Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1985 г., вып. 26

УДК 519.95

# ПОСТРОЕНИЕ ФИНИТНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

В.М.Александров, В.И.Болдырев, М.Е.Бессчетнов

Для нелинейной системы с выделенной линейной частью дается способ построения финитного управления, переводящего систему в нуль за конечное время. Искомое управление определяется формулой $u(t)=N(t)\lambda$, где $N(t)$ - кусочно-непрерывная матрица, а $\lambda$ - ограниченный вектор из $R^n$. Построение проводится в два этапа: по линейной части системы сначала строится матрица $N(t)$, затем, исходя из $N(t)$ и нелинейной системы, решением нелинейной системы алгебраических уравнений находится $\lambda$. При таком построении точки переключения управления $u(t)$, если они существуют, оказываются не зависящими от вектора начальных данных нелинейной системы, что упрощает техническую реализацию управления. Для линейных систем этот подход известен [1 - 3]. В настоящей работе предпринимается попытка распространить его на нелинейные системы.

## § 1. Постановка задачи

Пусть задана система дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}=A(t)x+B(t)u+f(t,x),\ t\in T=[t_0,t_1], \qquad (1)$$

$$x(t_0)=x_0,$$

где $x$ - фазовый $n$-вектор, $u$ — $r$-вектор управления, $A(t)$, $B(t)$ — $(n\times n)$-, $(n\times r)$-матрицы, $f(t,x)$ — $n$-вектор возмущений.

Через $C(\Omega)$, $C^1(\Omega)$ обозначим классы непрерывных, непрерывно-дифференцируемых в $\Omega$ функций. Предполагается, что $A(t)$, $B(t)\in C(T)$ и образуют полностью управляемую пару $\{A,B\}$, вектор $f(t,x)\in C(T\times R^n)$, а при фиксированных $t\in T$ этот вектор является элементом $C^1(R^n)$, причем

$$\|f_x(t,x)\|_{C(R^n)}\le\alpha(t). \qquad (2)$$

Здесь и ниже $\|\cdot\|$ - евклидова норма, а $\alpha(t)\in C(T)$.

Допустимыми управлениями будем считать функции вида

$$u(t)=N(t)\lambda, \qquad (3)$$

где $\lambda$ - постоянный $n$-вектор, а $N(t)$ — $(r \times n)$ -кусочно-непрерывная ограниченная на $T$ матрица.

Пусть $x(t, u)$ - решение системы (1) при фиксированном управлении $u$. В силу предположений относительно $f(t,x)$ это решение определено и единственно на интервале $T$.

Задача 1. Требуется найти управление вида (3), переводящее систему (1) за время $t_1 - t_0$ из начального состояния $x_0$ в нуль.

Условно эту задачу можно разбить на две: выбор матрицы $N(t)$ и нахождение вектора $\lambda$.

Пусть $e_j$ - $j$-й орт ($j = 1, \dots, n$), а $y(t)$ - решение системы

$$\dot{y} = A(t)y + B(t)w_j, \quad y(t_0) = e_j. \tag{4}$$

Здесь $w_j(t)$ - кусочно-непрерывное управление, переводящее линейную систему (4) за время $t_1 - t_0$ из $e_j$ в нуль. Так как $\{A, B\}$ - полностью управляемая пара, то такие управления существуют [1, 2]. В качестве $j$-го столбца матрицы $N(t)$ возьмем $N_j(t) \equiv N(t)e_j = w_j(t)$.

Пусть $\Phi(t)$ - фундаментальная матрица системы, причем $\Phi(t_0) = E$ - единичная матрица. Тогда в силу выбора $N(t)$ имеет место соотношение

$$\Phi(t_1)\left(e_j + \int_{t_0}^{t_1} \Phi^{-1}(t)B(t)N_j(t)\,dt\right) = 0 \qquad (j = 1, \dots, n).$$

Отсюда

$$e_j + \int_{t_0}^{t_1} \Phi^{-1}(t)B(t)N(t)e_j\,dt = 0 \qquad (j = 1, \dots, n)$$

или, в матричной форме,

$$E + \int_{t_0}^{t_1} \Phi^{-1}(t)B(t)N(t)\,dt = 0. \tag{5}$$

Отметим, что матрица $N(t)$ определяется указанным способом неоднозначно. Эту неоднозначность можно устранить дополнительным требованием $J(N_j) \to \min$ или $J_j(N_j) \to \min$, где $J, J_j$ $(j = 1, \dots, n)$ - некоторые функционалы.

В качестве $J$ можно взять, например, один из следующих функционалов:

$$J(N_j) = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{r} |N_{ij}(t)|\,dt, \quad |N_{ij}(t)| \le L_j \ (i = 1, \dots, r;\ j = 1, \dots, n),$$

где $L_j$ - константы;

$$J(N_j) = \int_{t_0}^{t_1} N_j'(t)N_j(t)\,dt \qquad (' \text{ - транспонирование});$$

$$J(N_j) = \|N_j(t)\|_{L_p[t_0,t_1]} \qquad (1 < p < \infty);$$

$$J(N_j) = \|N_j(t)\|_{L_\infty[t_0,t_1]}.$$

З а м е ч а н и е 1. После того как матрица $N(t)$ выбрана, допустимые управления (3) превращаются в линейную комбинацию известных функций. При указанном способе построения матрицы $N(t)$ они являются линейными комбинациями управлений, переводящих за время $t_1 - t_0$ орты в нуль вдоль линейной системы (4). Такие управления удобны в практических приложениях: точки переключения, если они существуют, не зависят от начального вектора $x_0$ и могут быть вычислены до начала процесса управления. Это свойство приобретает первостепенную важность при реализации быстродействующих процессов [3].

Пусть $x(t,\lambda)$ - решение системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)N(t)\lambda + f(t,x), \\ x(t_0,\lambda) &= x_0 . \end{aligned} \tag{6}$$

Поскольку матрица $N(t)$ выбрана, задачу 1 можно сформулировать как двухточечную краевую задачу с параметром.

З а д а ч а 1′. Требуется найти ограниченный в $R^n$ вектор $\lambda$ , при котором решение системы (6) удовлетворяет краевому условию

$$x(t_1,\lambda) = 0 . \tag{7}$$

Запишем решение системы (6) в форме Коши при $t = t_1$ и приравняем его к нулю:

$$x(t_1,\lambda) = \Phi(t_1)\Big\{x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi^{-1}(t)B(t)N(t)\,dt\cdot\lambda + \int_{t_0}^{t_1} \Phi^{-1}(t) f(t, x(t,\lambda))\,dt\Big\} = 0 .$$

Отсюда и из (5) получим

$$x_0 - \lambda + \int_{t_0}^{t_1} \Phi^{-1}(t) f(t, x(t,\lambda))\,dt = 0 . \tag{8}$$

Таким образом, для того чтобы найти параметр $\lambda$ , при котором выполнено краевое условие (7), необходимо решить относительно $\lambda$ систему нелинейных алгебраических уравнений (8).

Замечание 2. Если система (1) линейна по $x (f(t,x) \equiv \varphi(t))$, то решение задачи $1'$ существует и единственно.

Действительно, записав $x(t_1,\lambda)$ в форме Коши и воспользовавшись соотношением (5), получим

$$x(t_1,\lambda) = \Phi(t_1)\Big(x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi^{-1}(t)B(t)N(t)\,dt\cdot\lambda +$$

$$+\int_{t_0}^{t_1} \Phi^{-1}(t)\varphi(t)\,dt\Big) \equiv \Phi(t_1)\Big(x_0 - \lambda + \int_{t_0}^{t_1} \Phi^{-1}(t)\varphi(t)\,dt\Big) = 0 .$$

Отсюда

$$\lambda = x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi^{-1}(t)\varphi(t)\,dt .$$

## § 2. Теоремы существования и единственности

Приведем условия, при выполнении которых задача $1'$ имеет по крайней мере одно решение. Для доказательства существования решения нам понадобится следующая

Лемма 1 [4, с. 20]. Пусть векторное поле $F$ невырождено на границе $\Gamma$ ограниченной области $\Omega$ и принадлежит $C(\bar{\Omega})$, причем вращение $\gamma(F,\Omega)$ на границе $\Gamma$ не равно нулю. Тогда поле $F$ имеет в области $\Omega$ по крайней мере одну особую точку.

Из леммы 1 следует, что любой признак неравенства нулю вращения $\gamma(F,\Omega)$ векторного поля $F$ на границе $\Gamma$ области $\Omega$ является также признаком существования по крайней мере одного решения уравнения $F(\lambda)=0$ в области $\Omega$.

Теорема 1. Пусть вектор-функция $f(t,x)$ удовлетворяет условию (2), а также условию $\|f(t,x)\| \le P$ для всех $t \in T$, $x \in R^n$. Тогда решение $\lambda^*$ задачи $1'$ существует и принадлежит шару $\Omega_\rho = \{\lambda : \|\lambda\| < \rho\}$ радиуса

$$\rho > \|x_0\| + P\int_{t_0}^{t_1} \|\Phi^{-1}(t)\|\,dt . \tag{9}$$

Доказательство. Покажем, что выполнены условия леммы 1. Возьмем в качестве $\Omega$ шар $\Omega_\rho$ радиуса (9) с границей $\Gamma_\rho = \{\lambda : \|\lambda\| = \rho\}$. Так как правая часть системы (6) непрерывна по $\lambda$, то при любом $\rho$ векторное поле $x(t_1,\lambda)$ принадлежит $C(\bar{\Omega}_\rho)$. Нетрудно убедиться, что $x(t_1,\lambda)$ невырождено на $\Gamma_\rho$. Действительно, пусть

$$z(t_1,\lambda) = -\Phi^{-1}(t_1)\,x(t_1,\lambda),$$

а

$$\mathcal{D}(\lambda) = x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi^{-1}(t) f(t, x(t,\lambda))\,dt\,.$$

Проинтегрируем (6) в пределах от $t_0$ до $t_1$. Поскольку $\{A, B\}$ вполне управляема и имеет место соотношение (5), получим $z(t_1,\lambda) = \lambda - \mathcal{D}(\lambda)$. Так как согласно (9),

$$\|\lambda\| > \|\mathcal{D}(\lambda)\| \quad \text{при всех} \quad \lambda \in \Gamma_\rho\,, \tag{10}$$

то $\|z(t_1,\lambda)\| > 0$ при $\lambda \in \Gamma_\rho$. Итак, на границе $\Gamma_\rho$ векторное поле $x(t_1,\lambda)$ невырождено. Покажем, что при всех $\lambda \in \Gamma_\rho$ вращение $\gamma(x(t_1,\lambda), \Omega_\rho) \neq 0$.

Пусть $\lambda_0$ – произвольная внутренняя точка из $\Omega_\rho$. Рассмотрим деформацию $H(\xi,\lambda) = \lambda - (1-\xi)\mathcal{D}(\lambda) - \xi\lambda_0$, $\xi \in [0,1]$, $\lambda \in \bar{\Omega}_\rho$. При $\xi = 0$ она совпадает с невырожденным на $\Gamma_\rho$ полем $\lambda - \mathcal{D}(\lambda)$, а при $\xi = 1$ – с невырожденным на $\Gamma_\rho$ полем $\lambda - \lambda_0$. Убедимся, что при $\lambda \in \Gamma_\rho$, $\xi \in (0,1)$ векторное поле $H(\xi,\lambda)$ также невырождено. Действительно, в силу (10), $\mathcal{D}(\lambda)$ – внутренняя точка $\Omega_\rho$. Но $\lambda_0 \in \Omega_\rho$, поэтому при $\xi \in (0,1)$ точка $(1-\xi)\mathcal{D}(\lambda) + \xi\lambda_0 \in \Omega_\rho$ и, следовательно, $\|H(\xi,\lambda)\| > 0$ при всех $\lambda \in \Gamma_\rho$. Таким образом, деформация $H(\xi,\lambda)$ задает невырожденную при любом $\xi \in [0,1]$ гомотопию поля $\lambda - \mathcal{D}(\lambda)$ в поле $\lambda - \lambda_0$. Следовательно, $\gamma(\lambda - \mathcal{D}(\lambda), \Omega_\rho) = \gamma(\lambda - \lambda_0, \Omega_\rho) = 1$. Поэтому $\gamma(x(t_1,\lambda), \Omega_\rho) \neq 0$.

Условия леммы 1 выполнены. Следовательно, в шаре $\Omega_\rho$ существует хотя бы одно решение $\lambda^*$, $\|\lambda^*\| < \infty$, системы алгебраических уравнений (8). Теорема 1 доказана.

Нижеследующие условия на вектор-функцию $f(t,x)$ гарантируют, что решение задачи 1′ не только существует, но и единственно.

Т е о р е м а 2. Пусть вектор-функция $f(t,x)$ удовлетворяет условию (2), а величины

$$\delta = \int_{t_0}^{t_1} \|\Phi^{-1}(t)\| \cdot \|\Phi(t)\|\,\alpha(t)\,dt\,,$$
$$\beta = \int_{t_0}^{t_1} \|\Phi^{-1}(t)\,B(t)\,N(t)\|\,dt \tag{11}$$

удовлетворяют требованию

$$\gamma = (e^{\delta} - 1)\beta < 1\,. \tag{12}$$

Тогда решение задачи 1' существует и единственно.

Доказательство теоремы основано на леммах 2-4 и проводится по схеме работы [5].

Л е м м а 2 [5]. Пусть $Z(t)$ - решение матричного уравнения

$$\dot{Z}(t) = Q(t)Z(t) + R(t), \quad Z(t_0) = 0,$$

где $Q(t)$, $R(t)$ - непрерывные на $[t_0, t_1]$ квадратные матрицы.

Тогда имеет место оценка

$$\left\| Z(t) - \int_{t_0}^{t} R(\tau)\, d\tau \right\| \le \int_{t_0}^{t} \left[ \exp\left( \int_{s}^{t} \|Q(\tau)\|\, d\tau - 1 \right] \|R(s)\|\, ds .$$

Л е м м а 3 (о возмущении матрицы [6, с. 43]). Пусть $Z$, $W$ - квадратные матрицы, причем матрица $W$ обратима и $\|W^{-1}\| \le C$. Если $\|W - Z\| \le d$ и $Cd < 1$, то матрица $Z$ также обратима и $\|Z^{-1}\| \le C/(1 - Cd)$.

Л е м м а 4 (признак топологичности отображения [7]). Пусть отображение $F: R^n \longrightarrow R^n$ непрерывно дифференцируемо на $R^n$ и $\|(F_\lambda(\lambda))^{-1}\| \le \bar{\mu} < \infty$ при всех $\lambda \in R^n$. Тогда $F$ является топологическим отображением.

Известно [7], что если $F(\lambda)$ - топологическое отображение $R^n$ на $R^n$, то при любом фиксированном $y \in R^n$ уравнение $F(\lambda) = y$ имеет единственное решение.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 2. Покажем, что $x(t_1, \lambda)$ - топологическое отображение $R^n$ на $R^n$. Рассмотрим матрицу Якоби вектора $z(t, \lambda) = -\Phi^{-1}(t)\, x(t, \lambda)$, которая является решением системы

$$\dot{Z} = [\Phi^{-1}(t) f_x(t, x(t, \lambda))\, \Phi(t)] Z - \Phi^{-1}(t) B(t) N(t),$$

$$Z(t_0, \lambda) = 0 .$$

Из леммы 2 следует, что матрица $z_\lambda(t, \lambda)$ удовлетворяет неравенству

$$\left\| z_\lambda(t, \lambda) + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau) B(\tau) N(\tau)\, d\tau \right\| \le$$

$$\le \int_{s}^{t} \left[ \exp\left( \int_{s}^{t} \|\Phi^{-1}(\tau) f_x(\tau, x(\tau, \lambda))\, \Phi(\tau)\|\, d\tau \right) - 1 \right] \|\Phi^{-1}(s) B(s) N(s)\|\, ds .$$

Положив $t = t_1$, заменив показатель экспоненты на интеграл от $t_0$ до $t_1$ и используя соотношение (5), получим оценку

$$\| z_\lambda(t_1, \lambda) - E \| \le (e^{\delta} - 1)\beta, \tag{13}$$

где величины $\delta, \beta$ определяются по формулам (11).

Так как в силу (12) $(e^{\delta}-1)\beta < 1$, то из леммы 3 следует, что матрица $z_{\lambda}(t_1, \lambda)$ обратима и

$$\left\| \left[z_{\lambda}(t_1,\lambda)\right]^{-1} \right\| \leq \frac{1}{1-\gamma},$$

где $\gamma = (e^{\delta}-1)\beta$.

Поскольку $x_{\lambda}(t_1,\lambda) = -\Phi(t_1)\, z_{\lambda}(t_1,\lambda)$, то матрица $x_{\lambda}(t_1,\lambda)$ при всех $\lambda \in R^{n}$ невырождена и обратная к ней ограничена:

$$\left\| \left[x_{\lambda}(t_1,\lambda)\right]^{-1} \right\| \leq \frac{\|\Phi^{-1}(t_1)\|}{1-\gamma}.$$

Следовательно, согласно лемме 4 отображение $x(t_1, \lambda)$ является топологическим. Поэтому уравнение (8) имеет единственное решение.

Теорема 2 доказана.

## § 3. Приближенное решение задачи 1$'$

Задачу перевода системы (1) за время $t_1 - t_0$ из $x_0$ в нуль под действием управления (3), как указывалось ранее, условно можно разбить на две: нахождение матрицы $N(t)$, а затем – вектора $\lambda$. В этом параграфе матрицу $N(t)$ будем считать известной.

Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для поиска решения системы (8) можно использовать метод Ньютона, так как матрица Якоби $x_{\lambda}(t_1, \lambda)$ невырождена для всех $\lambda \in R^{n}$:

$$\lambda^{(0)} = x_0,$$

$$\dot{x}(t,\lambda^{(K)}) = A(t)\, x(t,\lambda^{(K)}) + B(t) N(t) \lambda^{(K)} + f(t, x(t,\lambda^{(K)})),$$

$$x(t_0, \lambda^{(K)}) = x_0,$$

$$\lambda^{(K+1)} = \lambda^{(K)} - \left[x_{\lambda}(t_1,\lambda^{(K)})\right]^{-1} x(t_1,\lambda^{(K)}), \quad K = 0, 1, \ldots$$

Этот алгоритм при практической реализации не всегда удобен, так как на каждой итерации требуется находить и обращать матрицу $x_{\lambda}(t_1,\lambda)$. Нуль функции $x(t_1, \lambda)$ может быть найден методом [8, с. 279]. В основу поиска $\lambda^{(K+1)}$ положено решение задачи перевода из точки в точку линейной системы вида

$$\dot{x}(t,\lambda^{K+1}) = A(t)\, x(t,\lambda^{(K+1)}) + B(t) N(t) \lambda^{(K+1)} + f(t, x(t,\lambda^{(K)})),$$

$$x(t_0, \lambda^{(K)}) = x_0 .$$

Однако при нахождении очередного $(K+1)$ -го приближения требуется запоминать всю траекторию $x(t, \lambda^{(K)})$, что сопряжено со значительными затратами оперативной машинной памяти.

Предлагаемый ниже алгоритм, как и метод Ньютона, использует информацию лишь о конечном состоянии и не требует вычислений матрицы $x_\lambda(t_1, \lambda)$ :

$$\lambda^{(0)} = x_0 ,$$

$$\dot{x}(t, \lambda^{(K)}) = A(t) \cdot x(t, \lambda^{(K)}) + B(t) N(t) \lambda^{(K)} + f(t, x(t, \lambda^{(K)})),$$

$$x(t_0, \lambda^{(K)}) = x_0 , \tag{14}$$

$$\lambda^{(K+1)} = \lambda^{(K)} + \sigma \Phi^{-1}(t_1)\, x(t_1, \lambda^{(K)}), \; K = 0, 1, \dots , \tag{15}$$

где $\sigma$ - шаг итерирования.

Итерационный процесс (14)-(15) представляет собой конечномерный вариант алгоритма [9, § 3].

Т е о р е м а 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда итерационный процесс (14)-(15) равномерно сходится к решению задачи 1′ при $0 < \sigma < 2m/M^2$, $m = 1 + \beta - e^{\delta}\beta > 0$, $M = e^{\delta}\beta$, где величины $\beta$, $\delta$ определяются формулами (11).

В основе доказательства этой теоремы лежит следующая

Л е м м а 5 [9]. Пусть в гильбертовом пространстве $H$ задан оператор $F(\lambda)$, удовлетворяющий условиям

$$\| F(\lambda) - F(\tilde{\lambda}) \| \le M \| \lambda - \tilde{\lambda} \| , \tag{16}$$

$$(F(\lambda) - F(\tilde{\lambda}), \lambda - \tilde{\lambda}) \ge m \| \lambda - \tilde{\lambda} \|^2 , \; m > 0 , \tag{17}$$

для любых $\lambda, \tilde{\lambda} \in H$. Тогда итерационный процесс

$$\lambda^{(K+1)} = \lambda^{(K)} - \sigma [F(\lambda^{(K)}) - \mu] , \; K = 0, 1, \dots ,$$

при $0 < \sigma < 2m/M^2$ сходится к единственному решению $\lambda^*$ уравнения $F(\lambda) = \mu$, начиная с произвольного $\lambda^0 \in H$.

В [9] показано, что при выполнении условий (17)-(18) оператор $\lambda - \sigma[F(\lambda) - \mu]$, $0 < \sigma < 2m/M^2$, является оператором сжатия с константой сжатия $q = (M^2\sigma^2 - 2m\sigma + 1)^{1/2}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 3. Покажем сначала, что условия леммы 5 выполнены для оператора $F(\lambda) = -\Phi^{-1}(t_1)\, x(t_1, \lambda)$, $\mu = 0$. Пусть $z(t, \lambda) = -\Phi^{-1}(t)\, x(t, \lambda)$. Нетрудно видеть, что

$$\|z(t,\lambda)-z(t,\tilde\lambda)\| \le \int_{t_0}^{t}\|\Phi^{-1}(\tau)B(\tau)N(\tau)\|\,d\tau\,\|\lambda-\tilde\lambda\| +$$
$$+\int_{t_0}^{t}\|\Phi^{-1}(\tau)[\varphi(\tau,x(\tau,\lambda))-\varphi(\tau,x(\tau,\tilde\lambda))]\|\,dt \le$$
$$\le\int_{t_0}^{t_1}\|\Phi^{-1}(\tau)B(\tau)N(\tau)\|\,d\tau\cdot\|\lambda-\tilde\lambda\|+\int_{t_0}^{t_1}\|\Phi^{-1}(\tau)\|\cdot\|\Phi(\tau)\|\,\alpha(t)\times$$
$$\times\|z(\tau,\lambda)-z(\tau,\tilde\lambda)\|\,d\tau.$$

Применяя лемму Гронуолла, заменяя в экспоненте верхний предел интегрирования на $t_1$ и используя (11), получаем, что

$$\|z(t,\lambda)-z(t,\tilde\lambda)\|\le e^{\delta}\beta\|\lambda-\tilde\lambda\|. \tag{18}$$

Полагая $t=t_1$ в (18), видим, что условия (16) леммы 5 выполнены.

Проверим выполнение условия (17). Из теоремы о среднем получим, что

$$(z(t_1,\lambda)-z(t_1,\tilde\lambda)\ \lambda-\tilde\lambda)=(\lambda-\tilde\lambda)'\int_0^1 z_\lambda(t_1,\lambda+\tau(\tilde\lambda-\lambda))(\lambda-\tilde\lambda)\,d\tau. \tag{19}$$

Очевидно, что

$$(\lambda-\tilde\lambda)'z_\lambda(t_1,\tilde\lambda)(\lambda-\tilde\lambda)=\|\lambda-\tilde\lambda\|^2-(\lambda-\tilde\lambda)'[E-z_\lambda(t_1,\tilde\lambda)](\lambda-\tilde\lambda).$$

Отсюда, применяя неравенство Коши-Шварца, имеем

$$(\lambda-\tilde\lambda)'z_\lambda(t_1,\tilde\lambda)(\lambda-\tilde\lambda)\ge\|\lambda-\tilde\lambda\|^2-\|z_\lambda(t_1,\tilde\lambda)-E\|\,\|\lambda-\tilde\lambda\|^2. \tag{20}$$

Из (19) в силу (20) и (13) следует, что

$$(z(t_1,\lambda)-z(t_1,\tilde\lambda),\ \lambda-\tilde\lambda)\ge(1+\beta-e^{\delta}\beta)\|\lambda-\tilde\lambda\|^2.$$

Неравенство (17) доказано. Таким образом, условия леммы 5 выполнены. Итак, последовательность $\{\lambda^{(K)}\}$ стремится к $\lambda^*$, а последовательность $\{x^{(K)}(t_1,\lambda^{(K)})\}\to 0$ при $K\to\infty$.

Докажем теперь, что последовательность функций $x^{(K)}(t)$ равномерно сходится при $K\to\infty$ к решению задачи 1′. Действительно, в силу неравенства (18) имеем

$$\|x(t,\lambda^{(i)})-x(t,\lambda^{(j)})\|\le\|\Phi(t)\|\cdot e^{\delta}\beta\cdot\|\lambda^{(i)}-\lambda^{(j)}\|\le$$
$$\le\sup_{t\in[t_0,t_1]}\|\Phi(t)\|\,e^{\delta}\beta\cdot\|\lambda^{(i)}-\lambda^{(j)}\|.$$

Но, ввиду леммы 5, $\|\lambda^{(i)} - \lambda^{(j)}\| \to 0$ при $i, j \to \infty$, и, следовательно, $\|x(t, \lambda^{(i)}) - x(t, \lambda^{(j)})\| \to 0$. Поэтому последовательность $\{x(t, \lambda^{(K)})\}$ равномерно сходится на $[t_0, t_1]$. Пусть $h(t, \lambda^*)$ – предельная точка для $\{x(t, \lambda^{(K)})\}$, а $x(t, \lambda^*)$ – соответствующее $\lambda^*$ решение системы (6) при $x(t_0, \lambda^*) = x_0$. Учитывая (18), имеем

$$\|x(t, \lambda^*) - h(t, \lambda^*)\| \leq \|x(t, \lambda^*) - x(t, \lambda^{(K)})\| + \|x(t, \lambda^{(K)}) - h(t, \lambda^*)\| \leq$$

$$\leq \sup_{t \in [t_0, t_1]} \|\Phi(t)\| e^{\delta} \beta \|\lambda^{(K)} - \lambda^*\| + \|x(t, \lambda^{(K)}) - x(t, \lambda^*)\| .$$

Отсюда следует, что $x(t, \lambda^{(K)}) \to x(t, \lambda^*)$ при $K \to \infty$. Теорема 3 доказана.

З а м е ч а н и е 3. Из формул (3), (15) следует, что $K$-е приближение $u^{(K)}(t)$ к решению задачи $1'$ выражается формулой

$$u^{(K)}(t) = N(t)\left[x_0 + \sigma \Phi^{-1}(t_1) \sum_{i=1}^{K-1} x(t_1, \lambda^{(i)})\right] .$$

Отсюда заключаем, что $K$-е приближение к решению задачи $1'$ может быть сформировано исходя из управления $u^{(0)}(t) = N(t) x_0$ (переводящего линейную систему из $x_0$ в нуль) перенастройкой амплитуды без изменения расположения точек переключения.

Поступила в ред.-изд.отдел
31 октября 1984 г.

Л и т е р а т у р а

1. Калман Р.Е. Об общей теории управления. Труды 1 конгресса ИФАК, – т. 2, – М.: изд-во АН СССР, 1961, с. 521-547.

2. Зубов В.И. Лекция по теории управления.– М.: Наука, 1975.– 494 с.

3. Александров В.М. Квазиоптимальные процессы в автоматических системах. – Изв. АН СССР, т. 13, № 3, сер. техн. наук, 1975, с. 125-133.

4. Красносельский М.А., Забрейко П.П. Геометрические методы нелинейного анализа. – М.: Наука, 1975, – 510 с.

5. Кибенко А.В., Перов А.И. О двухточечной краевой задаче с параметром.– Учен. зап. Аз. гос. ун-та. 1961, № 3, с. 21-30.

6. Ортега Дж., Рейнболт В. Итерационные методы нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. – М.: Мир, 1975. – 558 с.

7. Красносельский М.А., Перов А.И. О существовании решений у некоторых нелинейных операторных уравнений. – Докл. АН СССР, 1959, т. 21, № 1, с. 15-18.

8. Зубов В.И. Аналитическая динамика гироскопических систем. - Л.: Судостроение, 1970. - 317 с.

9. Вайнберг М.М. О сходимости процесса наискорейшего спуска для нелинейных уравнений. - Сиб. мат. журн., 1961, т. 2, № 2, с. 201-202.