Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1987 г., вып. 27

УДК 519.8

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ МИНИМИЗАЦИИ ПСЕВДОИНТЕГРАЛЬНОЙ СУММЫ

Л.Е.Горбачевская

Рассматривается следующая задача математического программирования:

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1})^{\alpha} \to \inf_{n,\{x_k\}_{k=\overline{0,n}}} \qquad (1)$$

при условии

$$0 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n = u, \quad n \geq 1, \qquad (2)$$

где $\alpha \in (0,1)$, $f(x)$ - непрерывная, неубывающая функция, $f(x) > 0$ для $x \in (0,u]$.

Задачи такого рода возникают в области стандартизации при выборе оптимального ряда технических устройств [3, 4]. Функция $f(x)$ отражает зависимость стоимости производства одного технического устройства от величины его основной характеристики x, показатель α характеризует зависимость стоимости производства этого устройства от его серийности.

В работе исследован ряд свойств задачи (1)-(2). Показана конечность оптимального параметрического ряда для некоторого класса функций $f(x)$, отмечена связь рассматриваемой задачи с интегралом по внешней мере, введено понятие псевдоинтеграла и доказаны некоторые его свойства.

§ 1. Некоторые свойства задачи минимизации псевдоинтегральной суммы

Пусть $S(0,u)$ - оптимальное значение целевой функции задачи (1)-(2). Нетрудно показать, что $S(0,u)$ есть предел невозрастающей последовательности $\{S_n(0,u)\}_{n=1,2\dots}$ непрерывных, не убывающих по u функций, определенных на интервале $[0,+\infty)$. Здесь $S_n(0,u)$ - оптимальное значение целевой функции в задаче:

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1})^{\alpha} \to \inf_{\{x_k\}_{k=\overline{0,n}}}, \qquad (1n)$$

$$0 = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = u, n \geq 1, n - \text{фикс.} \qquad (2n)$$

Справедливо

Утверждение 1. $S(0,u)$ - непрерывная, не убывающая по u функция, являющаяся решением функционального уравнения

$$S(0,u) = \min_{x\in[0,u]} \{S(0,x) + f(u)(u-x)^{\alpha}\}. \quad (3)$$

Замечание 1. Если $S(a,u)$, $S_n(a,u)$, $n = 1,2 \ldots$, - оптимальные значения целевых функций в задачах (1), (4) и (1n), (4n) соответственно,

$$a = x_0 \le x_1 \le \ldots \le x_n = u,\ n \ge 1, \quad (1)$$

$$a = x_0 \le x_1 \le \ldots \le x_n = u, n \ge 1, n \text{ - фикс.}, \quad (4n)$$

то они являются непрерывными, не возрастающими по a функциями, определенными для $a \le u$.

Для дальнейшего важно отметить

Утверждение 2. Для некоторого $u \ge 0$ имеет место равенство $S(0,u) = S_1(0,u)$ тогда и только тогда, когда $S_1(0,u) = S_2(0,u)$.

Доказательство утверждения нетрудно провести методом от противного. Для этого используется

Лемма 1. Для функции

$$g(a,x,b) = \frac{(b-a)^{\alpha} - (b-x)^{\alpha}}{(x-a)^{\alpha}}, \quad a < b,$$

имеет место неравенство $g(a_1,x,b) \ge g(a_2,x,b)$ для любых $a_1 < a_2 < b$ и $x \in [a_2, b]$.

Отметим, что для некоторого класса функций $f(x)$ имеет место строгое убывание последовательности $\{S_n(0,u)\}_{n=1,2,\ldots}$, т.е. справедливо

Утверждение 3. Если существует

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}},$$

равный нулю, то $\{S_n(0,u)\}_{n=1,2,\ldots}$ строго убывает $(u > 0)$.

Предположим в этом параграфе, что $f(x)$ удовлетворяет условию:

$f(x)$ имеет непрерывную на $(0,u]$ производную $(u>0)$. (5)

Тогда имеет место

Лемма 2. Существует $a_0 \in (0,u)$ такое, что справедливо неравенство $f(x)(x-a)^{\alpha} + f(u)(u-x)^{\alpha} \ge f(u)(u-a)^{\alpha}$ для любого $a \in [a_0, u]$ и $x \in [a,u]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть, напротив, существует последовательность $\{a_K\}_{K=1,2,\dots}$ такая, что $a_K \to u$ при $K \to +\infty$, и для любого a_K найдется $x_K \in (a_K, u)$, для которого

$$h_K(x_K) \equiv f(x_K)(x_K - a_K)^\alpha + f(u)(u - x_K)^\alpha < f(u)(u - a_K)^\alpha .$$

Пусть

$$y_K = \underset{x \in [a_K, u]}{\arg\min}\, h_K(x).$$

Тогда $y_K \in (a_K, u)$ и $h_K'(y_K) = 0$, т.е.

$$f'(y_K)(y_K - a_K)^\alpha + f(y_K)(y_K - a_K)^{\alpha-1}\alpha = f(u)(u - y_K)^{\alpha-1}\cdot\alpha .$$

Или

$$f'(y_K)(y_K - a_K) + f(y_K)\alpha = f(u)\alpha\left(\frac{y_K - a_K}{u - y_K}\right)^{1-\alpha} . \qquad (6)$$

В силу того, что $a_K \to u$ при $K \to +\infty$, имеем $y_K \to u$ при $K \to +\infty$. Значит, $y_K \in [C, u]$ для $C > 0$ и достаточно больших K. Тогда, так как $f'(x)$ непрерывна на $[C, u]$ и, значит, ограничена, без ограничения общности можно считать, что $\{f'(y_K)\}_{K=1,2,\dots}$ сходится к некоторому d. Переходя к пределу в равенстве (6) при $K \to +\infty$, получаем

$$\lim_{K \to +\infty}\left(\frac{y_K - a_K}{u - y_K}\right)^{1-\alpha} = 1 .$$

Далее, так как

$$f(y_K)(y_K - a_K)^\alpha + f(u)(u - y_K)^\alpha < f(u)(u - a_K)^\alpha ,$$

то

$$f(y_K) < f(u)\,\frac{(u - a_K)^\alpha - (u - y_K)^\alpha}{(y_K - a_K)^\alpha} = f(u)\,g(a_K, y_K, u) .$$

По лемме 3 (см. ниже),

$$g(a_K, y_K, u) \le \alpha\left(\frac{u - y_K}{y_K - a_K}\right)^{\alpha-1} .$$

Значит,

$$f(y_K) < \alpha f(u)\left(\frac{y_K - a_K}{u - y_K}\right)^{1-\alpha} .$$

Переходя к пределу при $K \to +\infty$, получаем $f(u) \le \alpha f(u) < f(u)$. Противоречие. Лемма доказана.

Л е м м а 3. Для функции

$$g(a,x,b) = \frac{(b-a)^{\alpha}-(b-x)^{\alpha}}{(x-a)^{\alpha}}, \ \alpha \in (0,1),$$

справедливо неравенство

$$g(a,x,b) \le \alpha\left(\frac{b-x}{x-a}\right)^{\alpha-1}$$

для любого $x \in [a,b]$.

Согласно утверждению 1, $S(0,u)$ является решением функционального уравнения (3). Обозначим через $T(0,u)$ множество

$$\{\bar{x} \in [0,u] : S(0,\bar{x}) + f(u)(u-\bar{x})^{\alpha} = S(0,u)\}. \quad T(0,u) \ne \emptyset.$$

Имеет место следующее

У т в е р ж д е н и е 4. Множество $T(0,u) \setminus \{u\}$ непусто.

Используя это утверждение, определим последовательность точек

$$x_0^{опт} = u, \quad x_K^{опт} = \begin{cases} x(x_{K-1}^{опт}) \in T(0, x_{K-1}^{опт}) \setminus \{x_{K-1}^{опт}\}, \\ \qquad \text{если } x_{K-1}^{опт} > 0; \\ 0 \quad \text{– в противном случае} \end{cases} \tag{7}$$

для $K \ge 1$.

Возможны случаи:

1) существует $n_0 \ge 1$ такое, что $x_n^{опт} = 0$ для $n \ge n_0$, $x_{n_0-1}^{опт} > 0$;

2) $\{x_K^{опт}\}_{K=0,1,2,\dots}$ – строго убывающая последовательность.

В случае 1 будем говорить, что $\{x_K^{опт}\}_{K=\overline{0,n_0}}$ является конечным оптимальным разбиением отрезка $[0,u]$ для $f(x)$, на котором достигается минимальное значение целевой функции задачи (1), (2).

В случае 2 будем говорить, что $\{x_K^{опт}\}_{K=0,1,2,\dots}$ является бесконечным оптимальным разбиением отрезка $[\bar{x}, u]$

(где $\bar{x} = \lim\limits_{K\to+\infty} x_K^{опт}$)

для $f(x)$, на котором достигается оптимальное значение целевой функции задачи (1), (4) с $a = \bar{x}$. Здесь представляет интерес вопрос о точке $\bar{x}$.

Справедливо

У т в е р ж д е н и е 5. Если $f(x)$ имеет непрерывную производную на $[0,u]$ и $f(0) > 0$, то $x_K^{опт} = 0$ при $K \ge K_0$ для некоторого $K_0 \ge 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть, напротив, не существует K_0 с таким свойством. Тогда $\{x_K^{опт}\}_{K=0,1,2,\dots}$ строго убывает и ограничена снизу.

Пусть

$$\lim_{k\to+\infty} x_k^{опт} = c \geq 0 .$$

Рассмотрим $[x_{k+1}^{опт}, x_k^{опт}]$ и $[x_k^{опт}, x_{k-1}^{опт}]$. Из определения $\{x_k^{опт}\}_{k=0,1,2,\dots}$ следует, что

$$\min_{x\in[x_{k+1}^{опт},\, x_{k-1}^{опт}]} \{f(x)(x-x_{k+1}^{опт})^{\alpha} + f(x_{k-1}^{опт})(x_{k-1}^{опт}-x)^{\alpha}\} =$$

$$= f(x_k^{опт})(x_k^{опт}-x_{k+1}^{опт})^{\alpha} + f(x_{k-1}^{опт})(x_{k-1}^{опт}-x_k^{опт})^{\alpha}$$

и

$$\left(f'(x_k^{опт})(x_k^{опт}-x_{k+1}^{опт}) + \alpha f(x_k^{опт})\right) t_k^{1-\alpha} = f(x_{k-1}^{опт})\alpha . \tag{8}$$

где $t_k = (x_{k-1}^{опт}-x_k^{опт}) / (x_k^{опт}-x_{k+1}^{опт})$. В силу того, что $f'(x)$ ограничена на $[0,u]$, $0 \leq f'(x_k^{опт})(x_k^{опт}-x_{k+1}^{опт}) \to 0$ при $k\to+\infty$. Поэтому, переходя к пределу в равенстве (8) при $k\to+\infty$ и учитывая, что $f(x_k^{опт}) \to f(c) > 0$, получаем

$$\lim_{k\to+\infty} t_k^{1-\alpha} = 1 .$$

По лемме 3

$$f(x_k^{опт}) < f(x_{k-1}^{опт})\, g(x_{k+1}^{опт}, x_k^{опт}, x_{k-1}^{опт}) \leq$$

$$\leq f(x_{k-1}^{опт})\alpha \left(\frac{x_{k-1}^{опт}-x_k^{опт}}{x_k^{опт}-x_{k+1}^{опт}}\right)^{\alpha-1} .$$

Переходя к пределу при $k\to+\infty$, имеем $f(c) \leq \alpha f(c) < f(c)$. Противоречие. Утверждение доказано.

С л е д с т в и е. Если $f(x)$ удовлетворяет условию (5) и $\{x_k^{опт}\}_{k=0,1,2,\dots}$ строго убывает, то

$$\lim_{k\to+\infty} x_k^{опт} = \bar{x} = 0 .$$

§ 2. Псевдоинтеграл и его свойства

Рассматривая задачу (1), (4) для $\alpha = 1$, мы приходим к задаче вычисления интеграла Римана от функции $f(x)$ по отрезку $[a,u]$. По аналогии можно ввести понятие псевдоинтеграла от непрерывной, неотрицательной, неубывающей функции $f(x)$ по отрезку $[a,u]$ как оптимальное значение целевой функции задачи (1), (4). Обозначим его

$$\int_a^u f(x)(dx)^\alpha .$$

Введенный таким образом псевдоинтеграл представляет собой конкретный вид интеграла по неаддитивной или так называемой внешней мере [1, 2].

Приведем ряд его очевидных свойств.

Свойства 1–5 совпадают с аналогичными свойствами интеграла Римана:

1. $S(a,u) = \int_a^u f(x)(dx)^\alpha$ – непрерывная, не убывающая по u, не возрастающая по a функция, определенная для $a \leq u$.

2. $\int_a^u c f(x)(dx)^\alpha = c\int_a^u f(x)(dx)^\alpha$, если $c \geq 0$.

3. $\int_a^u g(x)(dx)^\alpha \geq \int_a^u f(x)(dx)^\alpha$,

если $g(x) \geq f(x)$ для $x \in [a,u]$.

4. $\int_a^u f(x)(dx)^\alpha = f(c)(u-a)^\alpha$

для некоторого $c \in [a,u]$.

5. $\int_a^u f(x)(dg(x))^\alpha = \int_{g(a)}^{g(u)} f(g^{-1}(y))(dy)^\alpha$,

где $g'(x) > 0, g(x) \geq 0$ для $x \in [a,u]$.

Нижеследующими свойствами псевдоинтеграл отличается от интеграла Римана:

6. Справедливо $\int_a^u f(x)(dx)^\alpha \leq \int_0^c f(x)(dx)^\alpha + \int_c^u f(x)(dx)^\alpha$.

Причем оказывается возможным строгое неравенство.

7. Имеет место $\int\limits_a^u (f(x)+g(x))(dx)^\alpha \geqslant \int\limits_a^u f(x)(dx)^\alpha + \int\limits_a^u g(x)(dx)^\alpha$.

Возможно строгое неравенство.

8. Предел $\int\limits_a^u f(x)(dx)^\alpha$ при $\alpha \to 1$ равен $\int\limits_a^u f(x)\,dx$.

9. Предел $\int\limits_a^u f(x)\,(dx)^\alpha$ при $\alpha \to 0$ равен $f(u)$.

Если в задаче опустить условие $\alpha \in (0,1)$, то

10. $\int\limits_a^u f(x)\,(dx)^\alpha = 0$, если $\alpha > 1$,

11. $\int\limits_a^u f(x)\,(dx)^\alpha = f(u)\,(u-a)^\alpha$, если $\alpha \leqslant 0$.

Если в задаче (1), (4) опустить требование неотрицательности $f(x)$, то

12. целевая функция задачи (1), (4) неограниченно убывает, если существует $x \in [a,u]$ такое, что $f(x) < 0$.

Замечание 2. Аналогично можно ввести понятие псевдоинтеграла для немонотонных функций как оптимальное значение целевой функции задачи

$$\sum_{k=1}^{n} \max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)(x_k - x_{k-1})^\alpha \to \inf_{n, \{x_k\}_{k=\overline{0,n}}},$$

$$a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n = u, \quad n \geqslant 1.$$

Свойства 1-12 сохраняются с небольшим уточнением. Вместо $f(u)$ в свойствах 9 и 11 стоит $\max\limits_{x \in [a,u]} f(x)$.

Отметим, что при вычислении интеграла Римана от $f(x)$ по $[0,u]$ ищется предел сумм

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}), \quad 0 = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n = u,$$

при

$$\max_{k=\overline{1,n}} (x_k - x_{k-1}) \to 0,$$

который и дает $\inf$. Для $\alpha \in (0,1)$ имеет место

Утверждение 6. Если

$$S_n(0,u)=\sum_{K=1}^{n} f(x_i^n)(x_i^n-x_{i-1}^n)^{\alpha} \quad \text{и} \quad \lambda_n=\max_{i=\overline{1,n}}(x_i^n-x_{i-1}^n),$$

то для любой сходящейся подпоследовательности $\{\lambda_{n_K}\}_{K=1,2,\dots}$ выполняется неравенство

$$\lim_{K\to+\infty}\lambda_{n_K}>0.$$

Доказательство. Пусть, напротив, существует $\{\lambda_{n_K}\}_{K=1,2,\dots}$ такая, что

$$\lim_{K\to+\infty}\lambda_{n_K}=0\,(n_K\to+\infty) \text{ при } K\to+\infty).$$

Рассмотрим произвольную точку $C\in(0,u)$. Найдется $i_K,\ 0\le i_K\le n_K-1$, для которого $C\in[x_{i_K}^{n_K},\ x_{i_K+1}^{n_K}]$. Из определения λ_{n_K} и предположения $\lambda_{n_K}\to 0$ при $K\to+\infty$ следует, что $(x_{i_K+1}^{n_K}-x_{i_K}^{n_K})\to 0$ при $K\to+\infty$. Но $0\le C-x_{i_K}^{n_K}\le x_{i_K+1}^{n_K}-x_{i_K}^{n_K}$, следовательно, $x_{i_K}^{n_K}\to C,\ x_{i_K+1}^{n_K}\to C$ при $K\to+\infty$. При этом можно считать, что последовательности $\{i_K\}_{K=1,2,\dots}$; $\{n_K-i_K-1\}_{K=1,2,\dots}$, $(n_K-i_K-1>0)$ сходятся, так как в противном случае можно перейти к рассмотрению их сходящихся подпоследовательностей.

Возможны следующие случаи:

1. $i_K\to\bar{i}<+\infty$, т.е. существует K_0 такое, что $i_K=i_{K_0}=\bar{i}$ при $K\ge K_0$;
2. $i_K\to+\infty,\ (n_K-i_K-1)\to+\infty$;
3. $i_K\to+\infty,\ (n_K-i_K-1)\to\bar{n}<+\infty$,

т.е. существует K_1 такое, что $n_K-i_K-1=n_{K_1}-i_{K_1}-1=\bar{n}$ при $K\ge K_1$.

Рассмотрим случай 1. Для любого n_K имеет место равенство

$$S_{n_K}(0,u)=S_{i_K}(0,x_{i_K}^{n_K})+f(x_{i_K+1}^{n_K})(x_{i_K+1}^{n_K}-x_{i_K}^{n_K})^{\alpha}+S_{n_K-i_K-1}(x_{i_K+1}^{n_K},u).$$

Для $K\ge K_0$ имеет место

$$S_{n_K}(0,u)=S_{i_{K_0}}(0,x_{i_{K_0}}^{n_K})+f(x_{i_{K_0}+1}^{n_K})(x_{i_{K_0}+1}^{n_K}-x_{i_{K_0}}^{n_K})^{\alpha}+S_{n_K-i_{K_0}-1}(x_{i_{K_0}+1}^{n_K},u). \quad (9)$$

В силу того, что

$$x_{i_{K_0}}^{n_K}\to C,\quad x_{i_{K_0}+1}^{n_K}\to C$$

при $K\to+\infty$ и $S_{i_{K_0}}(0,x)$ – непрерывная, не убывающая по x функция,

$$S_{i_{K_0}}(0, x_{i_{K_0}}^{n_K}) \to S_{i_{K_0}}(0, c).$$

Кроме того,

$$S_{n_K - i_{K_0} - 1}(x, u)$$

- непрерывная, не возрастающая по u функция (замечание 1). Следовательно,

$$S_{n_K - i_{K_0} - 1}(x_{i_{K_0}+1}^{n_K}, u) \leq S_{n_K - i_{K_0} - 1}(c, u).$$

С другой стороны,

$$S_{n_K - i_{K_0} - 1}(x_{i_{K_0}+1}^{n_K}, u) \geq S(x_{i_{K_0}+1}^{n_K}, u).$$

Переходя в последних двух неравенствах к пределу при $K \to +\infty$, получаем, что

$$\lim_{K \to +\infty} S_{n_K - i_{K_0} - 1}(x_{i_{K_0}+1}^{n_K}, u) = S(c, u).$$

Из равенства (9) при $K \to +\infty$ получаем $S(0,u) = S_{i_{K_0}}(0,c) + S(c,u)$. Но

$$S_{i_{K_0}}(0,c) \geq S(0,c).$$

Следовательно, $S(0,u) \geq S(0,c) + S(c,u)$. С другой стороны, так как $S_{n+\ell}(0,u) \leq S_n(0,c) + S_\ell(0,c)$ для любых $n \geq 1, \ell \geq 1$, то $S(0,u) \leq S(0,c) + S(c,u)$. Таким образом, $S(0,u) = S(0,c) + S(c,u)$ для любого $c \in (0,u)$. В случае 2 и 3 аналогично можно показать, что $S(0,u) = S(0,c) + S(c,u)$. Рассмотрим $0 < c_1 < c_2 < u$. Так как $\lambda_{n_K} \to 0$, то существует K_0 такое, что

$$x_{i_K+1}^{n_K} - x_{i_K}^{n_K} \leq \lambda_{n_K} < (c_2 - c_1)/2$$

при $K \geq K_0$ и

$$x_{j_K+1}^{n_K} - x_{j_K}^{n_K} \leq \lambda_{n_K} < (c_2 - c_1)/2,$$

где i_K и j_K такие, что

$$c_1 \in [x_{j_K}^{n_K}, x_{j_K+1}^{n_K}], \quad c_2 \in [x_{i_K}^{n_K}, x_{i_K+1}^{n_K}].$$

Тогда для $K \geq K_0$ справедливо неравенство

$$x_{j_K}^{n_K} \leq x_{j_K+1}^{n_K} < x_{i_K}^{n_K} \leq x_{i_K+1}^{n_K}.$$

Рассуждая аналогично тому, как это было для случая одной точки, можно показать, что $S(0,u) = S(0,c_1) + S(c_1,c_2) + S(c_2,u)$. Тогда для любого $c \in (0,u)$ выполняется $S(0,c) = S(0,c_1) + S(c_1,c)$ при $c_1 \in [0,c]$. Значит, и для произвольного разбиения $\{x_K\}_{K=\overline{0,n}}$ отрезка $[0,u]$ при $0 = x_0 \leq \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = u$ выполняется

$$S(0,u)=\sum_{K=1}^{n} S(x_{K-1},x_K)\,.$$

Рассмотрим разбиение отрезка $[0,u]$ точками $\{y_K^n = uK/n\}_{K=\overline{0,n}}$. Пусть

$$t_n=\sum_{K=1}^{n} f(y_K^n)(y_K^n-y_{K-1}^n)^{\alpha}=\sum_{K=1}^{n} f(y_K^n)\left(\frac{u}{n}\right)^{\alpha}.$$

По определению $S(0,u)$, разность $z_n=t_n-S(0,u)\geqslant 0$, где

$$z_n=t_n-\sum_{K=1}^{n} S(y_{K-1}^n,y_K^n).$$

Но, как нетрудно показать,

$$S(y_{K-1}^n,y_K^n)\geqslant f(y_{K-1}^n)(y_K^n-y_{K-1}^n)^{\alpha}.$$

Тогда

$$0\leqslant z_n\leqslant \sum_{K=1}^{n}\left(f(y_K^n)-f(y_{K-1}^n)\right)(y_K^n-y_{K-1}^n)^{\alpha}=$$

$$=\left(\frac{u}{n}\right)^{\alpha}\sum_{K=1}^{n}\left(f(y_K^n)-f(y_{K-1}^n)\right)=\left(\frac{u}{n}\right)^{\alpha}(f(u)-f(0))$$

и $z_n\to 0$ при $n\to\infty$. Но, с другой стороны, для $K\geqslant[n/2]+1$ при $n>2$ справедливо $y_K^n\geqslant u/2$ и $f(y_K^n)\geqslant f(u/2)>0$, так как без ограничения общности можно считать, что $f(\varepsilon)>0$ для любого $\varepsilon>0$.

Тогда справедливо

$$t_n=(u/n)^{\alpha}\sum_{K=1}^{n} f(y_K^n)\geqslant (u/n)^{\alpha}\sum_{K=[\frac{n}{2}]+1}^{n} f(y_K)^n\geqslant$$

$$\geqslant (u/n)^{\alpha}(n-[n/2])\,f(u/2)\geqslant (u/n)^{\alpha}(n/2)f(u/2)=(u^{\alpha}/2)f(u/2)\,n^{1-\alpha}.$$

Но $(u^{\alpha}/2)f(u/2)n^{1-\alpha}\to+\infty$ при $n\to+\infty$. Тогда $t_n\to+\infty$ при $n\to+\infty$. Следовательно, $S(0,u)=+\infty$. Противоречие с тем, что $S(0,u)\leqslant f(u)\,u^{\alpha}$. Утверждение 6 доказано.

Определение псевдоинтеграла как минимального значения целевой функции задачи (1),(2) имеет то преимущество, что для его вычисления может быть использована схема динамического программирования.

Рассмотрим примеры.

<u>Пример 1</u>. Пусть $f(x)=x^{\beta}$, $\alpha+\beta>1$. В силу того, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^\beta}{x^{1-\alpha}}=0,$$

последовательность $\{S_n(0,u)\}_{n=1,2,\dots}$ строго убывает (см. утверждение 3). Значит, $[0,u]$ для $f(x)=x^\beta$ имеет бесконечное оптимальное разбиение $\{x_K^{опт}\}_{K=0,1,2,\dots}$ (см. утверждение 4), для которого $x_K^{опт}\to 0$ при $K\to+\infty$ (см. утверждение 5). Нетрудно показать, что $S(0,u)=$ $=S(0,1)\,u^{\alpha+\beta}$ и $x_1^{опт}=x(u)=q\cdot u$, где

$$q=\underset{x\in[0,1]}{\operatorname{argmin}}\{S(0,1)x^{\alpha+\beta}+(1-x)^\alpha\},\ q\in(0,1).$$

Для q и $S(0,1)$ имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} S(0,1)=\min\limits_{x\in[0,1]}\{S(0,1)x^{\alpha+\beta}+(1-x)^\alpha\}=S(0,1)q^{\alpha+\beta}+(1-q)^\alpha, \\ S(0,1)(\alpha+\beta)q^{\alpha+\beta-1}=\alpha(1-q)^{\alpha-1}. \end{cases}$$

Из этой системы получаем уравнение для q

$$1=q^{\alpha+\beta-1}\left(q+\frac{1-q}{\alpha}(\alpha+\beta)\right),\ q\in(0,1)$$

и
$$S(0,1)=\frac{\alpha}{(\alpha+\beta)q^{\alpha+\beta-1}(1-q)^{1-\alpha}}.$$

Значит, для произвольного $u\geqslant 0$ справедливо

$$S(0,u)=\frac{\alpha u^{\alpha+\beta}}{(\alpha+\beta)q^{\alpha+\beta-1}(1-q)^{1-\alpha}},$$

а точки оптимального разбиения представляют собой геометрическую прогрессию $\{u\cdot q^K\}_{K=0,1,2,\dots}$; $q\in(0,1)$.

Замечание 3. При $0\leqslant\alpha+\beta\leqslant 1$ имеет место

$$\int_0^u x^\beta(dx)^\alpha=u^{\alpha+\beta}.$$

Замечание 4. При $a\geqslant qu$ справедливо

$$\int_a^u x^\beta(dx)^\alpha=u^\beta(u-a)^\alpha.$$

По аналогии с несобственным интегралом можно рассматривать псевдоинтеграл на интервалах вида $(-\infty,u]$, $[u,+\infty)$.

Пример 2. Пусть $f(x)=e^x$. Определим

$$\int_{-\infty}^{u} e^x (dx)^\alpha = \lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{u} e^x (dx)^\alpha.$$

(Нетрудно показать, что предел существует и конечен.) Причем имеют место

$$S(u) = \int_{-\infty}^{u} e^x (dx)^\alpha = \int_{-\infty}^{0} e^x (dx)^\alpha e^u = S(0)\, e^u$$

и

$$S(u) = \min_{x\in(-\infty,u]} \{S(0)e^x + e^u (u-x)^\alpha\}.$$

Можно показать, что найдется $x(u)\in(-\infty,u)$, для которого $S(u) = S(x(u)) + e^u (u - x(u))^\alpha$ и $x(u) = u + p$, где

$$p \neq 0,\ p = \operatorname*{argmin}_{x\in(-\infty,0]} \{S(0)e^x + (-x)^\alpha\}.$$

Из системы уравнений

$$\begin{cases} S(0)\, e^p = \alpha(-p)^{\alpha-1}, \\ S(0) = S(0)\, e^p + (-p)^\alpha \end{cases}$$

получаем, что p является отрицательным решением уравнения $\alpha = e^p(\alpha - p)$ и $S(u) = (\alpha e^u)/(e^p(-p)^{1-\alpha})$. Оптимальное разбиение для

$$\int_{-\infty}^{u} e^x (dx)^\alpha$$

есть арифметическая прогрессия $\{u + pk\}_{k=0,1,2,\dots}$; $p < 0$.

Используя пример 1, докажем

Утверждение 7. Если $f(0) > 0$, $f'(x) \to +\infty$ при $x \to 0$, функция $f(x)$ удовлетворяет условию (5), вогнута на $[0,\varepsilon]$ для некоторого $\varepsilon > 0$, то существует $n_0 \geq 1$ такое, что $S_{n_0}(0,u) = S(0,u)$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f_\varepsilon(x) = \frac{f(\varepsilon) - f(0)}{\varepsilon}\, x + f(0).$$

Для нее $f_\varepsilon(0) = f(0)$, $f_\varepsilon(\varepsilon) = f(\varepsilon) \neq f(0)$. Из того, что функция вогнута на $[0,\varepsilon]$, следует, что $f_\varepsilon(x) \leq f(x)$ для $x\in[0,\varepsilon]$. Обобщая, можно утверждать, что $f(x) \geq f_\delta(x)$ для любого $\delta\in(0,\varepsilon)$ при $x\in[0,\delta]$. По свойству 3

$$\int_0^\delta f(x)(dx)^\alpha \geq \int_0^\delta f_\delta(x)(dx)^\alpha.$$

Рассмотрим

$$\mathcal{J} = \int_0^\delta f_\delta(x)(dx)^\alpha .$$

По свойству 2

$$\mathcal{J} = c_1(\delta)\int_0^\delta \left(y + \frac{f(0)}{c_1(\delta)}\right)(dy)^\alpha ,$$

где

$$c_1(\delta) = \frac{f(\delta) - f(0)}{\delta} .$$

Пусть $c_2(\delta) = f(0) \,/\, c_1(\delta)$. По свойству 5

$$\mathcal{J} = c_1(\delta) \int_{c_2(\delta)}^{c_2(\delta)+\delta} z\,(dz)^\alpha .$$

Рассмотрим псевдоинтеграл

$$\int_0^{c_3(\delta)} z\,(dz)^\alpha ,$$

где $c_3(\delta) = c_2(\delta) + \delta$. Как показывает пример 1, оптимальное разбиение имеет вид $\{c_3(\delta)\, q^K\}_{K=0,1,2,\dots}$, $q \in (0,1)$. Пусть

$$\tau(\delta) = \frac{1-q}{q}\;\frac{f(0)\,\delta}{f(\delta) - f(0)}$$

при $\delta > 0$. Для нее $\tau(\delta)/\delta \to +\infty$ при $\delta \to 0$. Значит, существует $\tilde{\varepsilon} > 0$ такое, что $\tau(\delta)/\delta \geq 1$ для любого $\delta \in (0,\tilde{\varepsilon})$. Тогда $((1-q)/q)\cdot c_2(\delta) \geq \delta$ и, следовательно, $c_2(\delta) \geq q\,(c_2(\delta) + \delta)$ для любого $\delta \in (0, \min\{\varepsilon, \tilde{\varepsilon}\})$.

Из замечания 4 получаем, что

$$\int_{c_2(\delta)}^{c_2(\delta)+\delta} z\,(dz)^\alpha = (c_2(\delta) + \delta)\,\delta^\alpha$$

и

$$\mathcal{J} = c_1(\delta)(c_2(\delta) + \delta)\,\delta^\alpha = (f(0) + \delta c_1(\delta))\delta^\alpha = f(\delta)\,\delta^\alpha$$

для любого $\delta \in (0, \min\{\varepsilon, \tilde{\varepsilon}\})$.

Предположим далее, что $S_n(0,u) \neq S(0,u)$ для любого $n \geq 1$. Тогда для оптимальной последовательности $\{x_K^{опт}\}_{K=0,1,2,\dots}$, определенной из (7), выполняется $x_K^{опт} > 0$ для любого $K > 0$. Из следствия утверждения 5 получим, что $\lim\limits_{K\to+\infty} x_K^{опт} = 0$. Значит, найдется K_0 такое,

что $x_K^{\text{опт}} \in (0, \min\{\varepsilon, \tilde{\varepsilon}\})$ для любого $K \geq K_0$ и

$$\int\limits_0^{x_{K_0}^{\text{опт}}} f(x)(dx)^\alpha = f(x_{K_0}^{\text{опт}})(x_{K_0}^{\text{опт}})^\alpha .$$

Тогда

$$\int\limits_0^u f(x)(dx)^\alpha = S_{K_0+1}(0, u) .$$

Противоречие. Утверждение доказано.

Утверждения 5 и 7 имеют определенное практическое значение. Так, в задачах стандартизации в случае, когда функция стоимости производства обладает подходящими свойствами, учет фактора серийности уже приводит к конечному параметрическому ряду изделий.

Предположим в дальнейшем, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию (5) для любого $u > 0$. Кроме того, предположим, что $x(u)$ можно выбрать из множества $T(0, u) \setminus \{u\}$ для любого $u > 0$ таким образом, что $x(u)$ – непрерывная, строго возрастающая функция, определенная на множестве $[0, +\infty)$, $x(0) = 0$. Пусть существует непрерывная производная $S'(0, u)$ на $(0, +\infty)$. Определим функцию $x^{-1}(u)$ для $u \in (0, \sup\limits_{v \geq 0} x(v))$.
Она непрерывна и строго возрастающая. Для любого $u \in (0, \sup\limits_{v \geq 0} x(v))$ выполняется равенство $S'(0, u) = \alpha f(x^{-1}(u))(x^{-1}(u) - u)^{\alpha-1}$. Откуда, так как $S(0,0) = 0$, получаем

$$S(0, u) = \int\limits_0^u S'(0, z)\, dz = \alpha \int\limits_0^u f(x^{-1}(z))(x^{-1}(z) - z)^{\alpha-1} dz$$

при $u \in (0, \sup\limits_{v \geq 0} x(v))$. Пусть $u > 0$ выбрано произвольно. Тогда если

$$\sup_{v \geq 0} x(v) < +\infty \quad \text{и} \quad u \geq \sup_{v \geq 0} x(v),$$

то

$$\int\limits_0^u f(x)(dx)^\alpha = \int\limits_0^{x(u)} f(x)(dx)^\alpha + f(u)(u - x(u))^\alpha .$$

Но $x(u) \in [0, \sup\limits_{v \geq 0} x(v))$ и

$$\int\limits_0^{x(u)} f(x)(dx)^\alpha = \alpha \int\limits_0^{x(u)} f(x^{-1}(z))(x^{-1}(z) - z)^{\alpha-1} dz .$$

Таким образом,

$$\int_0^u f(x)(dx)^\alpha = \begin{cases} \alpha \int_0^u f(x^{-1}(z))(x^{-1}(z)-z)^{\alpha-1}\,dz, & \text{если } u \in (0, \sup_{v>0} x(v)) ; \\ \alpha \int_0^{x(u)} f(x^{-1}(z))(x^{-1}(z)-z)^{\alpha-1}\,dz + f(u)(u-x(u))^\alpha, & \text{если } \sup_{v>0} x(v) < +\infty, \\ & u \geq \sup_{v \geq 0} x(v) \end{cases}$$

Мы показали, каким образом псевдоинтеграл может быть связан с интегралом Римана.

Отметим также, что в сделанных предположениях справедливо

Утверждение 8. Если $\lim_{x\to 0} f(x)/x^{1-\alpha} = 0$, то

$$S'(0,u) = \sum_{k=0}^{\infty} f'(x^k(u))(x^k(u) - x^{k+1}(u))^\alpha$$

для любого $u \in (0, \sup_{v>0} x(v))$. Здесь $x^0(u) = u,\ x^{k+1}(u) = x(x^k(u)) \neq x^k(u)$.

Доказательство. Рассмотрим $J = [x(u), x^{-1}(u)]$. Для него

$$\min_{x \in J}\{f(x)(x-x(u))^\alpha + f(x^{-1}(u))(x^{-1}(u)-x)^\alpha\} =$$

$$= f(u)(u-x(u))^\alpha + f(x^{-1}(u))(x^{-1}(u)-u)^\alpha,$$

$$(f'(u)(u-x(u)) + \alpha f(u))(u-x(u))^{\alpha-1} = \alpha f(x^{-1}(u))(x^{-1}(u)-u)^{\alpha-1}. \qquad (10)$$

Рассмотрим задачу (1), (4) на $[x^2(u), u]$. Получаем

$$f'(x(u))(x(u)-x^2(u))^\alpha + f(x(u))(x(u)-x^2(u))^{\alpha-1}\alpha = f(u)(u-x(u))^{\alpha-1}\alpha.$$

Подставляя левую часть этого равенства вместо соответствующего члена в (10), имеем

$$f'(u)(u-x(u))^\alpha + f'(x(u))(x(u)-x^2(u))^\alpha + f(x(u))(x(u)-x^2(u))^{\alpha-1}\alpha =$$
$$= f(x^{-1}(u))(x^{-1}(u)-u)^{\alpha-1}\alpha.$$

Продолжая таким образом, получаем

$$\sum_{k=0}^{\ell} f'(x^k(u))(x^k(u)-x^{k+1}(u))^\alpha + f(x^\ell(u))(x^\ell(u)-x^{\ell+1}(u))^{\alpha-1}\alpha =$$
$$= f(x^{-1}(u))(x^{-1}(u)-u)^{\alpha-1}\alpha \qquad (11)$$

для $\ell \geq 1$.

Рассмотрим $\tau_\ell = f(x^\ell(u))/(x^\ell(u) - x^{\ell+1}(u))^{1-\alpha}$. Из аналогичного равенству (10) соотношения для $[x^{\ell+1}(u) - x^{\ell-1}(u)]$ получаем, что $\tau_\ell \leq \tau_{\ell-1}$, т.е. последовательность $\{\tau_\ell\}_{\ell=1,2,\ldots}$ невозрастающая. Следовательно, существует $\lim\limits_{\ell \to +\infty} \tau_\ell = C > 0$. Покажем, что $C = 0$. На отрезке $[x^{p+1}(u), x^K(u)]$, где $p > K$, справедливо неравенство

$$t = \sum_{i=K}^{p} f(x^i(u))(x^i(u) - x^{i+1}(u))^\alpha \leq f(x^K(u))(x^K(u) - x^{p+1}(u))^\alpha .$$

Так как $\{\tau_\ell\}_{\ell=1,2,\ldots}$ не возрастает, то

$$t \geq f(x^p(u))(x^p(u) - x^{p+1}(u))^{\alpha-1} \sum_{i=K}^{p} (x^i(u) - x^{i+1}(u)) =$$

$$= f(x^p(u))(x^p(u) - x^{p+1}(u))^{\alpha-1}(x^K(u) - x^{p+1}(u)) .$$

Тогда

$$f(x^p(u))(x^p(u) - x^{p+1}(u))^{\alpha-1} \leq f(x^K(u))(x^K(u) - x^{p+1}(u))^{\alpha-1} .$$

Так как $x^{p+1}(u) \to 0$ при $p \to +\infty$, получаем

$$C \leq f(x^K(u))(x^K(u))^{\alpha-1} . \qquad (12)$$

Из условий на функцию $f(x)$ следует, что

$$\lim_{K \to +\infty} \frac{f(x^K(u))}{(x^K(u))^{1-\alpha}} = 0 .$$

Переходя к пределу в неравенстве (12) при $K \to +\infty$, получаем, что $C = 0$. И далее из (11) при $\ell \to +\infty$ получаем требуемое :

$$f(x^{-1}(u))(x^{-1}(u) - u)^{\alpha-1}\alpha = S'(0, u) = \sum_{K=0}^{\infty} f'(x^K(u))(x^K(u) - x^{K+1}(u))^\alpha .$$

Утверждение доказано.

Для непрерывной, неубывающей, неотрицательной функции $S(u)$, определенной на $[0, +\infty)$ и удовлетворяющей условию $S(0) = 0$, по аналогии с дифференцированием можно рассматривать "псевдодифференцирование" следующим образом:

$$f(u) = \sup_{x \in [0,u]} \frac{S(u) - S(x)}{(u - x)^\alpha} .$$

З а м е ч а н и е 5. Наряду с рассмотренной в работе задачей нахождения минимума верхней псевдоинтегральной суммы можно рассматривать задачу максимизации нижней псевдоинтегральной суммы, т.е.

$$\sum_{k=1}^{n} \min_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)\,(x_k-x_{k-1})^{\alpha} \to \sup_{n,\{x_k\}_{k=\overline{0,n}}},$$

$$a=x_0\le x_1\le \ldots \le x_n=b,\ \alpha>1,\ n\ge 1,\ a<b.$$

Для этой задачи можно получить ряд свойств, аналогичных тем, которые были рассмотрены для задачи (1), (4).

Поступила в ред.-изд. отдел
8 июля 1985 г.

Л и т е р а т у р а

1. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. - М.: Наука, 1977. - 600 с.

2. Вулих Б.З. Краткий курс теории функций вещественной переменной. - М.: Наука, 1973. - 304 с.

3. Дементьев В.Т. Об одной задаче оптимального размещения точек на отрезке// Дискретный анализ. - Новосибирск, 1965. - Вып. 4. - с. 23-27.

4. Чуев Ю.В., Спехова Г.П. Технические задачи исследования операций. - М.: Советское радио, 1970. - 242 с.