Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1984 г., вып. 25.

УДК 517.977

# УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ОСОБЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ГУРСА-ДАРБУ

А.Н.Бурдуковский

Задачи оптимального управления системами Гурса-Дарбу постоянно привлекают внимание исследователей. После доказательства поточечного принципа максимума [1-3] дальнейшее изучение таких задач было связано с выводом условий оптимальности особых управлений [4-7]. Все эти результаты были получены на основе варьирования управления в окрестности набора точек либо вблизи некоторой кривой, не совпадающей с характеристиками системы. Специальная вариация управления, сосредоточенная в окрестности одной из характеристик системы, позволила получить более сильное условие оптимальности - интегральный принцип максимума [8]. Ниже проводится исследование особых случаев, связанных с вырождением интегрального принципа максимума. Методика вывода основана на выделении главных членов в приращениях состояния и целевого функционала. Результат представлен в виде пары симметричных интегральных неравенств, которые выполнены на характеристиках системы.

1. Пусть связь между управлением $u(s,t)\in E_r$ и состоянием $x(s,t)\in E_n$ некоторого процесса задана в прямоугольнике $P=S\times T=[s_0,s_1]\times[t_0,t_1]$ гиперболической системой второго порядка:

$$x_{st}=f(x_s,x_t,x,u,s,t),$$
$$x(s_0,t)=a(t),\ x(s,t_0)=b(s),\ a(t_0)=b(s_0). \quad (1)$$

Допустимыми управлениями будем называть кусочно-непрерывные вектор-функции $u(s,t)$, удовлетворяющие ограничению

$$u(s,t)\in U,\ (s,t)\in P. \quad (2)$$

Обозначим через $W$ множество допустимых управлений. Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$\Phi(u)=\varphi(x(s_1,t_1)) \quad (3)$$

на решениях управляемой системы (1).

Предположим, что функция $\varphi$ дважды дифференцируема, вектор-функция $f(x_s,x_t,x,u,s,t)$ непрерывна по своим аргументам и дважды дифференцируема по $x_s$, $x_t$, $x$, начальные функции $a(t)$, $b(s)$ кусочно-дифференцируемы на $T$, $S$ соответственно, множество $U$ ограничено.

Будем считать, что каждому допустимому управлению $u(s,t)$ отвечает единственное абсолютно непрерывное решение $x(s,t)$ задачи (1). Назовем пару $\{u(s,t),\ x(s,t)\}$ допустимым процессом, а решение задачи (1) - (3) оптимальным процессом.

2. Пусть $\{u(s,t),\ x(s,t)\}$, $\{u(s,t)+\Delta u(s,t), x(s,t)+\Delta x(s,t)\}$ - два допустимых процесса в задаче (1)-(3). Тогда приращения состояния и управления связаны между собой системой

$$\Delta x_{st} = \Delta f[s,t],\quad \Delta x(s_0,t) = \Delta x(s,t_0) = 0,$$

и почти всюду на $P$ справедливы следующие оценки [1, 2]:

$$\|\Delta x(s,t)\| \le C \int_{t_0}^{t_1}\int_{s_0}^{s_1} \|\Delta_u f[s,t]\|\, ds\, dt,$$

$$\|\Delta x_s(s,t)\| \le C\Big(\int_{t_0}^{t_1}\|\Delta_u f[s,t]\|\,dt + \int_{t_0}^{t_1}\int_{s_0}^{s_1}\|\Delta_u f[s,t]\|\,ds\,dt\Big), \qquad (4)$$

$$\|\Delta x_t(s,t)\| \le C\Big(\int_{s_0}^{s_1}\|\Delta_u f[s,t]\|\,ds + \int_{t_0}^{t_1}\int_{s_0}^{s_1}\|\Delta_u f[s,t]\|\,ds\,dt\Big).$$

Здесь $C = const$; запись $f[s,t]$ означает полный подсчет сложной вектор-функции $f$ в точке $(s,t)$; $\Delta f$, $\Delta_u f$ - полное и частное (по управлению) приращения $f$ ; под нормой понимается сумма модулей компонент.

Введем специальную вариацию управления, определяемую параметрами $\varepsilon > 0$, $\xi \in (s_0, s_1]$ и вектор-функцией $v(t)$, $t \in T$, $v \in W$. Область варьирования $P_\varepsilon$ расположим в окрестности характеристики $s = \xi$ системы (1): $P_\varepsilon = (\xi - \varepsilon, \xi] \times T$. Определим вариацию управления

$$\Delta u(s,t) = \begin{cases} v(t) - u(s,t), & (s,t) \in P_\varepsilon, \\ 0, & (s,t) \in P \setminus P_\varepsilon \end{cases}$$

и обозначим через $P_0 = [s_0, \xi - \varepsilon] \times T$, $P_1 = (\xi, s_1] \times T$ части прямоугольника $P$, примыкающие к полоске $P_\varepsilon$. В области $P_0$ приращение состояния равно нулю. Исследуем поведение $\Delta x(s,t)$ для $(s,t) \in P_\varepsilon \cup P_1$.

Пусть вначале $(s,t) \in P_\varepsilon$. Согласно оценкам (4), приращения $\Delta x(s,t)$, $\Delta x_t(s,t)$ имеют здесь порядок $\varepsilon$, величина $\Delta x_s(s,t)$ является конечной относительно $\varepsilon$. Следовательно, справедливо представление $x_s(s,t) + \Delta x_s(s,t) = y(s,t) + \delta y(s,t)(s - \xi + \varepsilon) + o(\varepsilon)$, на основании которого вектор-функция $y(s,t)$ удовлетворяет уравнению

$$y_t = f(y, x_t(s,t), x(s,t), v(t), s, t),\quad y(s,t_0) = b_s(s).$$

Для приращений $\Delta x_t(s,t)$, $\Delta x(s,t)$ с помощью формулы разложения интег-

рала по малому параметру можно записать представления

$$\Delta x_t(s,t)=\int\limits_{\xi-\varepsilon}^{s}\Delta f[\eta,t]\,d\eta=\Delta_{y,v}f[s,t](s-\xi+\varepsilon)+o(\varepsilon),$$

$$\Delta x(s,t)=\int\limits_{\xi-\varepsilon}^{s}\int\limits_{t_0}^{t}\Delta f[\eta,\tau]\,d\tau\,d\eta=\int\limits_{t_0}^{t}\Delta_{y,v}f[s,\tau]\,d\tau(s-\xi+\varepsilon)+o(\varepsilon).$$

Здесь $\Delta_{y,v}f$ – частное приращение вектор-функции $f$ :

$$\Delta_{y,v}f[s,t]=f(y,x_t,x,v,s,t)-f(x_s,x_t,x,u,s,t).$$

Теперь для вариации $\delta y(s,t)$ несложно получить линейную систему

$$\delta y_t(s,t)=f_{x_s}(y,x_t,x,v,s,t)\,\delta y(s,t)+f_{x_t}(y,x_t,x,v,s,t)\Delta_{y,v}f[s,t]+$$

$$+f_x(y,x_t,x,v,s,t)\int\limits_{t_0}^{t_1}\Delta_{y,v}f[s,\tau]\,d\tau,\quad \delta y(s,t_0)=0. \tag{5}$$

Рассмотрим далее область $(s,t)\in P_1$ , в которой все приращения $\Delta x(s,t)$, $\Delta x_s(s,t)$, $\Delta x_t(s,t)$ имеют порядок $\varepsilon$ . Здесь справедливо представление $\Delta x(s,t)=\delta x(s,t)\varepsilon+o(\varepsilon)$ и вариация $\delta x(s,t)$ является решением линейной задачи

$$\delta x_{st}=f_{x_s}[s,t]\,\delta x_s+f_{x_t}[s,t]\,\delta x_t+f_x[s,t]\,\delta x,$$

$$\delta x(s,t_0)=0,\quad \delta x(\xi,t)=\int\limits_{t_0}^{t}\Delta_{y,v}f[\xi,\tau]\,d\tau. \tag{6}$$

3. Перейдем к изучению приращения функционала (3)

$$\Delta\Phi(u)=\varphi_x(x(s_1,t_1))'\Delta x(s_1,t_1)+\frac{1}{2}\Delta x(s_1,t_1)'\varphi_{xx}(x(s_1,t_1))\Delta x(s_1,t_1)+$$

$$+\ o(\|\Delta x(s_1,t_1)\|^2).$$

Выделим в линейной части приращения члены порядка $\varepsilon$ и $\varepsilon^2$. С этой целью введем функцию $H[s,t]=\psi(s,t)'f[s,t]$ , сопряженную задачу

$$\psi(s,t)=-\varphi_x(x(s_1,t_1))+\int\limits_{t}^{t_1}H_{x_s}[s,\tau]\,d\tau+\int\limits_{s}^{s_1}H_{x_t}[\xi,t]\,d\xi+\int\limits_{s}^{s_1}\int\limits_{t}^{t_1}H_x[\xi,\tau]\,d\tau\,d\xi \tag{7}$$

для $\psi(s,t)$ и вспомогательные вектор-функции

$$A(s,t)=\psi(s,t)-\int\limits_{t}^{t_1}H_{x_s}[s,\tau]\,d\tau,\quad B(s,t)=\psi(s,t)-\int\limits_{s}^{s_1}H_{x_t}[\xi,t]\,d\xi,$$

$$C(s,t) = \Psi(s,t) - \int_t^{t_1} H_{x_s}[s,\tau]\,d\tau - \int_s^{s_1} H_{x_t}[\xi,t]\,d\xi .$$

Непосредственным дифференцированием нетрудно проверить, что приращение $\Delta x(s,t)$ и вектор-функция $\psi(s,t)$ связаны для $(s,t) \in P$ соотношением

$$\{A(s,t)'\Delta x_t(s,t)\}_s + \{B(s,t)'\Delta x_s(s,t)\}_t - \{C(s,t)'\Delta x(s,t)\}_{st} =$$
$$= \Delta H[s,t] - H_z[s,t]'\Delta z(s,t), \tag{8}$$

где $z = (x_s, x_t, x) - 3n$-мерный вектор.

Проинтегрируем равенство (8) по $(s,t) \in P_\varepsilon \cup P_1$, заметив предварительно, что $A(s_1,t) = B(s,t_1) = C(s,t_1) = \Psi(s_1,t_1)$. Интегрирование слагаемых в левой части (8) дает

$$\int_{\xi-\varepsilon}^{s_1}\int_{t_0}^{t_1} \{A(s,t)'\Delta x_t(s,t)\}_s\,dt\,ds = \int_{t_0}^{t_1} A(s_1,t)'\Delta x_t(s_1,t)\,dt = \psi(s_1,t_1)'\Delta x(s_1,t_1),$$
$$\int_{\xi-\varepsilon}^{s_1}\int_{t_0}^{t_1} \{B(s,t)'\Delta x_s(s,t)\}_t\,dt\,ds = \int_{\xi-\varepsilon}^{s_1} B(s,t_1)'\Delta x_s(s,t_1)\,ds = \psi(s_1,t_1)'\Delta x(s_1,t_1), \tag{9}$$
$$\int_{\xi-\varepsilon}^{s_1}\int_{t_0}^{t_1} \{C(s,t)'\Delta x(s,t)\}_{st}\,dt\,ds = \int_{\xi-\varepsilon}^{s_1} \{C(s,t_1)'\Delta x(s,t_1)\}_s\,ds = \psi(s_1,t_1)'\Delta x(s_1,t_1).$$

Таким образом, из (8), (9) получаем

$$\varphi_x(x(s_1,t_1))'\Delta x(s_1,t_1) = -\iint_{P_\varepsilon \cup P_1} \{\Delta H[s,t] - H_z[s,t]'\Delta z(s,t)\}\,ds\,dt . \tag{10}$$

Проследим поведение подынтегральной функции из (10) в областях $P_\varepsilon$, $P_1$, используя полученные ранее представления для приращений $\Delta x_s(s,t)$, $\Delta x_t(s,t)$, $\Delta x(s,t)$.

Пусть $(s,t) \in P_\varepsilon$, тогда

$$\Delta H[s,t] - H_z[s,t]'\Delta z(s,t) = \Delta_{y,v} H[s,t] + H_{x_s}(y, x_t, x, v, s, t)'\delta y(s,t)(s-\xi+\varepsilon) +$$
$$+ H_{x_t}(y, x_t, x, v, s, t)'\Delta x_t(s,t) + H_x(y, x_t, x, v, s, t)'\Delta x(s,t) -$$
$$- H_{x_s}[s,t]'\delta y(s,t)(s-\xi+\varepsilon) - H_{x_t}[s,t]'\Delta x_t(s,t) - H_x[s,t]'\Delta x(s,t) -$$
$$- H_{x_s}[s,t]'(y(s,t) - x_s(s,t)) + o(\varepsilon).$$

Отсюда с учетом представления

$$y(s,t)-x_s(s,t)=\int_{t_0}^{t}\Delta_{y,v}f[s,\tau]\,d\tau$$

получаем

$$\Delta H[s,t]-H_z[s,t]'\Delta z(s,t)=\Delta_{y,v}H[s,t]-H_{x_s}[s,t]'\int_{t_0}^{t}\Delta_{y,v}f[s,\tau]\,d\tau+$$
$$+(\Delta_{y,v}H_{x_s}[s,t]'\delta y(s,t)+\Delta_{y,v}H_{x_t}[s,t]'\Delta_{y,v}f[s,t]+$$
$$+\Delta_{y,v}H_x[s,t]'\int_{t_0}^{t}\Delta_{y,v}f[s,\tau]\,d\tau)(s-\xi+\varepsilon)+o(\varepsilon).$$

При $(s,t)\in P_1$ имеем

$$\Delta H[s,t]-H_z[s,t]'\Delta z(s,t)=\frac{1}{2}\Delta z'H_{zz}[s,t]\Delta z+o(\varepsilon^2).$$

Подставляя полученные выражения в формулу приращения функционала, получаем

$$\Delta\Phi(u)=-\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi}\int_{t_0}^{t_1}\Big\{\Delta_{y,v}H[s,t]-H_{x_s}[s,t]'\int_{t_0}^{t}\Delta_{y,v}f[s,\tau]\,d\tau\Big\}dt\,ds-$$
$$-\frac{\varepsilon^2}{2}\Big\{\int_{t_0}^{t_1}(\Delta_{y,v}H_{x_s}[\xi,t]'\delta y(\xi,t)+\Delta_{y,v}H_{x_t}[\xi,t]'\Delta_{y,v}f[\xi,t]+$$
$$+\Delta_{y,v}H_x[\xi,t]'\int_{t_0}^{t}\Delta_{y,v}f[\xi,\tau]\,d\tau)dt+\int_{t_0}^{t_1}\int_{\xi}^{s_1}\delta z(s,t)'H_{zz}[s,t]\delta z(s,t)\,ds\,dt-$$
$$-\delta x(s_1,t_1)'\varphi_{xx}(x(s_1,t_1))\delta x(s_1,t_1)\Big\}+o(\varepsilon^2). \qquad (11)$$

Здесь $\delta y(\xi,t)$ определяется уравнением (5), $\delta x(s,t)$, $(s,t)\in P_1$ - решение линейной задачи в вариациях (6), $\delta z(s,t)=(\delta x_s(s,t),\ \delta x_t(s,t),\ \delta x(s,t))$.

К аналогичному результату приводит варьирование управления на полоске, параллельной другому семейству $t=\tau$ характеристик системы (1).

4. Представление (11) для приращения функционала позволяет прежде всего сформулировать необходимое условие оптимальности первого порядка - интегральный принцип максимума [8].

Т е о р е м а. Пусть $\{u(s,t),\ x(s,t)\}$ - оптимальный процесс в задаче (1)-(3), $\psi(s,t)$ - решение сопряженного уравнения (7). Тогда

1) для всех $\xi\in(s_0,s_1]$ выполняется неравенство

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\Delta_{y,v}H[\xi,t]-H_{x_s}[\xi,t]'\int_{t_0}^{t}\Delta_{y,v}f[\xi,\tau]\,d\tau\right\}dt\leq 0 \qquad (12)$$

при условиях:

$$y_t=f(y,x_t(\xi,t),x(\xi,t),v(t),\xi,t),\ \ y(t_0)=b_s(\xi),\quad v\in W;$$

2) для всех $\tau\in(t_0,t_1]$ выполняется неравенство

$$\int_{s_0}^{s_1}\left\{\Delta_{y,v}H[s,\tau]-H_{x_t}[s,\tau]'\int_{s_0}^{s}\Delta_{y,v}f[\xi,\tau]\,d\xi\right\}ds\leq 0 \qquad (13)$$

при условиях:

$$y_s=f(x_s(s,\tau),y,x(s,\tau),v(s),s,\tau),\ \ y(s_0)=a_t(\tau),\ \ v\in W.$$

Используя формулу (11), перейдем к рассмотрению критических случаев, когда по крайней мере одно из условий (12), (13) выполняется тривиально. Введем понятие особого управления. Пусть $W_t=\{v\in W:\ v=v(t)\}$, $W_s=\{v\in W:\ v=v(s)\}$.

Определение. 1) Допустимое управление $u(s,t)$ назовем $t$-особым, если найдутся такие подмножества $W_0\subset W_t$, $S_0\subset S$, $mes\,S_0>0$, что для всех $v\in W_0$, $s\in S_0$ справедливо

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\Delta_{y,v}H[s,t]-H_{x_s}[s,t]'\int_{t_0}^{t}\Delta_{y,v}f[s,\tau]\,d\tau\right\}dt=0.$$

2) Допустимое управление $u(s,t)$ назовем $s$-ссобым, если найдутся такие подмножества $W_0\subset W_s$, $T_0\subset T$, $mes\,T_0>0$, что для всех $v\in W_0$, $t\in T_0$ выполняется

$$\int_{s_0}^{s_1}\left\{\Delta_{y,v}H[s,t]-H_{x_t}[s,t]'\int_{s_0}^{s}\Delta_{y,v}f[\xi,\tau]\,d\xi\right\}ds=0.$$

Выражение (11) позволяет сформулировать условия оптимальности для особых управлений в виде следующих утверждений.

1. Пусть $\{u(s,t),\ x(s,t)\}$ - оптимальный процесс в задаче (1)-(3) с $t$-особым управлением $u(s,t)$. Тогда для всех $\xi\in S_0$, $v\in W_0$ имеет место неравенство

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\Delta_{y,v}H_{x_s}[\xi,t]'\delta y(\xi,t)+\Delta_{y,v}H_{x_t}[\xi,t]'\Delta_{y,v}f[\xi,t]+\right.$$

$$+\Delta_{y,v} H_x[\xi,t]'\int_{t_0}^{t}\Delta_{y,v} f[\xi,\tau]d\tau\Big\}dt+\int_{t_0}^{t_1}\int_{\xi}^{s_1}\delta z(s,t)'H_{zz}[s,t]\delta z(s,t)ds\,dt-$$

$$-\delta x(s_1,t_1)'\varphi_{xx}(x(s_1,t_1))\delta x(s_1,t_1)\le 0. \tag{14}$$

Здесь $y_t=f(y,x_t(\xi,t),x(\xi,t),v(t),\xi,t),\ y(t_0)=b_s(\xi)$, вариация $\delta y(\xi,t)$ является решением линейной системы (5), $\delta z(s,t)=(\delta x_s(s,t),\ \delta x_t(s,t),\ \delta x(s,t))$ и вариация $\delta x(s,t)$ – решение задачи в вариациях (6).

2. Пусть $\{u(s,t),\ x(s,t)\}$ – оптимальный процесс в задаче (1)-(3) с $s$ -особым управлением $u(s,t)$. Тогда для всех $\tau\in T_0$, $v\in W_0$ имеет место неравенство

$$\int_{s_0}^{s_1}\Big\{\Delta_{y,v} H_{x_s}[s,\tau]'\Delta_{y,v} f[s,\tau]+\Delta_{y,v} H_{x_t}[s,\tau]'\delta y(s,\tau)+$$

$$+\Delta_{y,v} H_x[s,\tau]'\int_{s_0}^{s}\Delta_{y,v} f[\xi,\tau]d\xi\Big\}ds+\int_{s_0}^{s_1}\int_{\tau}^{t_1}\delta z(s,t)'H_{zz}[s,t]\delta z(s,t)dt\,ds-$$

$$-\delta x(s_1,t_1)'\varphi_{xx}(x(s_1,t_1))\delta x(s_1,t_1)\le 0. \tag{15}$$

Здесь $y_s=f(x(s,\tau),y,x(s,\tau),v(s),\tau),\ y(s_0)=a_t(\tau)$, вариация $\delta y(s,\tau)$ является решением системы

$$\delta y_s=f_{x_t}(x_s,y,x,v,s,\tau)\delta y+f_{x_s}(x_s,y,x,v,s,\tau)\Delta_{y,v} f[s,\tau]+$$

$$+f_x(x_s,y,x,v,s,\tau)\int_{s_0}^{s}\Delta_{y,v} f[\xi,\tau]d\xi,\quad \delta y(s_0,\tau)=0,$$

$\delta z(s,t)=(\delta x_s(s,t),\delta x_t(s,t),\delta x(s,t))$ и вариация $\delta x(s,t)$ определяется задачей

$$\delta x_{st}=f_{x_s}[s,t]\delta x_s+f_{x_t}[s,t]\delta x_t+f_x[s,t]\delta x,$$

$$\delta x(s_0,t)=0,\quad \delta x(s,\tau)=\int_{s_0}^{s}\Delta_{y,v} f[\xi,\tau]d\xi.$$

Как особенность результата отметим, что в условия (14), (15) входят вариации состояния.

Эффективность полученных условий подтверждается следующим примером:

$$x^1_{st}=x^1_s u^1,\ x^2_{st}=x^1u^2,\ S=T=[0,1],\ x(0,t)=x(s,0)=0;$$

$$|u^1(s,t)|\le 1,\ |u^2(s,t)|\le 1,\ \Phi(u)=x^2(1,1)\to min.$$

Проверим на оптимальность управление $u(s,t)=0$, которому соответствует состояние $x(s,t)=0$. Составим функцию $H=\psi^1 x^1_s u^1+\psi^2 x^1 u^2$ и определим сопряженные переменные $\psi^1(s,t)=0$, $\psi^2(s,t)=-1$. Нетрудно видеть, что исследуемое управление является одновременно $t$-особым и $s$-особым и, следовательно, особым в смысле поточечного принципа максимума [1, 2]. Условия оптимальности особых управлений из [4, 5] в данном случае выполнены. Проверка условия (15) приводит к очевидному неравенству

$$\int_0^1 \Delta_{y,v} H_x[s,\tau]' \int_0^s \Delta_{y,v} f[\xi,\tau]\, d\xi\, ds = 0 \le 0 .$$

Проверим условие (14):

$$\int_0^1 \Delta_{y,v} H_x[\xi,t]' \int_0^t \Delta_{y,v} f[\xi,\tau]\, d\tau\, dt = -\int_0^1 v^2(t) \int_0^t y^1(\tau)\, v^1(\tau)\, d\tau\, dt \le 0,$$

$$y^1_t = y^1 v^1, \quad y^1(0)=0 .$$

Оно нарушается, например, при $v^1(t)=1$, $v^2(t)=-1$, поэтому управление $u(s,t)$ неоптимально в исследуемой задаче. Приведенный пример подтверждает независимость условий (14), (15).

Автор благодарит В.А.Срочко за постановку задачи и внимание к работе.

Поступила в ред.-изд.отдел
14 июня 1984 г.

Литература

1. Егоров А.И. Об оптимальном управлении процессами в некоторых системах с распределенными параметрами. - Автоматика и телемеханика, 1964, т.25, № 5, с. 613-623.

2. Плотников В.И., Сумин В.И. Оптимизация объектов с распределенными параметрами, описываемых системами Гурса-Дарбу. - Журн. вычисл. математики и матем. физики, 1972, т.12, № 1, с. 61-77.

3. Ахмедов К.Т., Ахиев С.С. Необходимые условия оптимальности для некоторых задач оптимального управления. - Докл. АН Аз.ССР, 1972, т.28, № 5, с. 12-16.

4. Ашепков Л.Т., Васильев О.В. Об оптимальности особых управлений в системах Гурса-Дарбу. - Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1975, т.15, № 5, с. 1157-1167.

5. Срочко В.А. Условия оптимальности для одного класса систем с распределенными параметрами. - Сиб. мат. журн., 1976, т.17, № 5, с. 1108-1115.

6. Максимов К.Б. Об оптимальности особых управлений в системах Гурса–Дарбу при наличии функциональных ограничений типа неравенства на состояние системы. – Докл. АН АзССР, 1979, т. 35, № 10, с. 11-14.

7. Ащепков Л.Т., Васильев О.В., Коваленок И.Л. Усиленное условие оптимальности особых управлений в системе Гурса–Дарбу. – Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 6, с. 1054-1059.

8. Срочко В.А. Условия оптимальности типа принципа максимума в системах Гурса–Дарбу. – Сиб. мат. журн., 1984, т. 25, № 1, с. 126-132.