Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1987 г., вып. 27

УДК 519.854

ЗАДАЧА СТАНДАРТИЗАЦИИ С ДАННЫМИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЗНАКА И СВЯЗНЫМИ, КВАЗИВЫПУКЛЫМИ И ПОЧТИ КВАЗИВЫПУКЛЫМИ МАТРИЦАМИ

Э.Х.Гимади

1. Рассматривается задача стандартизации (ЗС) [1–5] в следующей математической постановке:

$$L(\tilde{m}) = \sum_{i\in\tilde{m}} g_i^0 + \sum_{j\in n} \min_{i\in\tilde{m}} g_{ij} \to \min_{\tilde{m}\subset m}, \qquad (1)$$

$$|\tilde{m}| \le N_0, \qquad (2)$$

где

$$g_i^0 \in R^m,\ g_{ij}\in R^{m\times n},\ m=\{1,\dots,m\},\ n=\{1,\dots,n\},\ 1\le N_0\le m.$$

ЗС с неотрицательными исходными данными обозначим через ЗС$^+$. Используем обозначения ЗС$_1$ и ЗС$_{1-2}$ в зависимости от представления постановки ЗС в виде (1) или (1)-(2). ЗС в общем случае трудноpешаема [6]. К числу ЗС, для которых удается построить эффективные методы, относятся ЗС со связными и квазивыпуклыми матрицами [1 – 5]. В данной статье приводятся алгоритмы решения ЗС с данными произвольного знака в случае связных и квазивыпуклых матриц, а также описываются более широкие классы "почти квазивыпуклых" ЗС, разрешимых за полиномиальное время.

2. Матрицу (g_{ij}) называют *связной*, если для любой пары строк i, k $(1\le i\le k\le m)$ матрицы разность $(g_{ij}-g_{kj})$ меняет знак при монотонном изменении $j=1,\dots,n$ не более одного раза. ЗС со связной матрицей (g_{ij}) будем называть связной ЗС (СЗС).

Для СЗС$_1$ и СЗС$^+_{1-2}$ построены алгоритмы с трудоемкостью $O(mn)$ и $O(N_0 mn)$ действий [1 – 5]. Метод, использованный в [2, 4] для решения СЗС$^+_{1-2}$, оказывается не приемлемым для СЗС$_{1-2}$. Для решения последней удается построить алгоритм, требующий большего числа действий по сравнению со случаем СЗС$^+_{1-2}$.

Теорема 1. СЗС$_{1-2}$ может быть решена за $O(N_0 mn + n\nu)$ действий, где ν – трудоемкость упорядочения одного столбца матрицы (g_{ij}).

Доказательство. Пусть $\preceq$ – отношение лексикографического порядка на множестве m строк матрицы (g_{ij}). Трудоемкость лексикографического упорядочения строк матрицы оценивается величиной $O(mn\log_2 m)$.

а в случае g_{ij} целых, $0 \le g_{ij} < \nu$, - величиной $O(mn + n\nu)$ [7]. Далее считаем, что строки матрицы перенумерованы в соответствии с указанным линейным порядком $\preceq$.

Из существования оптимального решения СЗС с совокупностью связных областей обслуживания [1 - 3] следует, что СЗС$_{1-2}$ можно решать, ограничившись поиском подмножества $\tilde{m} = \{i_1, \dots, i_N\}$, $N \le N_0$, с совокупностью $\{n_{i_K},\ K = 1, \dots, N\}$ связных областей обслуживания: $n_{i_K} = (j_{K-1}, j_K]$, $K = 1, \dots, N$; $0 = j_0 \le j_1 \le \dots \le j_N = n$. При этом решение $\tilde{m} = \{i_1, \dots, i_N\}$, $N \le N_0$, назовем согласованно-связным, если $i_1 < \dots < i_N$. Из упорядочения строк матрицы согласно отношению $\preceq$ следует существование согласованно-связного оптимального решения СЗС$_{1-2}$. Это позволяет для решения СЗС$_{1-2}$ использовать аппарат рекуррентных соотношений в духе динамического программирования.

Обозначим задачу (1)-(2) через $\langle m, n, N_0 \rangle$ или $\langle [1, m], (0, n], N_0 \rangle$ и погрузим ее в семейство редуцированных задач вида (1)-(2):

$$\{\langle [1, i], (0, j), N \rangle \mid i = 1, \dots, m;\ j = 0, 1, \dots, n;\ N = 1, \dots, N_0\}.$$

Оптимальное значение целевой функции в задаче $\langle [1, i], (0, j], N \rangle$ обозначим через $L_N(i, j)$, а в задаче $\langle [1, i], (0, j], N \rangle_i$ (с дополнительным требованием, чтобы элемент i входил в оптимальное решение) - через $S_N(i, j)$. Искомое значение целевой функции равно $L^* = L_{N_0}(m, n)$.

Лемма 1. Величины $L_N(i, j)$ и $S_N(i, j)$, $N = 1, \dots, N_0$; $i = 1, \dots, m$; $j = 0, 1, \dots, n$, могут быть вычислены с помощью рекуррентных соотношений:

$$L_N(i, j) = \min\{L_N(i-1, j);\ S_N(i, j)\},$$

$$S_N(i, j) = \min\{g_i^0 + L_{N-1}(i-1, j);\ g_{ij} + S_N(i, j-1)\}.$$

Доказательство следует из очевидных соотношений:

$$L_N(i, j) = \min_{1 \le K \le i} S_N(K, j);$$

$$S_N(i, j) = \min_{0 \le \ell \le j} \{L_{N-1}(i-1, \ell) + (g_i^0 + \sum_{t=\ell+1}^{j} g_{it})\},$$

$$N = 1, \dots, N_0;\ i = 1, \dots, m;\ j = 0, 1, \dots, n,$$

и начальных условий:

$$L_0(i, j) = L_N(0, j) = \begin{cases} 0 & \text{при } j = 0, \\ \infty & \text{при } 1 \le j \le n. \end{cases}$$

С учетом леммы 1 и необходимости предварительного упорядочения строк

матрицы согласно порядку $\lesssim$ получим справедливость теоремы.

3. Матрицу и ЗС называют квазивыпуклой (квазивогнутой), если для каждого столбца $j \in \mathcal{N}$ матрицы (g_{ij}) и строк $i_1 \le i_2 \le i_3$ справедливо $g_{i_2 j} \le \max\{g_{i_1 j}; g_{i_3 j}\}$ $(g_{i_2 j} \ge \min\{g_{i_1 j}; g_{i_3 j}\})$. В [4], используя представление квазивыпуклой $ЗС^+$ в виде задачи минимизации правильного полинома от булевых переменных, осуществлено сведение последней к $СЗС^+$, что позволило построить алгоритмы решения квазивыпуклых $ЗС_1$ и $ЗС^+_{1-2}$ с оценками $O(mn + m^2)$ и $O(mn + N_0 m^2)$ соответственно. Более перспективной для квазивыпуклой ЗС является сводимость к задаче ближайшего соседа [8 - 9]:

$$\sum_{K=1}^{N+1} f(i_{K-1}, i_K) \to \min_{0 = i_0 < i_1 < \ldots < i_{N+1} = m+1}$$

(при ограничении на N вида (2) либо при $N > 0$), где

$$f(i', i) = g_i^0 + \sum_{i' < p \le q < i} \varphi_{pq}, \quad 0 \le i' \le i \le m+1;$$

$$\varphi_{pq} = \sum_{(\ell, j) \in \Pi_{pq}} (c_\ell^j - c_{\ell-1}^j), \quad 1 \le p \le q \le m;$$

$c_1^j \le \ldots \le c_m^j$ - упорядоченные по неубыванию элементы j -го столбца матрицы (g_{ij}), $j = 1, \ldots, n$;

$$\Pi_{pq} = \{(\ell, j) \mid \{g_{ij} \ge c_\ell^j\} = \mathcal{M} \setminus [p, q],\ \ell = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n\};$$

$\{g_{ij} \ge c_\ell^j\}$ - лебегово множество целочисленных точек в сегменте $[1, m]$, в которых элементы j -го столбца матрицы не меньше c_ℓ^j, $\ell = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

При этом имеют место следующие факты:

1) функция $f(i', i)$ удовлетворяет условию Глебова [8 - 9]

$$f(i_1, i_2) + f(K_1, K_2) - f(i_1, K_2) - f(K_1, i_2) \ge 0 \tag{3}$$

при $\quad 0 \le i_1 \le K_1 \le K_2 \le i_2 \le m+1$;

2) элементы матрицы (φ_{pq}) можно вычислить за время $O(mn + m^2)$;

3) элементы матрицы $\{f(i', i)\}$, $0 \le i' \le i \le m+1$, при наличии матрицы (φ_{pq}) можно вычислить за $O(m^2)$ действий.

Факт 1 следует из неотрицательности φ_{pq}, $1 \le p \le q \le m$, и представления левой части неравенства (3) в виде $\sum_{p=i_1+1}^{K_1} \sum_{q=K_2}^{i_2-1} \varphi_{pq}$.

Факт 2 легко доказывается с учетом того, что в случае квазивыпуклой матрицы (g_{ij}) очередной элемент c_ℓ^j в j-м столбце равен либо $g_{p-1,j}$,

либо $g_{q+1,j}$, где p и q, $1<p\le q<m$, - граничные точки сегмента, являющегося дополнением лебегова множества $\{g_{ij}\ge c_\ell^j\}$ до множества $\mathcal{M}$, $\ell=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$.

Факт 3 следует из представлений:

$$f(i',i)=g_i^0+T_{i-1}-R_{i',i-1} \quad \text{и} \quad \sum_{i'<p\le q<i}\varphi_{pq}=T_i-R_{i'i},$$

$$0\le i'<i\le m+1, \quad \text{где} \quad T_i=\sum_{1\le p\le q\le i}\varphi_{pq},\ 1\le i\le m,$$

$$R_{i'i}=\sum_{p=1}^{i'}\sum_{q=p}^{i}\varphi_{pq},\quad 0\le i'<i<m$$

, и рекуррентных соотношений: $T_i=T_{i-1}+S_{ii}$, $1\le i\le m$, и $R_{i'i}=R_{i',i-1}+S_{i'i}$, $0\le i'<i\le m$, где $T_0=0$, $R_{ii}=T_i$, $0\le i\le m$, $S_{iq}=\sum_{p=1}^{i}\varphi_{pq}$, $1\le i\le q\le m$, $S_{0q}=0$, $S_{iq}=S_{i-1,q}+\varphi_{iq}$, $1\le i\le q\le m$.

С учетом сказанного выше и оценок трудоемкости решения задачи ближайшего соседа при выполнении условия (3) [9] справедлива

Т е о р е м а 2. Квазивыпуклые ЗС$_1$ и ЗС$_{1-2}$ могут быть решены за время, оцениваемое соответственно величинами $O(mn+m^2)$ и $O(mn+m^2+N_0\,m\log_2 m)$.

4. Компоненту связности лебегова множества $\{g_{ij}\ge c_\ell^j\}$, $\ell=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$, назовем в н у т р е н н е й относительно множества $\mathcal{M}$, если она не содержит его крайних точек. Понятно, что в случае квазивыпуклой матрицы внутренние компоненты связности (ВКС) в лебеговых множествах $\{g_{ij}\ge c_\ell^j\}$ отсутствуют.

Далее мы будем исследовать более широкий класс ЗС с матрицами, у которых лебеговы множества $\{g_{ij}\ge c_\ell^j\}$, $\ell=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$, могут содержать ВКС. Сначала рассмотрим класс матриц не более чем с одной ВКС в каждом лебеговом множестве $\{g_{ij}\ge c_\ell^j\}$, $\ell=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$.

Матрицу (g_{ij}) и ЗС назовем к в а з и в ы п у к л о й с п р а в а (с л е в а), если для всяких $\ell=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$ максимальная (минимальная) точка любой ВКС, принадлежащей лебегову множеству $\{g_{ij}\ge c_\ell^j\}$, совпадает с максимальной (минимальной) точкой этого множества (см. рис. 1).

Понятно, что квазивыпуклая справа матрица становится квазивыпуклой слева, если строки матрицы (g_{ij}) перенумеровать в обратном порядке. Поэтому алгоритм решения для квазивыпуклой справа ЗС можно использовать для решения квазивыпуклой слева ЗС, и наоборот.

Л е м м а 2. Если матрица (g_{ij}), $i\in\mathcal{M}$, $j\in\mathcal{N}$, квазивыпукла справа, то для любого $k=1,\dots,m$ матрица (g_{ij}^k), $i=1,\dots,k$, $j\in\mathcal{N}$, где $g_{ij}^k=\min\{g_{ij};g_{kj}\}$, квазивыпукла на целочисленном сегменте $[1,k]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что утверждение неверно, т.е. для некоторой матрицы (g_{ij}^{K}), $i=1,\dots,K$; $j\in\mathcal{N}$, найдутся такие индексы i_1, i_2, i_3 $(1\le i_1\le i_2\le i_3\le K)$ и $j\in\mathcal{N}$, что

$$g_{i_2 j}^{K} > max\{g_{i_1 j}^{K};\ g_{i_3 j}^{K}\}. \qquad (4)$$

Из неравенства (4) следует, что $1\le i_1<i_2<i_3<K$ и $g_{i_2 j}\ge C>$ $>g_{i_1 j}, g_{i_2 j}\ge C>g_{i_3 j}$, где $C=min\{g_{i_2 j};\ g_{Kj}\}$. Отсюда получим, что точки i_2 и K содержатся в разных компонентах связности лебегова множества $\{g_{ij}\ge C\}$, причем точка i_2 принадлежит ВКС. Пусть μ - максимальная точка этой ВКС. Из этого следует $i_2\le\mu<i_3\le max\{g_{ij}\ge C\}$, что противоречит определению квазивыпуклости справа матрицы (g_{ij}), согласно которому должно быть равенство $\mu=max\{g_{ij}\ge C\}$. Лемма доказана.

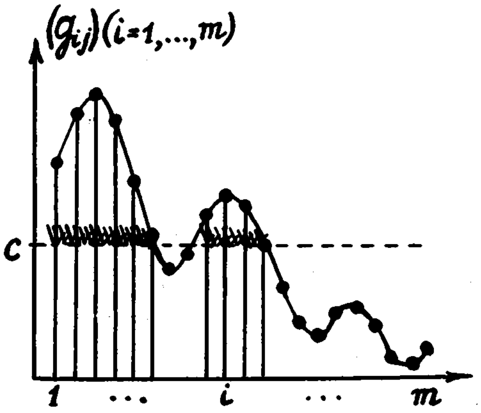

Рис. 1. Квазивыпуклая справа функция.

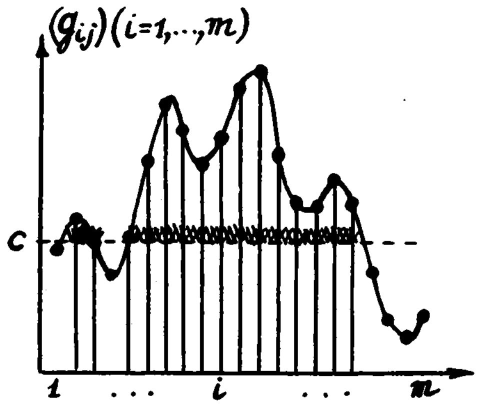

Рис. 2. Обобщенно-квазивыпуклая функция.

Из сказанного выше вытекает утверждение, позволяющее построить алгоритм решения ЗС с квазивыпуклой справа (или слева) матрицей (g_{ij}).

Т е о р е м а 3. ЗС с квазивыпуклой справа матрицей (g_{ij}) сводится к решению последовательности задач с квазивыпуклыми матрицами (g_{ij}^{K}), $i=1,\dots,K$, $j\in\mathcal{M}$; $K=1,\dots,m$.

Таким образом, оценки времени решения ЗС с квазивыпуклыми справа (или слева) матрицами (g_{ij}) увеличиваются в m раз по сравнению с оценками, полученными в предыдущем параграфе для случая квазивыпуклой ЗС. Заметим, что оценки трудоемкости решения квазивыпуклых справа (или слева) ЗС сохраняются и в частном случае матриц, у которых часть столбцов квазивыпукла, а часть - квазивогнута [10, 11]. Белинской [11] этот результат получен с использованием техники полиномов от булевых переменных.

5. Перейдем к рассмотрению более широкого класса матриц, включающего в себя квазивыпуклые и квазивыпуклые справа (или слева) матрицы.

Матрицу и ЗС назовем **обобщенно-квазивыпуклой**, если любое лебегово множество $\{g_{ij} \geqslant c_\ell^j\}$, $\ell = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,n$, состоит не более чем из двух компонент связности (см. рис. 2).

Понятно, что в случае обобщенно-квазивыпуклой матрицы лебеговы множества $\{g_{ij} \geqslant c_\ell^j\}$ с двумя ВКС допустимы. Частным случаем обобщенно-квазивыпуклой матрицы является матрица (g_{ij}), $i \in \mathcal{M}$, $j \in \mathcal{N}$, каждый столбец которой есть функция не более чем с одним внутренним минимумом [10].

Лемма 3. В случае обобщенно-квазивыпуклой ЗС для всяких k, r $(1 \leqslant k \leqslant r \leqslant m)$ матрица (g_{ij}^{kr}), $i = k,\dots,r$; $j \in \mathcal{N}$, где $g_{ij}^{kr} = \min\{g_{kj}; g_{ij}; g_{rj}\}$, квазивыпукла на целочисленном сегменте $[k,r]$.

Доказательство. Допустим, что утверждение леммы неверно, т.е. найдется такая матрица (g_{ij}^{kr}), $i = k,\dots,r$; $j \in \mathcal{N}$, что для некоторых индексов i_1, i_2, i_3 $(k \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant i_3 \leqslant r)$ и $j \in \mathcal{N}$ нарушено условие квазивыпуклости:

$$g_{i_2 j}^{kr} > \max\{g_{i_1 j}^{kr};\ g_{i_3 j}^{kr}\}.$$

Отсюда следует цепочка строгих неравенств $k < i_1 < i_2 < i_3 < r$, а также $g_{i_1 j} < g_{i_2 j}^{kr}$, $g_{i_2 j}^{kr} > g_{i_3 j}$. Обозначив $c = \min\{g_{kj}; g_{i_2 j}; g_{rj}\}$, имеем неравенства $g_{kj} \geqslant c > g_{i_1 j}$, $g_{i_1 j} < c \leqslant g_{i_2 j}$, $g_{i_2 j} \geqslant c > g_{i_3 j}$, $g_{i_3 j} < c \leqslant g_{rj}$, откуда следует, что точки k, i_2 и r содержатся в трех разных компонентах связности одного и того же лебегова множества $\{g_{ij} \geqslant c\}$, что противоречит условию обобщенной квазивыпуклости матрицы (g_{ij}). Тем самым лемма доказана.

В качестве следствия из леммы получается

Теорема 4. Обобщенно-квазивыпуклая ЗС сводится к решению последовательности ЗС с квазивыпуклыми матрицами

$$(g_{ij}^{kr}),\ i = k, k+1,\dots,r;\ j \in \mathcal{N};\ 1 \leqslant k \leqslant r \leqslant m.$$

Отсюда вытекает, что время решения обобщенно-квазивыпуклой ЗС увеличивается не более чем в m^2 по сравнению со временем решения квазивыпуклой ЗС.

Заметим, что в случае квазивыпуклых справа (или слева) и обобщенно-квазивыпуклых ЗС порядок величины требуемого объема памяти (в отличие от числа операций) остается таким же, как и для квазивыпуклых ЗС.

6. В заключение рассмотрим ЗС с квазивогнутыми матрицами. Этот класс задач является частным случаем ЗС с квазивыпуклыми справа (или слева) матрицами. Однако непосредственный учет свойства квазивогнутости позволяет по-

лучить более экономные оценки трудоемкости решения.

Представим оптимальное значение целевой функции ЗС в виде

$$L^* = \min \{L_1^*, L_2^*\},$$

где

$$L_1^* = \min_{1 \le i \le m} \{g_i^0 + \sum_{j=1}^{n} g_{ij}\},$$

$$L_2^* = \min_{1 < N \le N_0} \min_{1 \le i_1 < \ldots < i_N \le m} \{\sum_{K=1}^{N} g_{i_K}^0 + \sum_{j=1}^{n} \min_{1 \le K \le N} g_{i_K j}\}.$$

Введем обозначение для результатов решения следующих задач линейного (0-1)-целочисленного программирования:

$$S_{K\tau}^{\nu} = \min \{\sum_{i=K}^{\tau} g_i^0 x_i \mid \sum_{i=K}^{\tau} x_i \le \nu;\ x_i \in \{0,1\},\ i = K, \ldots, \tau\},$$

$$1 < K \le \tau < m,\quad 0 \le \nu \le N_0 - 2.$$

С учетом квазивогнутости матрицы (g_{ij}) и только что введенного обозначения имеем:

$$L_2^* = \min_{1 \le N \le N_0} \min_{1 \le i_1 < \ldots < i_N \le m} (\sum_{K=1}^{N} g_{i_K}^0 + \sum_{j=1}^{n} \min\{g_{i_1 j};\ g_{i_N j}\}) =$$

$$= \min_{1 \le K < \tau \le m} \{g_K^0 + g_\tau^0 + W_{K\tau} + S_{K+1,\tau-1}^{N_0-2}\}, \qquad (5)$$

где $W_{K\tau} = \sum_{j=1}^{n} \min\{g_{Kj};\ g_{\tau j}\},\ 1 \le K < \tau \le m.$

Л е м м а 4. В случае квазивогнутой матрицы (g_{ij}) элементы верхней треугольной матрицы $W_{K\tau}\ (0 \le K < \tau \le m)$ могут быть вычислены за $O(mn + m^2)$ действий.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из квазивогнутости матрицы g_{ij} следует

$$W_{K\tau} = \sum_{p=1}^{K} \sum_{q=\tau}^{m} \varphi_{pq},\quad 1 \le K < \tau \le m,$$

где

$$\varphi_{pq} = \sum_{(j,\ell) \in \Pi_{pq}} (c_\ell^j - c_{\ell-1}^j),$$

$$\Pi_{pq} = \{(j,\ell) \mid \{g_{ij} \geq c_\ell^j\} = [p,q],\ j = 1,\ldots,n,\ \ell = 1,\ldots,m\},$$

$1 \leq p \leq q \leq m$. (Обозначения для $c_\ell^j, \{g_{ij} \geq c_\ell^j\},\ \ell = 1,\ldots,m,$ $j = 1,\ldots,n$, введены в п.3.)

Так же, как и в случае квазивыпуклой матрицы, элементы верхней треугольной матрицы $(\varphi_{pq})\ (1 \leq p \leq q \leq m)$ можно вычислить за $O(mn+m^2)$ действий.

Вычисление элементов матрицы $(W_{k\tau})$, $1 \leq k < \tau \leq m$, осуществляется за $O(m^2)$ действий с помощью рекуррентных соотношений:

$$w_{km} = \varphi_{km};\quad w_{k\tau} = w_{k,\tau+1} + \varphi_{k\tau};$$

$$W_{k\tau} = W_{k-1,\tau} + w_{k\tau},$$

$(1 \leq k < \tau \leq m)$, где $W_{0\tau} = 0,\quad 1 \leq \tau \leq m$.

В целом вычисление обеих матриц $(W_{k\tau})$, $1 \leq k < \tau \leq m$, и (φ_{pq}), $1 \leq p \leq q \leq m$, требует времени $O(mn+m^2)$. Лемма доказана.

Займемся теперь членом $S_{k+1,\tau-1}^{N_0-2}$ внутри фигурных скобок в формуле (5). При $g_i^0 \geq 0$, $i = 1,\ldots,m$, этот член равен нулю, и, следовательно, с учетом леммы 4 квазивогнутая ЗС$^+$ решается за время $O(mn+m^2)$ независимо от того, учитывается или нет ограничение на мощность выбираемого множества $\widetilde{\mathfrak{M}}$ (при $N_0 > 1$).

Для ЗС$_1$ с элементами g_i^0, $i = 1,\ldots,m$, произвольного знака легко показывается, что добавочный член равен разности $S_{\tau-1} - S_k$, где

$$S_t = \sum_{i=1}^{t} \min\{0; g_i^0\},\quad t = 1,\ldots,m,$$

так что при $g_i^0 \in R^m$ время решения квазивогнутой ЗС$_1$ также оценивается величиной $O(mn+m^2)$. В случае постановки ЗС$_{1-2}$ необходимо вычислить совокупность величин $S_{k\tau}^{\nu}$, что можно осуществить за время $O(N_0 m^2)$ с использованием очевидных рекуррентных соотношений:

$$S_{k\tau}^{\nu} = \min\{S_{k,\tau-1}^{\nu};\ S_{k,\tau-1}^{\nu-1} + g_\tau^0\},$$

где

$$S_{k,\tau}^{0} = S_{k,k-1}^{\nu} = 0,\ 0 \leq \nu < N_0,\ 1 < k \leq \tau < m.$$

Из сказанного выше следует

Теорема 5. Имеют место следующие оценки времени решения квазивогнутой ЗС:

1) $\sim (mn + m^2)$ в случае $ЗС_1$ и $ЗС^+_{1-2}$;

2) $\sim m(n + N_0 m)$ в случае постановки $ЗС_{1-2}$.

Поступила в ред.-изд. отдел
20 марта 1987 г.

Литература

1. Гимади Э.Х. Выбор оптимальных шкал в одном классе задач типа размещения, унификации и стандартизации// Управляемые системы. Новосибирск, 1970. - Вып. 6. - С. 57-70.

2. Береснев В.Л., Гимади Э.Х., Дементьев В.Т. Экстремальные задачи стандартизации.-Новосибирск: Наука. - 1978. - 333 с.

3. Гимади Э.Х., Дементьев В.Т. Некоторые задачи выбора оптимальных параметрических рядов и методы их решения (задачи стандартизации)// Проблемы кибернетики. - М.: Наука, - 1973. - Вып. 27. - С. 19-32.

4. Береснев В.Л. Алгоритмы минимизации полиномов от булевых переменных// Проблемы кибернетики. - М.: Наука. - 1979. - Вып. 36. - С. 225-246.

5. Гимади Э.Х. Эффективный алгоритм решения задачи размещения с областями обслуживания, связными относительно ациклической сети// Экстремальные задачи исследования операций (Управляемые системы), Новосибирск.-1983. Вып. 23. - С. 12-23.

6. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи.- М.: Мир, 1982. - 416 с.

7. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов.-М.: Мир. - 1979. - 536 с.

8. Глебов Н.И. О выпуклых последовательностях// Дискретный анализ. - Новосибирск, 1965. - Вып. 4. - С. 10-22.

9. Гимади Э.Х. Об одном классе задач нелинейного программирования// Управляемые системы. - Новосибирск, 1969. - Вып. 3. - С. 101-113.

10. Разработка типовой методики оптимизации параметрического (типоразмерного ряда). Книга 2 (отчет ВНИИС Госстандарта СССР и ИМ СО АН СССР. В.В.Ткаченко, С.Л.Соболев, В.Т.Дементьев, Э.Х.Гимади, Д.М.Комаров), Москва, ВНИИС, 1972, 89 с.

11. Белинская И.Г. Об одном классе поликомов от булевых переменных// Целочисленные экстремальные задачи (Управляемые системы). - Новосибирск, 1981. - Вып. 21. - С. 6-12.