad i = \overline{1,m}, \quad k = \overline{1,\ell}, \tag{5}$$

$$u_i, v_k \in \{0,1\}, \quad i = \overline{1,m}, \quad k = \overline{1,\ell}, \tag{6}$$

где $a_{ij}, b_{ik} \in \{0,1\}$, $c_k \geq 0$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,\ell}$, будем называть обобщенной задачей о покрытии.

Легко видеть, что задача (3)-(6) действительно обобщает обычную задачу о минимальном покрытии.

Теорема 1. Задача минимизации полинома (1)-(2) и обобщенная задача о покрытии (3)-(6) сильно эквивалентны.

Доказательство. Покажем, что задача (1)-(2) сильно сводится к задаче (3)-(6).

Задаче (1)-(2) поставим в соответствие следующую обобщенную задачу о покрытии:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j v_j \to \min_{(u_i),(v_j),(w_j)}, \tag{7}$$

$$\sum_{i \in \alpha_j} u_i + w_j \geq 1, \quad j = \overline{n_1+1,n}, \tag{8}$$

$$v_j \geqslant u_i\,,\ i \in \alpha_j\,,\ j = \overline{1,n_1}\,, \tag{9}$$

$$v_j \geqslant w_j\,,\ j = \overline{n_1+1,n}\,, \tag{10}$$

$$u_i\,, v_j\,, w_j \in \{0,1\},\ i = \overline{1,m}\,,\ j = \overline{1,n}\,. \tag{11}$$

Легко заметить, что задача (7)-(11) сильно эквивалентна задаче с ограничениями (8), (9), (11) и целевой функцией

$$\sum_{j=1}^{n_1} c_j v_j + \sum_{j=n_1+1}^{n} c_j w_j \longrightarrow \min_{(u_i),(v_j),(w_j)}\,. \tag{7'}$$

Рассмотрим следующее отображение области (8), (9), (11) в область допустимых решений задачи (1), (2):

$$x_i = 1 - u_i\,,\ i = \overline{1,m}\,. \tag{12}$$

Пусть (x_i) и (u_i), (v_j), (w_j) - допустимые решения задач (1)-(2) и (7′), (8), (9), (11), связанные соотношением (12). Убедимся в справедливости неравенства

$$\sum_{j=1}^{n_1} c_j \Big(v_j + \prod_{i\in\alpha_j} x_i - 1\Big) + \sum_{j=n_1+1}^{n} c_j \Big(w_j - \prod_{i\in\alpha_j} x_i\Big) \geqslant 0\,,$$

фигурирующего в условиях признака сводимости. Действительно, в силу (8),(11), (12) имеем

$$w_j \geqslant \max\Big\{0, 1 - \sum_{i\in\alpha_j} u_i\Big\} = \prod_{i\in\alpha_j} (1 - u_i) = \prod_{i\in\alpha_j} x_i\,,$$

$$j = \overline{n_1+1,n}\,.$$

Кроме того, из (9) вытекает $1 - v_j \leqslant 1 - u_i\,,\ i \in \alpha_j\,,\ j = \overline{1,n_1}$, откуда

$$1 - v_j \leqslant \prod_{i\in\alpha_j} (1 - u_i)\,,\ j = \overline{1,n_1}\,,$$

что эквивалентно

$$v_j + \prod_{i\in\alpha_j} x_i - 1 \geqslant 0\,,\ j = \overline{1,n_1}\,.$$

Пусть теперь (x_i) - булев вектор. Рассмотрим преобразование, задаваемое формулами:

$$u_i = 1 - x_i\,,\ i = \overline{1,m}\,, \tag{13}$$

$$v_j = \max_{i\in\alpha_j} (1 - x_i)\,,\ j = \overline{1,n_1}\,, \tag{14}$$

$$w_j = max\{0, \sum_{i \in \alpha_j} x_i - |\alpha_j| + 1\}, \ j = \overline{n_1 + 1, n}. \tag{15}$$

Проверим допустимость решения (u_i), (v_j), (w_j). Ограничения (9), (11), очевидно, выполняются. Кроме того, в силу (13), (15) имеем

$$\sum_{i \in \alpha_j} u_i + w_j = \sum_{i \in \alpha_j}(1 - x_i) + max\{0, \sum_{i \in \alpha_j} x_i - |\alpha_j| + 1\} \geq$$
$$\geq |\alpha_j| - \sum_{i \in \alpha_j} x_i + \sum_{i \in \alpha_j} x_i - |\alpha_j| + 1 = 1.$$

Остается показать неотрицательность величины

$$\sum_{j=1}^{n_1} c_j (1 - \prod_{i \in \alpha_j} x_i - v_j) + \sum_{j=n_1+1}^{n} c_j (\prod_{i \in \alpha_j} x_i - w_j).$$

Действительно, в силу (14) имеем

$$1 - \prod_{i \in \alpha_j} x_i \geq \max_{i \in \alpha_j} (1 - x_i) = v_j, \ j = \overline{1, n_1}.$$

Кроме того, из легко проверяемого тождества

$$\prod_{i \in \alpha_j} x_i = max\{0, \sum_{i \in \alpha_j} x_i - |\alpha_j| + 1\} \tag{16}$$

вытекает

$$w_j = \prod_{i \in \alpha_j} x_i, \ j = \overline{n_1 + 1, n}.$$

Таким образом, по признаку сводимости задача (1)-(2) сильно сводится к задаче (3)-(6).

Покажем, что задача (3)-(6) сильно сводится к задаче (1)-(2).

Задаче (3)-(6) поставим в соответствие следующую задачу минимизации полинома:

$$\sum_{k=1}^{l} c_k (1 - \prod_{i | b_{ik} = 1} x_i) + \Phi \sum_{j=1}^{n} \prod_{i | a_{ij} = 1} x_i \to \min_{(x_i)}, \tag{17}$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \ i = \overline{1, m}, \tag{18}$$

где $\Phi > \sum_{k=1}^{l} c_k$.

Формулами

$$u_i = \begin{cases} 1 - x_i, & \text{если } \sum_{j=1}^{n} \prod_{k | a_{ij} = 1} x_k = 0, \ i = \overline{1, m}, \\ 1 & \text{- в противном случае,} \end{cases} \tag{19}$$

$$v_k = \max_{i|b_{ik}=1} u_i \qquad (20)$$

зададим отображение областей допустимых решений задачи (17), (18) в область допустимых решений задачи (3)-(6). Допустимость решения (u_i), (v_k) в случае

$$\sum_{j=1}^{n} \prod_{i|a_{ij}=1} x_i > 0$$

очевидна. В случае

$$\sum_{j=1}^{n} \prod_{i|a_{ij}=1} x_i = 0$$

следует убедиться в справедливости неравенств (4). Действительно, в силу (16), (19) имеем

$$\max\left\{0, 1-\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i\right\} =$$

$$= \max\left\{0, \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_{ij} - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} + 1\right\} = \prod_{i|a_{ij}=1} x_i = 0 .$$

Сравним значения целевых функций (3) и (17) на соответствующих согласно (19), (20) допустимых решениях (x_i) и (u_i), (v_k). В случае

$$\sum_{j=1}^{n} \prod_{i|a_{ij}=1} x_i > 0$$

значение функции (17) строго больше значения функции (3) в силу выбора коэффициента Φ. В случае

$$\sum_{j=1}^{n} \prod_{i|a_{ij}=1} x_i = 0$$

для разности этих значений имеем оценку

$$\sum_{k=1}^{\ell} c_k \left(1-\prod_{i|b_{ik}=1} x_i - v_k\right) = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \left[1-\prod_{i|b_{ik}=1} x_i - \max_{i|b_{ik}=1}(1-x_i)\right] \geq 0 .$$

Преобразование области (4)-(6) в область (18) зададим формулами (12). Необходимо только показать неотрицательность величины

$$\sum_{k=1}^{\ell} c_k \left(v_k - \prod_{i|b_{ik}=1} x_i + 1\right) - \Phi \sum_{j=1}^{n} \prod_{i|a_{ij}=1} x_i ,$$

равной разности значений целевых функций (3) и (17). Действительно, в силу

(12) и (4) имеем

$$\prod_{i|a_{ij}=1} x_i = \prod_{i|a_{ij}=1} (1-u_i) = max\{0, 1-\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i\} = 0,\ j=\overline{1,n}.$$

Из (5) и (12) также получаем

$$v_K - \prod_{i|b_{iK}=1} x_i + 1 \geqslant \max_{i=\overline{1,m}} b_{iK} u_i - \prod_{i|b_{iK}=1} (1-u_i) + 1 =$$

$$= 2\left[1 - \prod_{i|b_{iK}=1} (1-u_i)\right] \geqslant 0.$$

Таким образом, сильная сводимость задачи (3)-(6) к задаче (1)-(2) также установлена.

Теорема доказана.

Теорема 1 позволяет перейти на более удобный "язык обобщенной задачи о покрытии". Для обратного перевода результатов следующих пунктов "на язык полиномов" необходимо воспользоваться преобразованиями допустимых решений, фигурирующими в доказательстве теоремы 1, и последним утверждением признака сводимости.

3. Градиентный алгоритм решения задачи (3)-(6)

Введем обозначения: $I=\{1,\dots,m\}$, $J=\{1,\dots,n\}$, $K=\{1,\dots,\ell\}$, $\alpha_i=\{j: a_{ij}=1\}$, $\beta_i=\{K: b_{iK}=1\}$, $i=\overline{1,m}$. Для векторов типа (v_j) будем также использовать упрощенную запись v без скобок и индексов компонент.

Переформулируем задачу (3)-(6) в терминах покрытий множествами.

Даны конечные множества I, J, K и наборы подмножеств $\alpha_1,\dots,\alpha_m \subset J$, $\beta_1,\dots,\beta_m \subset K$, занумерованных индексами из множества I. Элементам множества K приписаны неотрицательные веса c_K, $K \in K$. Для всякого $K' \subset K$ через $c(K')$ обозначим сумму $\sum_{K\in K'} c_K$. Подмножество $I' \subset I$ назовем покрытием, если $\bigcup_{i\in I'} \alpha_i = J$; весом покрытия I' назовем величину $c(\bigcup_{i\in I'} \beta_i)$. Обобщенная задача о покрытии есть задача отыскания покрытия $I^* \subset I$ минимального веса.

Предлагаемый градиентный алгоритм обобщает известный градиентный алгоритм [6] для обычной задачи о покрытии. Алгоритм состоит из шагов.

<u>Шаг 0</u>. Полагаем $I^0=\emptyset$, $\alpha_i^1=\alpha_i$, $\beta_i^1=\beta_i$, $i\in I$, и переходим к выполнению шага 1.

<u>Шаг τ ($\tau \geqslant 1$)</u>. Если $\alpha_i^\tau=\emptyset$ для всех $i \in I$, то алгоритм закончи-

вает работу и выдает результат – покрытие $I^g = I^{\tau-1}$. В противном случае отыскиваем номер $i' \in I$, на котором достигается

$$\min_{i | \alpha_i^\tau \neq \emptyset} \frac{\sum_{k \in \beta_i^\tau} c_k}{|\alpha_i^\tau|},$$

и, полагая

$$I^\tau = I^{\tau-1} \cup \{i'\},\ \alpha_i^{\tau+1} = \alpha_i^\tau \setminus \alpha_{i'}^\tau,\ \beta_i^{\tau+1} = \beta_i^\tau \setminus \beta_{i'}^\tau,\ i = \overline{1,m},$$

переходим к выполнению шага $\tau+1$.

Приближенное решение u^g, v^g задачи (3)-(6), соответствующее покрытию I^g, определяется по формулам

$$u_i^g = \begin{cases} 0, & \text{если } i \notin I^g, \\ 1, & \text{если } i \in I^g, \end{cases} \tag{21}$$

$$v_k^g = \max_{i \in I} b_{ik} u_i^g. \tag{22}$$

Оценим точность построенного алгоритма. Определим функцию $H(p)$, $p \in Z^+$, равенством

$$H(p) = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k}.$$

Обозначим через $F(u,v)$ значение целевой функции задачи (3)-(6) на допустимом решении u, v; через u^*, v^* – оптимальное решение этой задачи и положим

$$d = \max_{i=\overline{1,m}} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.$$

Т е о р е м а 2. Имеет место оценка

$$\frac{F(u^g, v^g)}{F(u^*, v^*)} \le H(d) \max_{k=\overline{1,l}} \sum_{i=1}^{m} b_{ik}. \tag{23}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим обобщенную задачу о покрытии с целевой функцией

$$\tilde F(u,v) = \sum_{k=1}^{l} c_k \Big[\sum_{i=1}^{m} b_{ik} H\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Big)\Big] v_k \to \min_{(u_i),(v_k)} \tag{24}$$

при прежних ограничениях (4)-(6).

Наряду с ограничением (6) введем в рассмотрение более слабое ограничение

$$u_i, v_K \geqslant 0, \quad i=\overline{1,m}, \quad K=\overline{1,\ell}. \qquad (6')$$

Задача, двойственная к непрерывной задаче (24), (4), (5), (6′), имеет вид:

$$D(s,t)=\sum_{j=1}^{n} s_j \rightarrow \max_{(s_j),(t_{iK})}, \qquad (25)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} s_j \leq \sum_{K=1}^{\ell} b_{iK} t_{iK}, \quad i=\overline{1,m}, \qquad (26)$$

$$\sum_{i=1}^{m} t_{iK} \leq c_K \Big[\sum_{i=1}^{m} b_{iK} H\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Big)\Big], \quad K=\overline{1,\ell}, \qquad (27)$$

$$s_j, t_{iK} \geqslant 0, \quad j=\overline{1,n}, \quad i=\overline{1,m}, \quad K=\overline{1,\ell}. \qquad (28)$$

Пусть $t=|I^g|$. Без ограничения общности можно считать, что $I^g=\{1,\dots,t\}$ и $I^{\tau}=\{1,\dots,\tau\}$, $\tau=\overline{1,t}$. С целью упрощения записи положим

$$p_i^{\tau}=\sum_{K\in\beta_i^{\tau}} c_K, \quad i\in I,$$

$$q_i^{\tau}=|\alpha_i^{\tau}|, \quad i\in I.$$

Из описания алгоритма вытекает, что

$$\frac{p_{\tau}^{\tau}}{q_{\tau}^{\tau}} \leq \frac{p_i^{\tau}}{q_i^{\tau}} \qquad (29)$$

для всех $i\in I$ и $\tau\in\{1,\dots,t\}$ таких, что $\alpha_i^{\tau}\neq\emptyset$.

Заметим, что (α_{τ}^{τ}) , $\tau=\overline{1,t}$, - разбиение множества J , и с учетом этого положим

$$\bar{s}_j=\frac{p_{\tau}^{\tau}}{q_{\tau}^{\tau}}, \quad j\in\alpha_{\tau}^{\tau}, \quad \tau=\overline{1,t}, \qquad (30)$$

$$\bar{t}_{iK}=c_K b_{iK} H\Big(\sum_{j\in J} a_{ij}\Big), \quad i\in I, \ K\in K. \qquad (31)$$

Покажем, что $\bar{s}=(\bar{s}_j)$, $\bar{t}=(\bar{t}_{iK})$ - допустимое решение задачи (25)-(28). Ограничения (27), (28), очевидно, выполняются. Убедимся в справедливости неравенств (26). Действительно, несложно увидеть, что $\alpha_i\cap\alpha_{\tau}^{\tau}=\alpha_i^{\tau}\setminus\alpha_i^{\tau+1}$,

и поэтому

$$\sum_{j\in J} a_{ij}\bar{\xi}_j = \sum_{\tau=1}^{t}\sum_{j\in\alpha_i\cap\alpha_\tau^\tau}\bar{\xi}_j = \sum_{\tau=1}^{t}\frac{p_\tau^\tau}{q_\tau^\tau}(q_i^\tau - q_i^{\tau+1}).$$

Пусть t' – наибольший номер такой, что $1 \le t' \le t$ и $q_i^{t'} > 0$. Из (29) и определений p_i^τ, q_i^τ путем несложных выкладок окончательно получаем

$$\sum_{j\in J} a_{ij}\bar{\xi}_j = \sum_{\tau=1}^{t'}\frac{p_\tau^\tau}{q_\tau^\tau}(q_i^\tau - q_i^{\tau+1}) \le \sum_{\tau=1}^{t'}\frac{p_i^\tau}{q_i^\tau}(q_i^\tau - q_i^{\tau+1}) \le$$

$$\le \sum_{k\in K} b_{ik}c_k\sum_{\tau=1}^{t'}(q_i^\tau - q_i^{\tau+1})/q_i^\tau \le$$

$$\le \sum_{k\in K} b_{ik}c_k\sum_{\tau=1}^{t'}(H(q_i^\tau) - H(q_i^{\tau+1})) =$$

$$= \sum_{k\in K} b_{ik}c_k H(\sum_{j\in J} a_{ij}) = \sum_{k\in K} b_{ik}\bar{t}_{ik}.$$

Далее, с учетом (30) имеем

$$\sum_{j\in J}\bar{\xi}_j = \sum_{\tau=1}^{t}\sum_{j\in\alpha_\tau^\tau}\bar{\xi}_j = \sum_{\tau=1}^{t} q_\tau^\tau\frac{p_\tau^\tau}{q_\tau^\tau} =$$

$$= \sum_{\tau=1}^{t} p_\tau^\tau = \sum_{k\in K} c_k v_k^g.$$

Следовательно, для допустимого решения $\bar{\xi}$, $\bar{t}$ задачи (25)-(28) имеет место равенство

$$D(\bar{\xi},\bar{t}) = F(u^g, v^g). \tag{32}$$

С другой стороны, из теоремы двойственности и выражения (24) для $\tilde{F}$ вытекает, что для всякого допустимого решения u, v задачи (3)-(6) справедливы неравенства

$$D(\bar{\xi},\bar{t}) \le \tilde{F}(u,v) \le H(d)\max(\sum_{k\in K} b_{ik})F(u,v).$$

Подставляя в эти соотношения оптимальное решение u^*, v^* и учитывая (32), получаем требуемую оценку (23).

Теорема доказана.

Покажем, что оценка (23) неулучшаема. Фиксируем целые положительные числа h, d и вещественное $\varepsilon > 0$. Рассмотрим задачу (3)-(6) с $m = h(d+1)$, $n = hd$, $\ell = hd+1$ и матрицами ограничений:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } & 1 \le i \le hd,\ i = j; \\ 1, \text{ если } & i \ge hd+1,\ i = hd+1+(j-1) \bmod h; \\ 0 & \text{– в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$b_{iK} = \begin{cases} 1, \text{ если } & 1 \le i \le hd,\ i = K; \\ 1, \text{ если } & i \ge hd+1,\ K = hd+1; \\ 0 & \text{– в остальных случаях.} \end{cases}$$

Положим

$$c_K = \begin{cases} \dfrac{1}{d-d'+1}, & \text{если } 1 \le K \le hd \text{ и } h(d'-1) \le K \le hd'; \\ 1+\varepsilon, & \text{если } K = hd+1. \end{cases}$$

Легко видеть, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$

$$u_i^g = \begin{cases} 1, & \text{если } i \le hd; \\ 0, & \text{если } i > hd, \end{cases}$$

$$v_K^g = \begin{cases} 1, & \text{если } K \le hd, \\ 0, & \text{если } K = hd+1; \end{cases}$$

$$u_i^* = \begin{cases} 1, & \text{если } i \ge hd+1; \\ 0, & \text{если } i \le hd; \end{cases}$$

$$v_K^* = \begin{cases} 1, & \text{если } K = hd+1; \\ 0, & \text{если } K \ne hd+1. \end{cases}$$

Таким образом,

$$F(u^g, v^g) = h\,H(d),$$

$$F(u^*, v^*) = 1+\varepsilon$$

и, следовательно,

$$\frac{F(u^g, v^g)}{F(u^*, v^*)} = \frac{h\,H(d)}{1+\varepsilon} \longrightarrow h\,H(d) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Остается только заметить, что

$$d = \max_{i=\overline{1,m}} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}, \quad h = \max_{K=\overline{1,\ell}} \sum_{i=1}^{m} b_{iK}.$$

Следствие. Существует приближенный алгоритм решения задачи (1)–(2) с неулучшаемой оценкой точности

$$\max_{j=\overline{1,n_1}} |\alpha_j| \sum_{k=1}^{d} \frac{1}{k},$$

где $d = \max|\{j: i \in \alpha_j,\ j \geq n_1+1\}|$, и трудоемкостью $O(m(n + \log_2 m))$.

4. Алгоритм, использующий решение задачи линейного программирования

Запишем задачу (7)-(11) в виде:

$$\sum_{k=1}^{\ell} c_k v_k + \sum_{j=1}^{n} d_j w_j \to \min_{(u_i),(v_k),(w_j)}, \tag{33}$$

$$\sum_{i \in \alpha_j} u_i + w_j \geq 1, \quad j = \overline{1,n}, \tag{34}$$

$$v_k \geq u_i, \quad i \in \beta_k, \quad k = \overline{1,\ell}, \tag{35}$$

$$u_i, v_k, w_j \geq 0, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}, \quad k = \overline{1,\ell}, \tag{36}$$

$$u_i, v_k, w_j \in \{0,1\}, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}, \quad k = \overline{1,\ell}, \tag{37}$$

где

$$c_k,\ d_j \geq 0,\ \alpha_j,\ \beta_k \subset \{1,\dots,m\}, \quad j = \overline{1,n}, \quad k = \overline{1,\ell}.$$

Через $F(u,v,w)$ обозначим значение целевой функции (33) на решении $u=(u_i)$, $v=(v_k)$, $w=(w_j)$. Множества I, J, K определим, как в п.3. Положим $\mu = \max_{j \in J} |\alpha_j|$.

Алгоритм состоит из трех этапов.

На 1-м этапе отыскивается оптимальное решение $(\tilde{u}_i^*)$, $(\tilde{v}_k^*)$, $(\tilde{w}_j^*)$ непрерывной задачи (33)-(36).

На 2-м этапе это решение преобразуется в решение $(\bar{u}_i)$, $(\bar{v}_k)$, $(\bar{w}_j)$, удовлетворяющее ограничениям (35), (36) и соотношениям

$$F(\bar{u},\bar{v},\bar{w}) \leq F(\tilde{u}^*,\tilde{v}^*,\tilde{w}^*), \tag{38}$$

$$\max\{\max_{i \in \alpha_j} \bar{u}_i, \bar{w}_j\} \geq \mu^{-1}, \quad j \in J. \tag{39}$$

Ниже следует формальное описание этапа, а затем его обоснование.

Этап состоит из конечной последовательности однотипных шагов. В начале каждого шага имеем решение u', v', w', для которого справедливы соотноше-

ния (35), (36), (38) и

$$\sum_{i \in \alpha_j} u_i' + w_j' \geq 1, \quad j \in J(u', v', w'), \tag{40}$$

где $J(u, v, w)$ - множество всех $j \in J$ таких, что

$$u_i < \mu^{-1}, \quad i \in \alpha_j,$$

$$w_j < \mu^{-1}.$$

На первом шаге $u' = \tilde{u}^*, \; v' = \tilde{v}^*, \; w' = \tilde{w}^*$.

Шаг начинается с проверки непустоты множества $J(u', v', w')$. Если $J(u', w', v') = \emptyset$, то решение u', v', w' обладает требуемыми свойствами (35), (36), (38), (39). В этом случае, полагая $\bar{u} = u'$, $\bar{v} = v'$, $\bar{w} = w'$, переходим к третьему этапу. В противном случае преобразуем решение u', v', w' в решение u'', v'', w'' такое, что

$$|J(u'', v'', w'')| < |J(u', v', w')|, \tag{41}$$

и для которого справедливы соотношения (35), (36), (38), (40). Опишем это преобразование. Обозначим:

$$I_1 = \{ i \in I : u_i' \geq \mu^{-1} \};$$

$$J_1 = \{ j \in J : \alpha_j \cap I_1 \neq \emptyset \vee w_j' \geq \mu^{-1} \};$$

$$J_2 = J \setminus J_1;$$

$$I_2 = \bigcup_{j \in J_2} \alpha_j;$$

$$I_0 = I \setminus (I_1 \cup I_2);$$

$$K' = \{ \kappa \in K : \beta_\kappa \cap I_2 \neq \emptyset \}.$$

Очевидно, $J_2 = J(u', v', w')$. Определим решение $u(\varepsilon)$, $v(\varepsilon)$, $w(\varepsilon)$, зависящее от вещественного параметра ε, следующим образом:

$$u_i(\varepsilon) = \begin{cases} u_i' & \text{, если } i \in I_1; \\ 0 & \text{, если } i \in I_0; \\ u_i' + \varepsilon & \text{, если } i \in I_2; \end{cases} \tag{42}$$

$$w_j(\varepsilon) = \begin{cases} w_j' & \text{, если } j \in J_1; \\ w_j' - |\alpha_j|\,\varepsilon & \text{, если } j \in J_2; \end{cases} \tag{43}$$

$$v_\kappa(\varepsilon) = \max_{i \in \beta_\kappa} u_i(\varepsilon), \quad \kappa \in K. \tag{44}$$

Положим

$$\varepsilon_1 = \min_{i \in I_2} (\mu^{-1} - u_i'),\ \varepsilon_2 = \min_{j \in J_2} \mu^{-1}(\mu^{-1} - w_j')$$

и $\varepsilon^* = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Из определений I_2 и J_2 следует, что $\varepsilon^* > 0$. Положим также

$$S = \sum_{j \in J_2} |\alpha_j| d_j - \sum_{\kappa \in K'} c_\kappa .$$

Если $S \geqslant 0$, то решение u', v', w' заменяется решением $u'' = u(\varepsilon^*)$, $v'' = v(\varepsilon^*)$, $w'' = w(\varepsilon^*)$. В случае $S < 0$ решение u', v', w' заменяется решением $u'' = u(-\varepsilon^*)$, $v'' = v(-\varepsilon^*)$, $w'' = w(-\varepsilon^*)$.

Для обоснования этапа достаточно показать, что построенное на произвольном шаге решение u'', v'', w'' удовлетворяет соотношениям (35), (36), (38), (40), (41). Тогда из (41) следует, что общее число шагов этапа не превосходит $|J|$.

Сформулируем и докажем несколько вспомогательных утверждений.

Л е м м а 1. Если $j \in J_2$, то $|\alpha_j| = \mu$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $j \in J_2$ и $|\alpha_j| < \mu$. Тогда из $|\alpha_j| + 1 \leq \mu$ и определения множества J_2 получаем

$$\sum_{i \in \alpha_j} u_i' + w_j' < \mu^{-1}(|\alpha_j| + 1) \leq \mu\mu^{-1} = 1,$$

что противоречит условию (40).

Л е м м а 2. Для любых $j \in J_2$ и ε имеет место

$$\sum_{i \in \alpha_j} u_i(\varepsilon) + w_j(\varepsilon) \geqslant 1 .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (40), (42), (43) имеем

$$\sum_{i \in \alpha_j} u_i(\varepsilon) + w_j(\varepsilon) = \sum_{i \in \alpha_j} u_i' + w_j' \geqslant 1,$$

что и требуется доказать.

Л е м м а 3. Пусть $\varepsilon \in [-\varepsilon^*, \varepsilon^*]$. Тогда справедливы соотношения:

$$0 \leq u_i(\varepsilon) \leq \mu^{-1},\ i \in I_2; \tag{45}$$

$$0 \leq w_j(\varepsilon) \leq \mu^{-1},\ j \in J_2; \tag{46}$$

$$v_\kappa(\varepsilon) = v_\kappa',\ \kappa \in K \setminus K'; \tag{47}$$

$$0 \leq v_\kappa(\varepsilon) \leq v_\kappa' + \varepsilon,\ \kappa \in K'. \tag{48}$$

Доказательство. Из определений ε^*, ε_1 и ε_2 вытекает, что для всякого $i \in I_2$ справедливы соотношения:

$$u_i(\varepsilon) = u_i' + \varepsilon \leq u_i' + \varepsilon^* \leq u_i' + \varepsilon_1 \leq \mu^{-1},$$

$$w_j(\varepsilon) = w_j' - \varepsilon\mu \leq w_j' + \varepsilon^*\mu \leq w_j' + \varepsilon_2\mu \leq \mu^{-1}.$$

Пусть теперь существуют $\varepsilon \in [-\varepsilon^*, \varepsilon^*]$, $j \in J_2$, $i' \in \alpha_j$ такие, что $u_{i'}(\varepsilon) < 0$. Тогда из доказанного и леммы 1 следует, что

$$\sum_{i \in \alpha_j} u_i(\varepsilon) + w_j(\varepsilon) < \sum_{i \in \alpha_j \setminus \{i'\}} u_i(\varepsilon) + w_j(\varepsilon) \leq \mu\mu^{-1} = 1,$$

но это противоречит утверждению леммы 2. К тому же противоречию приводит предположение $w_j(\varepsilon) < 0$ для некоторых $j \in J_2$ и $\varepsilon \in [-\varepsilon^*, \varepsilon^*]$. Таким образом, неравенства (45), (46) доказаны. Соотношения (47), (48) тривиально вытекают из (42), (44) и (45), (46).

Лемма доказана.

Из определений (42)-(44) и соотношений (47), (48) получаем, что для любого $\varepsilon \in [-\varepsilon^*, \varepsilon]$ имеет место

$$F(u', v', w') \geq F(u(0), v(0), w(0)) = F(u(\varepsilon), v(\varepsilon), w(\varepsilon)) + \varepsilon S.$$

Отсюда и по построению алгоритма имеем

$$F(u', v', w') \geq F(u'', v'', w'').$$

Это означает, что неравенство (38) для u'', v'', w'' выполнено. Справедливость соотношений (36) и (40) для u'', v'', w'' вытекает из лемм 2 и 3. Неравенство (41) верно в силу определения ε^*. Обоснование второго этапа, таким образом, завершено.

На третьем этапе полагаем:

$$\tilde{u}_i = \begin{cases} 1, \text{ если } \bar{u}_i \geq \mu^{-1}; \\ 0 - \text{в противном случае;} \end{cases} \qquad (49)$$

$$\tilde{w}_j = \begin{cases} 1, \text{ если } \bar{w}_j \geq \mu^{-1}; \\ 0 - \text{в противном случае;} \end{cases} \qquad (50)$$

$$\tilde{v}_k = \max_{i \in \beta_k} \tilde{u}_i, \quad k = \overline{1, l}. \qquad (51)$$

Нетрудно видеть, что в силу свойства (39) решение $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, $\tilde{w}$ является допустимым решением исходной задачи (33)-(37).

Оценим точность алгоритма. Пусть u^*, v^*, w^* - оптимальное решение задачи (33)-(37).

Т е о р е м а 3. Имеет место оценка

$$\frac{F(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w})}{F(u^*,v^*,w^*)} \le \mu .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о вытекает из соотношений (49)-(51) и (38). Имеем:

$$\frac{F(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w})}{F(u^*,v^*,w^*)} \le \mu \frac{F(\bar{u},\bar{v},\bar{w})}{F(\tilde{u}^*,\tilde{v}^*,\tilde{w}^*)} \le \mu .$$

Покажем неулучшаемость этой оценки. Зафиксируем натуральные числа p, t и рассмотрим индивидуальную задачу о покрытии с исходными данными: $K = I = J$, $|I| = pt+1$, $\beta_i = \{i\}$, $c_i = 1$, $d_i = \Phi$, $\alpha_i = \{(i-1) \bmod m+1,\ i \bmod m+1, \dots, (i+p-1) \bmod m+1\}$, $i=\overline{1,m}$, $\Phi > |I|$. Легко проверить, что в этом примере $\mu = p$,

$$F(u^*,v^*,w^*) = t+1,\quad F(\tilde{u}^*,\tilde{v}^*,\tilde{w}^*) = \frac{pt+1}{p},\quad F(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w}) = pt+1$$

и, следовательно,

$$\frac{F(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w})}{F(u^*,v^*,w^*)} = p - \frac{p-1}{t+1} \longrightarrow p \qquad \text{при } t \to \infty ,$$

что и необходимо показать.

З а м е ч а н и е. Трудоемкость построенного алгоритма определяется трудоемкостью выбранной процедуры решения задачи (33)-(36). В общем случае в качестве такой процедуры можно использовать метод эллипсоидов или симплекс-метод. В частных случаях не исключена возможность существования более эффективных алгоритмов решения задачи (33)-(36). В подтверждение этих слов приведем два примера. Во-первых, из теоремы 3 вытекает, что в случае $\mu = 1$ построенный алгоритм дает точное решение задачи (33)-(37), которое одновременно является оптимальным решением задачи (33)-(36). Этот случай, как нетрудно видеть, соответствует задаче минимизации полинома с неположительными коэффициентами при нелинейных членах, которая, как показано в [5], сводится к задаче о максимальном потоке. Во-вторых, очевидно, что построенный в [4] приближенный алгоритм решения задачи минимизации квадратичного полинома с трудоемкостью $O(m^3)$ фактически является конкретизацией описанного здесь метода. Задача (33)-(36) в этом случае также сводится к задаче о максимальном потоке.

С л е д с т в и е. Существует эффективный приближенный алгоритм решения задачи (1)-(2) с неулучшаемой оценкой точности

$$\max_{j=\overline{n_1+1,n}} |d_j| .$$

Поступила в ред.-изд.отдел
7 марта 1985 г.

Литература

I. Береснев В.Л., Гимади Э.Х., Дементьев В.Т. Экстремальные задачи стандартизации. - Новосибирск: Наука, 1978. - 333с.

2. Береснев В.Л. Алгоритмы минимизации полиномов от булевых переменных. - Проблемы кибернетики, 1979, вып. 36, с. 225-246.

3. Агеев А.А. О сложности задач минимизации полиномов от булевых переменных. - В кн.: Экстремальные задачи исследования операций (Управляемые системы), Новосибирск, 1983, вып. 23, с. 3-II.

4. Агеев А.А. О минимизации квадратичных полиномов от булевых переменных. - В кн.: Дискретные задачи оптимизации (Управляемые системы), Новосибирск, 1984, вып. 25, с. 3-I6.

5. Агеев А.А. О минимизации некоторых полиномов от булевых переменных. - В кн.: Целочисленные экстремальные задачи (Управляемые системы), Новосибирск, 198I, вып. 2I, с. 3-5.

6. Chvatal V. A greedy hewristic for the setcovering problem. - Math. Oper. Res., 1979, v. 4, p. 533-535.