Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1985 г., вып. 26

УДК 519.854

ЗАДАЧА ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНОГО РЯДА ИЗДЕЛИЙ ПО КРИТЕРИЮ "СУММАРНАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ". 1

А.И.Давыдов

Основная идея сформировавшегося к настоящему времени в Институте математики СО АН СССР общего подхода к постановке задач оптимального выбора состава систем (типоразмерных рядов) изделий состоит в том, что нужно во взаимосвязи рассматривать эффективность системы и затраты на ее создание и обеспечение ее функционирования. При этом эффективность оценивается с точки зрения выполнения отдельных работ (задач), составляющих сферу применения рассматриваемых изделий. Используя критерии стоимости и эффективности, можно сформулировать два варианта постановки задачи оптимизации состава (типоразмерного ряда). В первом (прямая постановка) требуется минимизировать суммарные затраты при некотором уровне эффективности системы, а во втором (обратная постановка) - максимизировать интегральный уровень эффективности, накладывая ограничения на величину суммарных затрат.

В большинстве работ (см., например, [1, 2, 5]), посвященных исследованию вопросов оптимизации состава систем, задача оптимального выбора рассматривалась в прямой постановке. Такие задачи являются более изученными и с математической точки зрения. Задача в обратной постановке рассмотрена лишь в [6], где приводится малотрудоемкий алгоритм, позволяющий отыскивать приближенное решение задачи с априорной оценкой точности.

В настоящей работе дается одна из возможных формулировок задачи оптимизации состава, где в качестве критерия берется суммарная эффективность выполнения изделиями соответствующих работ, а суммарные затраты ограничиваются сверху. Эту задачу можно рассматривать как обратную к известной задаче выбора оптимального ряда изделий [1, 5]. Кроме того, в работе строится алгоритм, позволяющий отыскивать точное решение исследуемой задачи. В основе предлагаемого алгоритма лежит общая вычислительная схема ветвей и границ, которая использовалась и при решении прямой задачи. Однако реализовать эту схему для обратной задачи значительно труднее, чем для прямой.

Работа состоит из двух частей. В первой части приводится математическая формулировка обратной задачи выбора оптимального ряда изделий, рассматривается многовариантная задача о ранце, используемая в дальнейшем в качестве вспомогательной. Далее исследуется оценочная задача, позволяющая отыскивать значение верхней границы для целевой функции исходной задачи. Приводится также

общая схема алгоритма отыскания так называемого тупикового решения оценочной задачи.

Вторая часть работы посвящена описанию алгоритма построения тупикового решения оценочной задачи и конкретизации других основных элементов вычислительной схемы ветвей и границ применительно к исследуемой задаче. Приводится также оценка трудоемкости одного шага алгоритма ветвей и границ.

§ 1. Математическая формулировка задачи

Приведем математическую формулировку задачи выбора оптимального ряда изделий по критерию "суммарная эффективность". Для этого введем необходимые обозначения и рассмотрим основные исходные предположения.

Как обычно (см., например, [2]), множеством номеров $\mathbb{I} = \{1, \dots, i, \dots, I\}$ зададим исходный ряд образцов рассматриваемых изделий, а множеством номеров $\mathbb{J} = \{1, \dots, j, \dots, J\}$ – совокупность видов работ, составляющих "сферу" применения рассматриваемых изделий.

Вычисляя требуемое количество изделий, примем простейшую схему выполнения работ. Будем считать, что единичные работы каждого вида выполняются независимо и что одно конкретное изделие используется для выполнения только одной работы. При этом в соответствии с общим подходом к постановке задач оптимизации состава считаем, что для работы каждого вида может быть сформировано некоторое множество вариантов нарядов изделий, каждый из которых выполняет работу с соответствующим уровнем эффективности. Считаем также, что каждый наряд из этого множества состоит из изделий одного образца и изделия каждого образца входят в состав не более одного варианта наряда. Эффективность нарядов зададим величинами f_{ij}, $i \in \mathbb{I}$, $j \in \mathbb{J}$. Величина f_{ij} равняется эффективности выполнения нарядом изделий i-го образца работ j-го вида.

Вычисляя суммарные затраты, будем учитывать следующие их компоненты:

а) начальные затраты, задаваемые величинами c_i^0, $i \in \mathbb{I}$. Величина c_i^0 равняется начальным затратам на изделия i-го образца;

б) затраты на производство изделий и выполнение работ, задаваемые величинами c_{ij}, $i \in \mathbb{I}$, $j \in \mathbb{J}$. Величина c_{ij} включает в себя затраты на производство изделий i-го образца, входящих в состав соответствующего наряда изделий для выполнения работы j-го вида, и затраты на выполнение этим нарядом данной работы.

Ограничение на величину суммарных затрат зададим величиной B.

Введем следующие переменные:

<u>Переменные выбора</u> $x_i \in \{0, 1\}$, $i \in \mathbb{I}$. Величина x_i принимает значение 1, если изделие i-го образца используется для выполнения работ

(входит в выбираемый ряд), и 0 – в противном случае.

Переменные назначения $x_{ij} \geq 0,\ i \in \mathbb{I},\ j \in \mathbb{J}$. Величина x_{ij} равняется доле единичных работ j -го вида, выполняемых (в составе соответствующего наряда) изделиями i -го образца.

Задача выбора оптимального ряда изделий по критерию "суммарная эффективность", которую обозначим $\mathcal{E}(F, C, C^0, B)$, где F – матрица (f_{ij}) $(i \in \mathbb{I},\ j \in \mathbb{J})$, C – матрица $(c_{ij})\,(i \in \mathbb{I},\ j \in \mathbb{J})$ и C^0 – вектор $(c_i^0)\,(i \in \mathbb{I})$, записывается следующим образом:

найти $$E(F, C, C^0, B) = \max_{(x_i)(x_{ij})} \sum_{i \in \mathbb{I}} \sum_{j \in \mathbb{J}} f_{ij}\, x_{ij}$$

при ограничениях:

$$x_i \geq x_{ij},\ i \in \mathbb{I},\ j \in \mathbb{J};$$

$$\sum_{i \in \mathbb{I}} x_{ij} = 1,\quad j \in \mathbb{J};$$

$$\sum_{i \in \mathbb{I}} \Big\{c_i^0\, x_i + \sum_{j \in \mathbb{J}} c_{ij}\, x_{ij}\Big\} \leq B;$$

$$x_i \in \{0, 1\},\ x_{ij} \geq 0,\ i \in \mathbb{I},\ j \in \mathbb{J}.$$

Построим универсальный алгоритм решения данной задачи, используя при этом вычислительную схему типа ветвей и границ [1, 2].

§ 2. Многовариантная задача о ранце

2.1. В дальнейшем при построении алгоритма решения задачи $\mathcal{E}(F, C, C^0, B)$ будем неоднократно обращаться к рассмотрению так называемой "многовариантной задачи о ранце" [3, 4]. Эта задача, обозначим ее через $\mathcal{R}(F, C, b)$, формулируется следующим образом:

найти $$R(F, C, b) = \max_{(x_{ij})} \sum_{i \in \mathbb{I}} \sum_{j \in \mathbb{J}} f_{ij}\, x_{ij}$$

при ограничениях:

$$\sum_{i \in \mathbb{I}} x_{ij} = 1,\ j \in \mathbb{J};$$

$$\sum_{i \in \mathbb{I}} \sum_{j \in \mathbb{J}} c_{ij}\, x_{ij} \leq b;$$

$$x_{ij} \geq 0,\quad i \in \mathbb{I},\ j \in \mathbb{J}.$$

Отыскивая ее решение, воспользуемся тем обстоятельством, что можно сравнительно легко, во-первых, отыскать оптимальное решение задачи

$\mathcal{D}R(F,C,b)$, двойственной к рассматриваемой, и, во-вторых, построить по этому решению оптимальное решение исходной задачи.

Для $j \in \mathbf{J}$ положим

$$w_j(z) = \max_{i \in \mathbf{I}} \{ f_{ij} - c_{ij} z \}.$$

Задача $\mathcal{D}R(F,C,b)$ может быть записана следующим образом:

найти $$DR(F,C,b) = \min_{z \geq 0} \{ \sum_{j \in \mathbf{J}} w_j(z) + bz \}.$$

Для всякого $j \in \mathbf{J}$ функция $w_j(z)$, $z \geqslant 0$, является, как нетрудно увидеть, выпуклой кусочно-линейной невозрастающей функцией. График этой функции представляет собой ломаную, угол наклона каждого звена которой определяется соответствующим коэффициентом c_{ij}. Точками излома этой функции будут точка $z = 0$, а также те и только те точки $z > 0$, которые при некоторых $i, \ell \in \mathbf{I}$, $c_{ij} \neq c_{\ell j}$, удовлетворяют равенствам

$$f_{ij} - c_{ij} z = f_{\ell j} - c_{\ell j} z = w_j(z).$$

Целевая функция

$$\sum_{j \in \mathbf{J}} w_j(z) + bz.$$

задачи $\mathcal{D}R(F,C,b)$ также является выпуклой кусочно-линейной функцией с множеством точек излома Z, состоящим из точек излома функций $w_j(z)$, $j \in \mathbf{J}$. Следовательно, оптимальным решением задачи $\mathcal{D}R(F,C,b)$ является одна из точек множества Z, а число элементов в данном множестве не превосходит $I \cdot J$.

Используя это замечание, получаем следующий критерий оптимальности решения задачи $\mathcal{D}R(F,C,b)$.

Для $j \in \mathbf{J}$ положим:

$$\mu_j(z) = \min_{i \in \mathbf{I}} \{ c_{ij} \mid f_{ij} - c_{ij} z = w_j(z) \},$$

$$\beta_j(z) = \begin{cases} \max\limits_{i \in \mathbf{I}} \{ c_{ij} \mid f_{ij} - c_{ij} z = w_j(z) \}, & z > 0, \\ \infty, & z = 0. \end{cases}$$

<u>Критерий оптимальности.</u> Точка z^* является оптимальным решением задачи $\mathcal{D}R(F,C,b)$ тогда и только тогда, когда выполняются неравенства

$$\sum_{j \in \mathbf{J}} \mu_j(z^*) \leq b \leq \sum_{j \in \mathbf{J}} \beta_j(z^*).$$

Известны (см., например, [4]) различные способы отыскания точки z^*,

удовлетворяющей указанному критерию. Ниже приводится простой в реализации, хотя и не самый быстрый, алгоритм, который, отправляясь от начальной точки z^0, отыскивает точку z^*, удовлетворяющую требуемым неравенствам. Выбор алгоритма продиктован целями его дальнейшего использования. При построении алгоритма вычисления верхней границы для задачи $\mathcal{E}(F, C, C^0, B)$ будем рассматривать последовательность задач $\{\mathcal{D}R(F, C_\ell, b)\}$, $\ell = 1, \dots, L$, у которых матрицы C_ℓ и $C_{\ell+1}$ незначительно отличаются друг от друга. Это обстоятельство позволяет, отправляясь от точки z^*_ℓ, с помощью предлагаемого алгоритма довольно быстро отыскивать точку $z^*_{\ell+1}$.

2.2. Рассматриваемый алгоритм решения задачи $\mathcal{D}R(F, C, b)$ состоит из подготовительного шага и некоторого количества основных шагов.

На подготовительном шаге рассматривается начальная точка z^0, для которой проверяется условие оптимальности. Если это условие выполняется, то работа алгоритма заканчивается. В противном случае переходим к основным шагам алгоритма.

Если $\sum_{j \in J} \mu_j(z^0) > b$, то $z^* > z^0$ и действия на каждом основном шаге состоят в следующем.

Пусть на K-м шаге рассматривается точка z^{K-1}, для которой

$$\sum_{j \in J} \mu_j(z^{K-1}) > b.$$

Построим точку $z^K > z^{K-1}$, удовлетворяющую равенству

$$\sum_{j \in J} \mu_j(z^{K-1}) = \sum_{j \in J} \beta_j(z^K).$$

С этой целью для каждого $j \in J$ рассмотрим точку $z_j > z^{K-1}$, являющуюся ближайшей к z^{K-1} точкой излома функции $w_j(z)$. Если номер $i(j) \in I$ такой, что $c_{i(j)j} = \mu_j(z^{K-1})$, то точка z_j определяется по формуле

$$z_j = \min_{i \in I} \left\{ \frac{f_{i(j)j} - f_{ij}}{c_{i(j)j} - c_{ij}} \;\middle|\; f_{ij} < f_{i(j)j},\ c_{ij} < c_{i(j)j} \right\}.$$

Искомая точка z^K вычисляется следующим образом:

$$z^K = \min_{j \in J} z_j.$$

Если $z^K = \infty$, то решения задачи $R(F, C, b)$ не существует и алгоритм работу заканчивает. При $z^K < \infty$ проверяем справедливость неравенства

$$\sum_{j \in J} \mu_j(z^K) \le b.$$

Если неравенство выполняется, то полагаем $z^* = z^K$, и алгоритм работу заканчивает. В противном случае переходим к следующему шагу.

Если же

$$\sum_{j\in J} \beta_j(z^0) < b,$$

то $z^* < z^0$, и действия на каждом основном шаге состоят в следующем.

Пусть на K-м шаге рассматривается точка z^{K-1}, для которой

$$\sum_{j\in J} \beta_j(z^{K-1}) < b.$$

Построим точку $z^K < z^{K-1}$, удовлетворяющую равенству

$$\sum_{j\in J} \mu_j(z^K) = \sum_{j\in J} \beta_j(z^{K-1}).$$

Для этого при любом $j \in J$ рассмотрим точку $z_j < z^{K-1}$, являющуюся ближайшей к z^{K-1} точкой излома функции $w_j(z)$, $z_j \geq 0$. Если номер $i(j) \in I$ такой, что $c_{i(j)j} = \beta_j(z^{K-1})$, то

$$z_j = \begin{cases} 0, & \text{если } f_{ij} \leq f_{i(j)j}, \text{ либо } c_{ij} \leq c_{i(j)j} \text{ при любом } i \in I; \\ \max\limits_{i\in I} \left\{ \dfrac{f_{ij} - f_{i(j)j}}{c_{ij} - c_{i(j)j}} \,\middle|\, f_{ij} > f_{i(j)j},\ c_{ij} > c_{i(j)j} \right\} & \text{– в противном случае.} \end{cases}$$

Искомая точка z^K определяется из соотношения

$$z^K = \max_{j\in J} z_j.$$

Если $z^K = 0$, то полагаем $z^* = 0$, и алгоритм работу заканчивает. В противном случае проверяем справедливость неравенства

$$\sum_{j\in J} \beta_j(z^K) \geq b.$$

Если неравенство справедливо, то полагаем $z^* = z^K$, и алгоритм работу заканчивает. В противном случае переходим к следующему шагу алгоритма.

Заметим, что в ходе решения задачи $\mathcal{D}R(F, C, b)$ с помощью описанного алгоритма выполняется не более $I \cdot J + 1$ основных шагов, трудоемкость каждого из которых оценивается величиной $O(I \cdot J)$. Так же оценивается и трудоемкость подготовительного шага. Следовательно, трудоемкость описанного алгоритма решения задачи $\mathcal{D}R(F, C, b)$ не превосходит величины $O(I^2 \cdot J^2)$.

2.3. Теперь по найденному оптимальному решению задачи $\mathcal{D}R(F, C, b)$ построим оптимальное решение исходной задачи $R(F, C, b)$. Поскольку точка z^* удовлетворяет критерию оптимальности, то найдется элемент $j_0 \in J$ такой, что

$$\sum_{j<j_0} \beta_j(z^*) + \mu_{j_0}(z^*) + \sum_{j>j_0} \mu_j(z^K) \le b \le$$
$$\le \sum_{j<j_0} \beta_j(z^*) + \beta_{j_0}(z^*) + \sum_{j>j_0} \mu_j(z^*).$$

Пусть для всякого $j \in J$ номера $i(j), \ell(j) \in I$ таковы, что $c_{i(j)j} = \mu_j(z^*)$, $c_{\ell(j)j} = \beta_j(z^*)$, а величина γ определяется по формуле:

$$\gamma = b - \sum_{j_0 \ne j} \beta_j(z^*) - \sum_{j>j_0} \mu_j(z^*).$$

Для всех $j \in J$, отличных от j_0, положим

$$x^*_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = \ell(j),\ j<j_0; \\ 1, & \text{если } i = i(j),\ j>j_0; \\ 0 & \text{- в противном случае.} \end{cases}$$

Значения величин $x^*_{ij_0}$, $i \in I$, определим следующим образом: $x^*_{ij_0} = 0$, если $i \ne i(j_0)$, $i \ne \ell(j_0)$, а величины $x^*_{\ell(j_0)j_0}$, $x^*_{i(j_0)j_0}$ являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} \beta_{j_0}(z^*) \cdot x^*_{\ell(j_0)j_0} + \mu_{j_0}(z^*) \cdot x^*_{i(j_0)j_0} = \gamma, \\ x^*_{\ell(j_0)j_0} + x^*_{i(j_0)j_0} = 1. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что так определенное решение (x^*_{ij}) задачи $R(F, C, b)$ и оптимальное решение $(z^*, (w_j(z^*)))$ задачи $\mathcal{D}R(F, C, b)$ удовлетворяют соотношениям дополняющей нежесткости, и, следовательно, решение (x^*_{ij}) является оптимальным для задачи $R(F, C, b)$.

Отметим, что для построения оптимального решения (x^*_{ij}) требуется не более $O(I \cdot J)$ элементарных операций. Таким образом, окончательно получаем, что трудоемкость решения задачи $R(F, C, b)$ оценивается величиной $O(I^2 \cdot J^2)$.

§ 3. Общая схема алгоритма решения задачи $\mathcal{E}(F, C, C^0, B)$. Задание подмножеств решений

В основе предлагаемого алгоритма решения задачи $\mathcal{E}(F, C, C^0, B)$ лежит общая вычислительная схема ветвей и границ с односторонним ветвлением, подробное описание которой имеется в [1, 2]. В указанных работах эта схема описана применительно к решению экстремальной задачи "на минимум". Однако она полностью применима и к случаю задачи "на максимум", если

вместо нижней границы использовать верхнюю границу и знаки неравенств в описании вычислительной схемы заменить на противоположные.

Следуя [2], конкретизируем для нашей задачи $\mathcal{E}(F, C, C^0, B)$ основные элементы общей вычислительной схемы ветвей и границ:

– способ задания подмножеств решений;

– способ вычисления верхней границы;

– функцию выбора выделенного решения;

– функцию ветвления.

Заметим здесь, что способ задания подмножеств решений, используемый при построении алгоритма для прямой задачи, практически без изменений переносится на случай обратной задачи. Поэтому остановимся на нем вкратце, а основное внимание в следующих параграфах работы сосредоточим на описании остальных элементов вычислительной схемы.

Подмножества решений (как и в [2]) будем задавать с помощью частичных решений, понимая под частичным решением булев вектор $(x_{i_1}, \dots, x_{i_q})$, $0 \le q \le I$, где $\langle i_1, \dots, i_q \rangle$ – упорядоченная выборка элементов множества $\mathbf{I}$. Продолжением частичного решения $(x_{i_1}, \dots, x_{i_q})$ назовем всякое решение $(x_i')(x_{ij}')$ задачи $\mathcal{E}(F, C, C^0 B)$ такое, что $x_{i_\ell}' = x_{i_\ell}$, $\ell = 1, \dots, q$. Множество продолжений частичного решения $(x_{i_1}, \dots, x_{i_q})$ обозначим $\pi(x_{i_1}, \dots, x_{i_q})$.

Базисными подмножествами решений будем считать множества вида $\pi(x_1, \dots, x_I)$. Ясно, что всякое множество $\pi(x_{i_1}, \dots, x_{i_q})$ может быть представлено в виде объединения базисных множеств $\pi(x_1', \dots, x_I')$ таких, что $x_{i_\ell}' = x_{i_\ell}$, $\ell = 1, \dots, q$.

Для частичного решения $(x_{i_1}, \dots, x_{i_q})$ положим $\bar{\mathbf{I}} = \{i_1, \dots, i_q\}$, $\bar{\mathbf{I}}_1 = \{i \in \bar{\mathbf{I}} \mid x_i = 1\}$, $\bar{\mathbf{I}}_0 = \{i \in \bar{\mathbf{I}} \mid x_i = 0\}$, $\mathbf{I}' = \mathbf{I} \setminus \bar{\mathbf{I}}$, $\mathbf{I}_0' = \mathbf{I} \setminus \bar{\mathbf{I}}_0$.

§ 4. Общая схема алгоритма вычисления верхней границы

4.1. При любом частичном решении $(x_{i_1}, \dots, x_{i_q})$, $0 \le q \le I$, наилучшим решением исходной задачи $\mathcal{E}(F, C, C^0, B)$ на множестве $\pi(x_{i_1}, \dots, x_{i_q})$ является, очевидно, оптимальное решение задачи $\mathcal{E}(\bar{F}, \bar{C}, \bar{C}^0, \bar{B})$, где

$$\bar{F} = (f_{ij})(i \in \mathbf{I}_0', j \in \mathbf{J}), \quad \bar{C} = (c_{ij})(i \in \mathbf{I}_0', j \in \mathbf{J}),$$

$$\bar{C}^0 = (\bar{c}_i^0)(i \in \mathbf{I}_0'), \qquad \bar{c}_i^0 = \begin{cases} c_i^0, & i \in \mathbf{I}; \\ 0, & i \in \bar{\mathbf{I}}_1; \end{cases}$$

$$\bar{B} = B - \sum_{i \in \mathbf{I}_1} c_i^0 .$$

Построим функцию $\mathcal{B}(x_{i_1}, \dots, x_{i_q})$, такую, что при любом частичном решении $(x_{i_1}, \dots, x_{i_q})$ имеет место неравенство

$$\mathcal{B}(x_{i_1}, \dots, x_{i_q}) \geq E(\bar{F}, \bar{C}, \bar{C}^0, \bar{B}).$$

Описание алгоритма вычисления значения такой функции для простоты изложения будем вести для случая $q = 0$. Значение верхней границы в общем случае вычисляется точно так же, только вместо множества $\mathbf{I}$ рассматривается множество $\mathbf{I}_0'$, а вместо матриц F, C, C^0 и величины B - матрицы $\bar{F}, \bar{C}, \bar{C}^0$ и величина $\bar{B}$.

При вычислении верхней границы используем тот же прием, что и при построении нижней границы для задачи выбора оптимального ряда изделий в обычной (прямой) постановке (см., например, [1]). Рассмотрим двойственную задачу к задаче линейного программирования, получаемой из исходной задачи $\mathcal{E}(F, C, C^0, B)$ отбрасыванием условия булевости переменных, и в качестве верхней границы возьмем значение целевой функции двойственной задачи на некотором "хорошем" решении.

Двойственная задача, которую обозначим $\mathcal{DE}(F, C, C^0, B)$, имеет вид:

найти

$$DE(F, C, C^0, B) = \min_{(y_{ij}), (w_j), z} \left\{ \sum_{j \in J} w_j + Bz \right\}$$

при ограничениях:

$$w_j + c_{ij} z + y_{ij} \geq f_{ij}, \quad i \in \mathbf{I}, \; j \in \mathbf{J},$$

$$\sum_{j \in \mathbf{J}} y_{ij} \leq c_i^0 z, \quad i \in \mathbf{I},$$

$$z \geq 0, \quad y_{ij} \geq 0, \quad i \in \mathbf{I}, \; j \in \mathbf{J}.$$

Используя переменные τ_{ij}, $i \in \mathbf{I}$, $j \in \mathbf{J}$, где

$$\tau_{ij} = \begin{cases} \dfrac{y_{ij}}{z}, & \text{если } z > 0, \\ 0, & \text{если } z = 0, \end{cases}$$

перепишем эту задачу следующим образом:

найти

$$DE(F, C, C^0, B) = \min_{(\tau_{ij}), z} \left\{ \sum_{j \in J} w_j + Bz \right\}$$

при ограничениях:

$$w_j = \max_{i \in \mathbf{I}} \{f_{ij} - (c_{ij} + r_{ij}) z\}, \; j \in \mathbf{J};$$

$$\sum_{j \in \mathbf{J}} r_{ij} \leq c_i^0, \quad i \in \mathbf{I};$$

$$z \geq 0, \; r_{ij} \geq 0, \; i \in \mathbf{I}, \; j \in \mathbf{J}.$$

Для данной задачи выделим решения (R, z), где $R = (r_{ij})$ $(i \in \mathbf{I}$, $j \in \mathbf{J})$, обладающие свойством, аналогичным свойству тупиковых (неулучшаемых) решений, рассматриваемых при построении нижней границы в случае прямой задачи выбора оптимального ряда изделий [1, 5].

4.2. Для решения (R, z) задачи $\mathcal{DE}(F, C, C^0, B)$ положим:

$$I_0(R) = \{i \in \mathbf{I} \mid \sum_{j \in \mathbf{J}} r_{ij} = c_i^0\};$$

$$w_j(R, z) = \max_{i \in \mathbf{I}} \{f_{ij} - (c_{ij} + r_{ij}) z\};$$

$$I_j(R, z) = \{i \in \mathbf{I} \mid f_{ij} - (c_{ij} + r_{ij}) z = w_j(R, z)\};$$

$$I_j^0(R, z) = I_j(R, z) \cap I_0(R);$$

$$\beta_j(R, z) = \max_{i \in I_j(R, z)} \{c_{ij} + r_{ij}\};$$

$$\beta_j^0(R, z) = \max_{i \in I_j^0(R, z)} \{c_{ij} + r_{ij}\};$$

$$\mu_j(R, z) = \min_{i \in I_j(R, z)} \{c_{ij} + r_{ij}\};$$

$$\mu_j^0(R, z) = \min_{i \in I_j^0(R, z)} \{c_{ij} + r_{ij}\}, \; j \in \mathbf{J}.$$

Матрицу R назовем <u>z-тупиковой</u> при некотором $z \geq 0$, если $I_j^0(R, z) \neq \varnothing$ для всякого $j \in \mathbf{J}$.

Решение (R, z) назовем <u>тупиковым</u>, если:

1. матрица R является z-тупиковой;
2. $\sum_{j \in \mathbf{J}} \mu_j^0(R, z) \leq B \leq \sum_{j \in \mathbf{J}} \beta_j^0(R, z)$.

Покажем, что оптимальное решение (R^*, z^*) задачи $\mathcal{DE}(F, C, C^0, B)$ при $z^* > 0$ является тупиковым.

Лемма 1. Если (R^*, z^*) - оптимальное решение задачи $\mathcal{D}\mathcal{E}(F, C, C^0, B)$ и $z^* > 0$, то матрица R^* является z^*-тупиковой.

Доказательство. Предположим, что $I_j^0(R^*, z^*) = \emptyset$ для некоторого $j \in J$. Покажем, что в этом случае решение (R^*, z^*) не является оптимальным.

Поскольку

$$\sum_{j \in J} r^*_{ij'} < c_i^0$$

для всякого $i \in I_j(R^*, z^*)$, то

$$\delta_1 = \min_{i \in I_j(R^*, z^*)} \left\{ c_i^0 - \sum_{j' \in J} r^*_{ij} \right\} > 0 .$$

Пусть

$$\delta_2 = w_j(R^*, z^*) - \max_{i \in I \setminus I_j(R^*, z^*)} \left\{ f_{ij} - (c_{ij} + r^*_{ij}) z^* \right\} ,$$

$$\delta = \min \left\{ \delta_1, \delta_2 / z^* \right\} > 0 .$$

Рассмотрим решение $(\bar{R}, z^*)$ задачи $\mathcal{D}\mathcal{E}(F, C, C^0, B)$ такое, что

$$\bar{r}_{ij} = \begin{cases} r^*_{ij} + \delta, & i \in I_j(R^*, z^*) ; \\ r^*_{ij}, & i \in I \setminus I_j(R^*, z^*) ; \end{cases}$$

$$\bar{r}_{ij'} = r^*_{ij'}, \quad i \in I, \ j' \in J, \ j' \neq j .$$

Для всякого $j' \in J$, $j' \neq j$, очевидно, $w_{j'}(\bar{R}, z^*) = w_{j'}(R^*, z^*)$, а

$$w_j(\bar{R}, z^*) = \max_{i \in I} \left\{ f_{ij} - (c_{ij} + \bar{r}_{ij}) z^* \right\} = \max_{i \in I_j(R^*, z^*)} \left\{ f_{ij} - (c_{ij} + r^*_{ij} + \delta) z^* \right\} =$$

$$= w_j(R^*, z^*) - \delta z^* < w_j(R^*, z^*)$$

, откуда и следует, что решение (R^*, z^*) не является оптимальным. Лемма доказана.

Лемма 2. Если (R^*, z^*) - оптимальное решение задачи $\mathcal{D}\mathcal{E}(F, C, C^0, B)$ и $z^* > 0$, то

$$\sum_{j \in J} \beta_j^0 (R^*, z^*) \geq B .$$

Доказательство. Предположим противное. Покажем, что в этом случае решение (R^*, z^*) не является оптимальным.

Для $j \in J$ обозначим через $i(j)$ такой элемент $i \in I_j^0(R^*, z^*)$, для которого $\beta_j^0(R^*, z^*) = c_{ij} + r^*_{ij}$. Поскольку

$$f_{i(j)j} - (c_{i(j)j} + r^*_{i(j)j}) z^* = w_j(R^*, z^*) =$$

$$= \max_{i \in I} \left\{ f_{ij} - (c_{ij} + r^*_{ij}) z^* \right\} ,$$

то найдется величина δ_j , $0 < \delta_j \leq z^*$, такая, что для любого $i \in \mathbf{I} \setminus \mathrm{I}_j(R^*, z^*)$ неравенство

$$f_{i(j)j} - (c_{i(j)j} + \tau^*_{i(j)j})\, z \geq f_{ij} - (c_{ij} + \tau^*_{ij})\, z$$

справедливо при всех z , $z^* - \delta_j \leq z \leq z^*$. Это же неравенство выполняется при всех $z \leq z^*$, если $i \in \mathrm{I}_j(R^*, z^*)$ и

$$c_{ij} + \tau^*_{ij} \leq \beta^0_j(R^*, z^*) .$$

Рассмотрим множество

$$\mathrm{I}'_j = \{ i \in \mathrm{I}_j(R^*, z^*) \mid c_{ij} + \tau^*_{ij} > \beta^0_j(R^*, z^*) \} .$$

Если $\mathrm{I}'_j \neq \emptyset$, то для всякого $i \in \mathrm{I}'_j$ положим

$$\varepsilon_i = (c^0_i - \sum_{j' \in \mathbf{J}} \tau^*_{ij'}) / J$$

и обозначим через z_i решение уравнения

$$f_{i(j)j} - (c_{i(j)j} + \tau^*_{i(j)j})\, z = f_{ij} - (c_{ij} + \tau^*_{ij} + \varepsilon_i)\, z .$$

Так как $\varepsilon_i > 0$, нетрудно убедиться, что $z_i < z^*$ и для всех z , таких, что $z_i \leq z \leq z^*$, имеет место неравенство

$$f_{i(j)j} - (c_{i(j)j} + \tau^*_{i(j)j})\, z \geq f_{ij} - (c_{ij} + \tau^*_{ij} + \varepsilon_i)\, z .$$

Пусть $z_j = \max\limits_{i \in \mathrm{I}'_j} z_i$, тогда при любом $i \in \mathrm{I}'_j$ это неравенство выполняется при всех z таких, что $z_j \leq z \leq z^*$.

Если же $\mathrm{I}_j = \emptyset$, положим $z_j = 0$.

Пусть, далее, $\bar{z}_j = \max \{ z_j, z^* - \delta_j \} < z^*$,

$$\bar{\tau}_{ij} = \begin{cases} \tau^*_{ij} + \varepsilon_i , & i \in \mathrm{I}'_j , \\ \tau^*_{ij} , & i \in \mathrm{I}'_j . \end{cases}$$

Для всех z , $\bar{z}_j \leq z \leq z^*$, имеем:

$$f_{i(j)j} - (c_{i(j)j} + \bar{\tau}_{i(j)j})\, z = \max_{i \in \mathbf{I}} \{ f_{ij} - (c_{ij} + \bar{\tau}_{ij})\, z \} .$$

Положим $\bar{z} = \max\limits_{j \in \mathbf{J}} \bar{z}_j$ и рассмотрим решение $(\bar{R}, \bar{z})$, где $\bar{R} = (\bar{\tau}_{ij})$.

Поскольку

$$\sum_{j \in \mathbf{J}} \bar{\tau}_{ij} \leq c^0_i$$

для всякого $i \in \mathbf{I}$, то это решение является допустимым решением задачи

$\mathcal{D}\mathcal{E}(F,C,C^0,B)$. Далее, поскольку для любого $j \in J$,

$$f_{i(j)j} - (c_{i(j)j} + \bar{r}_{i(j)j})\bar{z} = f_{i(j)j} - \beta_j^0(R^*, z^*)\bar{z} =$$

$$= \max_{i \in I}\{f_{ij} - (c_{ij} + \bar{r}_{ij})\bar{z}\} = w_j(\bar{R}, \bar{z}),$$

то

$$\Big[\sum_{j \in J} w_j(R^*, z^*) + Bz^*\Big] - \Big[\sum_{j\in J} w_j(\bar{R}, \bar{z}) + B\bar{z}\Big] =$$

$$= \Big[B - \sum_{j \in J}\beta_j^0(R^*, z^*)\Big](z^* - \bar{z}).$$

Следовательно, решение (R^*, z^*) не является оптимальным для задачи $\mathcal{D}\mathcal{E}(F,C,C^0,B)$. Лемма доказана.

Аналогичным образом доказывается и следующая

Л е м м а 3. Если (R^*, z^*) - оптимальное решение задачи $\mathcal{D}\mathcal{E}(F,C,C^0,B)$, $z^* > 0$, то

$$\sum_{j \in J} \mu_j^0(R^*, z^*) \le B.$$

Эта лемма завершает доказательство того, что класс тупиковых решений задачи $\mathcal{D}\mathcal{E}(F,C,C^0,B)$ содержит оптимальное решение.

В качестве искомого значения $\mathbf{B}$ верхней границы возьмем величину

$$\mathbf{B}(R,z) = \sum_{j \in J} w_j(R,z) + Bz,$$

где (R,z) - некоторое тупиковое решение задачи $\mathcal{D}\mathcal{E}(F,C,C^0,B)$.

Ниже приводится алгоритм построения тупикового решения (R,z), дающего значение верхней границы, близкое к наименьшему. При построении такого решения будем опираться, в частности, на следующее утверждение.

Пусть (R,z) - допустимое решение задачи $\mathcal{D}\mathcal{E}(F,C,C^0,B)$. Для $j \in J$ через $i(j)$ обозначим номер $i \in I_j(R,z)$ такой, что $\mu_j(R,z) = c_{ij} + r_{ij}$.

Л е м м а 4. Пусть

$$\sum_{j \in J} \mu_j(R,z) > B$$

и пусть при любых $i \in I$, $j \in J$ справедливо условие: если $f_{ij} \le f_{i(j)j}$, то $c_{ij} + r_{ij} \ge c_{i(j)j} + r_{i(j)j}$. Тогда задача $\mathcal{E}(F,C,C^0,B)$ не имеет допустимых решений.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим некоторый элемент $j \in J$. Нетрудно заметить, что при сделанных предположениях

$$f_{i(j)j} - (c_{i(j)j} + \tau_{i(j)j})\, z' \geq f_{ij} - (c_{ij} + \tau_{ij})\, z'$$

для любого $z' > z$ и $i \in I$, т.е. $w_j(R, z') = f_{i(j)j} - \mu_j(R, z)\cdot z'$. Следовательно, величина целевой функции задачи $\mathcal{D}\mathcal{E}(F, C, C^{\circ}, B)$ не ограничена снизу, откуда и следует справедливость утверждения леммы.

4.3. Предлагаемый алгоритм построения тупикового решения задачи $\mathcal{D}\mathcal{E}(F, C, C^{\circ}, B)$ состоит из конечного числа однотипных этапов.

Пусть к началу некоторого этапа построено допустимое решение (R, z) рассматриваемой задачи, обладающее тем свойством, что точка z является оптимальной для задачи $\mathcal{D}\mathcal{R}(F, CR, B)$, где $CR = (c_{ij} + \tau_{ij})$. Действия на этом этапе начинаются с проверки, цель которой - установить, является ли решение (R, z) тупиковым, и если да, то алгоритм заканчивает работу. В противном случае дальнейшие действия на этом этапе направлены на то, чтобы, изменяя некоторым рациональным образом матрицу R, получить матрицу R', такую, что

$$B(R', z') < B(R, z),$$

где z' - оптимальное решение задачи $\mathcal{D}\mathcal{R}(F, CR', B)$, $CR' = (c_{ij} + \tau'_{ij})$. При этом для отыскания точки z' применяется алгоритм решения многовариантной задачи о ранце, описанный в § 2 данной работы, а в качестве начальной точки этого алгоритма используется точка z. Если в ходе выполнения этих действий на основании утверждения леммы 4 делается вывод о том, что исходная задача $\mathcal{E}(F, C, C^{\circ}, B)$ не имеет допустимых решений, то алгоритм заканчивает работу. В противном случае на следующем этапе алгоритма рассматривается решение (R', z').

Поступила в ред.-изд.отдел
11 апреля 1984 г.

Л и т е р а т у р а

1. Береснев В.Л., Гимади Э.Х., Дементьев В.Т. Экстремальные задачи стандартизации. - Новосибирск, Наука, 1978. - 333 с.

2. Береснев В.Л., Ибрагимов Г.И., Кочетов Ю.А. Алгоритм решения задачи оптимального выбора динамического ряда изделий.- В кн.: Задачи поиска оптимальных решений (Управляемые системы).Новосибирск,1984, вып. 24, с. 3-19.

3. Zemel E. The linear multiple-choice knapsack problem.- Oper. Res., 28, 1980, N 6, p. 1412-1423.

4. Dyer M.E. A O(n) algorithm for the multiple-choice knapsack linear program.- Math. Program., 29, 1984, N 1, p. 57-63.

5. Гимади Э.Х., Глебов Н.И., Дементьев В.Т. Об одном методе построения нижней оценки и приближенного решения с апостериорной оценкой точности для задачи стандартизации.- В кн.: Управляемые системы. Новосибирск, 1974, вып. 13, с. 26-31.

6. Гимади Э.Х., Гвоздев С.Е., Гончаров Е.Н. Об обратной задаче стандартизации.- В кн.: Вычислительная техника и дискретная математика. Тез. докл. регион. конф., посвященной Дню радио. Новосибирск, 1983, с. 39-40.