Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1987 г., вып. 27

УДК 519.854

ЗАДАЧА ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНОГО РЯДА ИЗДЕЛИЙ ПО КРИТЕРИЮ "СУММАРНАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ". II

А.И.Давыдов

Настоящая работа является непосредственным продолжением [1]. В ней конкретизируются основные элементы вычислительной схемы ветвей и границ применительно к обратной задаче выбора оптимального ряда изделий, сформулированной в [1].

§ 5. Оценочные решения и преобразования над ними

5.1. Пусть $R=(r_{ij})$ - допустимая матрица для задачи $\mathcal{DE}(F,C,C^0,B)$, т.е. $r_{ij}\geq 0$, $i\in I$, $j\in J$, и $\sum_{j\in J} r_{ij}\leq c_i^0$ для $i\in I$. В множестве $\{(R,z)\mid z\geq 0\}$ допустимых решений задачи $\mathcal{DE}(F,C,C^0,B)$ выделим наилучшее, т.е. отыщем величину $z(R)$ такую, что неравенство $B(R,z(R))\leq B(R,z)$ выполняется для всякого $z\geq 0$. Очевидно, $z(R)$ является оптимальным решением задачи $\mathcal{DR}(F,C+R,B)$ (здесь $C+R=(c_{ij}+r_{ij})$).

Пару $(R,z(R))$, где R - некоторая допустимая для задачи $\mathcal{DE}(F, C,C^0,B)$ матрица, будем называть **о ц е н о ч н ы м** решением задачи $\mathcal{DE}(F,C,C^0,B)$. Нетрудно убедиться, что всякое оптимальное или тупиковое решение задачи $\mathcal{DE}(F,C,C^0,B)$ является оценочным. По аналогии с критерием оптимальности для задачи $\mathcal{DR}(F,C,B)$ (см. [1 § 2.1]) могут быть сформулированы условия, выполнение которых необходимо и достаточно для того, чтобы решение (R,z) являлось оценочным.

Для того, чтобы решение (R,z) задачи $\mathcal{DE}(F,C,C^0,B)$ являлось оценочным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$\sum_{j\in J}{}' \mu_j(R,z)\leq B\leq \sum_{j\in J}\beta_j(R,z). \tag{1}$$

Предположим, что (R,z) и $(\bar R,\bar z)$ - оценочные решения задачи $\mathcal{DE}(F,C,C^0,B)$, причем $\bar R\geq R$ (т.е. $\bar r_{ij}\geq r_{ij}$, $i\in I$, $j\in J$ и $\bar R\neq R$) и решение $(\bar R,z)$ не является оценочным. Тогда нетрудно показать, что $B(\bar R,\bar z)< B(R,z)$. Действительно, $w_j(\bar R,z)\leq$ $\leq w_j(R,z)$ для всякого $j\in J$, следовательно,

$$B(\bar{R},z) = \sum_{j\in J} w_j(\bar{R},z)+B\cdot z \le \sum_{j\in J} w_j(R,z)+Bz = B(R,z).$$

Поскольку z не является оптимальным решением задачи $\mathcal{D}R(F,C+\bar{R},B)$, очевидно, что $B(\bar{R},\bar{z}) < B(\bar{R},z)$, откуда и получаем требуемое.

Таким образом, увеличивая некоторым рациональным образом элементы матрицы R, можно попытаться по имеющемуся оценочному решению (R,z) построить оценочное решение более близкое (по значению целевой функции) к оптимальному. Однако наибольший интерес при отыскании верхней границы для задачи $\mathcal{E}(F,C,C^0,B)$ представляют такие оценочные решения (R,z) задачи $\mathcal{D}\mathcal{E}(F,C,C^0,B)$, которые являются неулучшаемыми (за счет увеличения элементов матрицы R). Понятно, что множество подобных решений содержит и все оптимальные решения задачи $\mathcal{D}\mathcal{E}(F,C,C^0,B)$.

Напомним (см. [1]), что допустимое решение (R,z) задачи $\mathcal{D}\mathcal{E}(F, C, C^0, B)$ называется тупиковым, если оно удовлетворяет соотношениям

$$\sum_{j\in J} \mu_j^0(R,z) \le B \le \sum_{j\in J} \beta_j^0(R,z). \tag{2}$$

Справедлива следующая

Л е м м а 5. Пусть (R,z) - тупиковое решение задачи $\mathcal{D}\mathcal{E}(F,C,C^0,B)$, а матрица $\bar{R} \ge R$ такова, что

$$\sum_{j\in J} \bar{r}_{ij} \le c_i^0, \quad i\in I.$$

Тогда решение $(\bar{R},z)$ является тупиковым и $B(\bar{R},z) = B(R,z)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим прежде всего, что $I_j^0(R,z)\ne\emptyset$ для всякого $j\in J$, ибо в противном случае условие (2) нарушается. Отсюда следует, что $w_j(\bar{R},z) = w_j(R,z)$ для всех $j\in J$, а, значит, $B(\bar{R},z) = B(R,z)$.

Далее, поскольку $I_j^0(R,z) \subseteq I_j^0(\bar{R},z)$ для всякого $j\in J$, то

$$\mu_j^0(\bar{R},z) \le \mu_j^0(R,z), \quad \beta_j^0(\bar{R},z) \ge \beta_j^0(R,z),$$

и, следовательно,

$$\sum_{j\in J} \mu_j^0(\bar{R},z) \le B \le \sum_{j\in J} \beta_j^0(\bar{R},z).$$

Таким образом, условие (2) является достаточным для того, чтобы оценочное решение (R,z) было неулучшаемо за счет увеличения элементов матрицы R. Ниже будет показано, что это условие является и необходимым.

В следующем параграфе приводится алгоритм построения тупикового решения со значением целевой функции, близким к наименьшему. Этот алгоритм со-

стоит по существу из цепочки преобразований, выполняемых над оценочными решениями задачи, каждое из которых не является тупиковым. Цель всякого такого преобразования - построить по имеющемуся оценочному решению (R, z) оценочное решение $(\bar{R}, \bar{z})$, для которого $\bar{R} > R$ и $B(\bar{R}, \bar{z}) < B(R, z)$. Рассматриваются преобразования трех типов: 1-го типа, 2-го и вспомогательное преобразование. При описании этих преобразований используем следующие обозначения. Пусть (R, z) - решение задачи $\mathcal{D}\mathcal{E}(F, C, C^0, B)$. Для всякого $i \in I$ положим

$$\delta_i(R) = c_i^0 - \sum_{j \in J} r_{ij},$$

и пусть

$$J_0(R, z) = \{ j \in J \mid I_j^0(R, z) = \emptyset \}.$$

5.2. Преобразование 1-го типа выполняется в случае, когда рассматриваемое оценочное решение (R, z), $z > 0$, удовлетворяет условию

$$\sum_{j \in J_0(R, z)} \beta_j(R, z) + \sum_{j \in J \setminus J_0(R, z)} \mu_j^0(R, z) > B. \tag{3}$$

Для всякого $j \in J$ обозначим через $\ell(j)$ номер $i \in I$, для которого

$$c_{ij} + r_{ij} = \begin{cases} \mu_j^0(R, z), & \text{если } j \in J \setminus J_0(R, z), \\ \beta_j(R, z), & \text{если } j \in J_0(R, z), \end{cases}$$

и положим $\mu_j^1(R, z) = c_{\ell(j)j} + r_{\ell(j)j}$. Тогда условие (3) перепишется в виде

$$\sum_{j \in J} \mu_j^1(R, z) > B. \tag{3'}$$

Преобразование 1-го типа состоит в следующем. Сначала по решению (R, z) построим матрицу $\bar{R}$, $\bar{R} \geq R$, для которой

$$\mu_j(\bar{R}, z) = \mu_j^1(R, z),$$
$$w_j(\bar{R}, z) = w_j(R, z), \quad j \in J.$$

Поскольку теперь

$$\sum_{j \in J} \mu_j(\bar{R}, z) > B,$$

то решение $(\bar{R}, z)$ не является оценочным. Рассмотрим задачу $\mathcal{D}R(F, C + \bar{R}, B)$ и, используя точку z в качестве начальной, отыщем оптимальное решение $\bar{z}$ этой задачи. Очевидно, $\bar{z} > z$, и справедливы соотношения

$$B(R, z) = B(\bar{R}, z) > B(\bar{R}, \bar{z}).$$

Таким образом, искомое оценочное решение $(\bar{R}, \bar{z})$ построено и на этом преобразование 1-го типа заканчивается.

Опишем процедуру построения матрицы $\bar{R}$. Для этого рассмотрим множества

$$J_1 = \{ j \in J \mid \mu_j^1(R, z) > \mu_j(R, z) \},$$

$$I_j^1 = \{ i \in I_j(R, z) \mid c_{ij} + r_{ij} < \mu_j^1(R, z) \}, \ j \in J_1,$$

$$I^1 = \bigcup_{j \in J_1} I_j^1,$$

$$J_i^1 = \{ j \in J_1 \mid i \in I_j^1 \}, \quad i \in I^1.$$

Заметим, что в силу (1) и (3′) найдется хотя бы один номер $j \in J$, для которого $\mu_j(R, z) < \mu_j^1(R, z)$, и, следовательно, все перечисленные множества не являются пустыми.

Предположим, что для $j \in J_1$, $i \in I_j^1$ определены величины $\delta_{ij} > 0$ такие, что

$$\sum_{j \in J_i^1} \delta_{ij} \le \delta_i(R), \tag{4}$$

а матрица $\bar{R}$ построена по матрице R следующим образом:

$$\bar{r}_{ij} = \begin{cases} r_{ij} & \text{, если } j \in J \setminus J_1, \ i \in I, \\ r_{i,j} & \text{, если } j \in J_1, \ i \in I \setminus I_j^1, \\ r_{ij} + \delta_{ij} & \text{, если } j \in J_1, \ i \in I_j^1. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что $(\bar{R}, z)$ – допустимое решение задачи $\mathcal{D}\mathcal{E}(F, C, C^0, B)$. С другой стороны, если $j \in J_1$ и $i \in I_j^1$, то

$$f_{ij} - (c_{ij} + \bar{r}_{ij}) z < f_{\ell(j)j} - \mu_j^1(R, z) \cdot z = w_j(\bar{R}, z) = w_j(R, z).$$

Отсюда следует, что $\mu_j(\bar{R}, z) = \mu_j^1(R, z)$ для всякого $j \in J$, т.е. матрица $\bar{R}$ обладает требуемым свойством.

Понятно, что матрица $\bar{R}$ (и, следовательно, получаемое в результате преобразования 1-го типа решение $(\bar{R}, \bar{z})$) определяются набором величин (δ_{ij}), $i \in I_j^1$, $j \in J_1$, удовлетворяющих условию (4). Поэтому остановимся подробнее на описании способа отыскания набора (δ_{ij}).

Предположим, что величины δ_{ij}^1, $i \in I_j^1$, $j \in J_1$, удовлетворяют условию (4), и пусть

$$\tau'_{ij} = \begin{cases} \tau_{ij} + \delta'_{ij} & \text{, если } i \in I'_j,\ j \in J_1, \\ \tau_{ij} & \text{- в противном случае.} \end{cases}$$

Для всякого $j \in J$ справедливы равенства:

$$\mu'_j(R,z) = \min_{i \in I_j(R',z)} \{c_{ij} + \tau'_{ij}\},$$

$$f_{\ell(j)j} - \mu'_j(R,z) \cdot z = w_j(R',z),$$

поэтому найдется величина $z' > z$ такая, что при $z \leq z'' \leq z'$ равенство

$$f_{\ell(j)j} - \mu'_j(R,z) \cdot z'' = \max_{i \in II} \{f_{ij} - (c_{ij} + \tau'_{ij}) \cdot z''\}$$

будет справедливо для всякого $j \in J$. Для фиксированного набора (δ'_{ij}) обозначим через $z(\delta')$ наибольшую среди подобных величин, а в качестве искомого набора (δ_{ij}) примем тот, для которого $z(\delta) = \max z(\delta')$, где максимум берется по всем допустимым (удовлетворяющим условию (4)) наборам. Отыскание такого набора (δ_{ij}) осуществляется следующим образом.

Прежде всего для всякого $j \in J$ отыщем величину $\hat{z}_j$, удовлетворяющую условию

$$\hat{z}_j = \min \left\{ \frac{f_{\ell(j)j} - f_{ij}}{\mu'_j(R,z) - c_{ij} - \tau_{ij}} \,\middle|\, i \in I \setminus I_j(R,z), \right.$$

$$\left. f_{ij} < f_{\ell(j)j},\ c_{ij} + \tau_{ij} < \mu'_j(R,z) \right\}.$$

Очевидно, $\hat{z}_j > z$. При этом если $j \in J \setminus J_1$, т.е. $\mu'_j(R,z) = \mu_j(R,z)$, то $\hat{z}_j$ является ближайшей к z точкой излома функции $w_j(R,x)$ (рассматриваемой при фиксированной матрице R как функция от x). Если же $j \in J_1$, то $\hat{z}_j$ - ближайшая к z точка, в которой для некоторого $i \in I \setminus I_j(R,z)$ справедливо равенство

$$f_{\ell(j)j} - \mu'_j(R,z) \cdot \hat{z}_j = f_{ij} - (c_{ij} + \tau_{ij}) \cdot \hat{z}_j$$

и, следовательно,

$$f_{\ell(j)j} - \mu'_j(R,z) \cdot z' < f_{ij} - (c_{ij} + \tau_{ij}) \cdot z'$$

при $z' > \hat{z}_j$. Отсюда, в частности, следует, что

$$z(\delta') \leq \min_{j \in J} \hat{z}_j$$

для всякого допустимого набора (δ'_{ij}) .

Пусть (δ'_{ij}) – допустимый набор. Понятно, что если для некоторых $i \in I^1$, $j \in J_i^1$ равенство

$$f_{\ell(j)j} - \mu'_j(R,z)\cdot z' = f_{ij} - (c_{ij} + \tau_{ij} + \delta'_{ij})\cdot z'$$

имеет место при $z' > z$, то $z(\delta') \geq z'$ и, следовательно,

$$z(\delta') \leq z_i(\delta') =$$

$$= \min_{j \in J_i^1} \{ z' \mid f_{\ell(j)j} - \mu'_j(R,z)\cdot z' =$$

$$= f_{ij} - (c_{ij} + \tau_{ij} + \delta'_{ij})\cdot z',\ z' > z \}.$$

Для всякого $i \in I^1$ отыщем величину $\tilde{z}_i$, удовлетворяющую условию $\tilde{z}_i = \max z_i(\delta')$, где максимум берется по всем допустимым наборам (δ'_{ij}) . Если

$$\sum_{j \in J_i^1} (c_{ij} + \tau_{ij}) + \delta_i(R) \geq \sum_{j \in J_i^1} \mu'_j(R,z),$$

то, полагая $\delta'_{ij} = \mu'_j(R,z) - (c_{ij} + \tau_{ij})$ для $j \in J_i^1$, получим, что неравенство

$$f_{\ell(j)j} - \mu'_j(R,z)\cdot z' > f_{ij} - (c_{ij} + \tau'_{ij})\cdot z'$$

имеет место при всех $z' > z$. В этом случае считаем $\tilde{z}_i = \infty$.

Если же

$$\sum_{j \in J_i^1} (c_{ij} + \tau_{ij}) + \delta_i(R) < \sum_{j \in J_i^1} \mu'_j(R,z),$$

то, как нетрудно убедиться, $\tilde{z}_i$ удовлетворяет следующему условию: для некоторого набора $(\delta'_{\ell j})$ такого, что

$$\sum_{j \in J_i^1} \delta'_{ij} = \delta_i(R),$$

равенства

$$f_{\ell(j)j} - \mu'_j(R,z)\cdot \tilde{z}_i = f_{ij} - (c_{ij} + \tau_{ij} + \delta'_{ij})\cdot \tilde{z}_i$$

имеют место при всех $j \in J_i^1$.

Отсюда получаем, что

$$\tilde{z}_i = \frac{\sum_{j \in J_i^1} (f_{\ell(j)j} - f_{ij})}{\sum_{j \in J_i^1} (\mu_j^1(R,z) - c_{ij} - \tau_{ij}) - \delta_i(R)} .$$

Пусть теперь

$$z_0 = \min\{\min_{i \in I^1} \tilde{z}_i, \min_{j \in J} \hat{z}_j\} .$$

Очевидно, $z(\delta') \leq z_0$ для всякого набора (δ'_{ij}), удовлетворяющего (4). Построим набор (δ_{ij}), для которого $z(\delta) = z_0$.

Если $z_0 = \infty$, то получим требуемый набор, полагая

$$\delta_{ij} = \mu_j^1(R,z) - c_{ij} - \tau_{ij}, \quad i \in I^1, \ j \in J_i^1 .$$

Если же $z_0 < \infty$, то для всякого $j \in J_1$ положим

$$w_j^1 = f_{\ell(j)j} - \mu_j^1(R,z) \cdot z_0 ,$$

а значения величин δ_{ij} определим из соотношений

$$f_{ij} - (c_{ij} + \tau_{ij} + \delta_{ij}) \cdot z_0 = w_0^1 ,$$

т.е.

$$\delta_{ij} = \frac{f_{ij} - w_j^1}{z_0} - c_{ij} - \tau_{ij} .$$

Нетрудно убедиться, что так определенный набор удовлетворяет условиям (4) и для всякого $j \in J_1$ соотношения

$$f_{ij} - (c_{ij} + \tau_{ij} + \delta_{ij})\, z_0 = f_{\ell(j)j} - \mu_j^1(R,z) \cdot z_0 \geq$$
$$\geq \max_{k \in I \setminus I_i^1} \{f_{kj} - (c_{kj} + \tau_{kj})\, z_0\}$$

имеют место при всех $i \in I_j^1$. Следовательно, набор (δ_{ij}) является искомым.

Итак, преобразование 1-го типа описано полностью. Оценим его трудоемкость.

Для того, чтобы вычислить величины $\delta_i(R)$, $i \in I$, $w_j(R,z)$, $\beta_j(R,z)$, $\beta_j^0(R,z)$, $\mu_j(R,z)$, $\mu_j^0(R,z)$, $j \in J$, и построить множества $I_0(R)$, $I_j(R,z)$, $I_j^0(R,z)$, $j \in J$, $J_0(R,z)$, J_1, I^1, J_i^1, $i \in I^1$, потребуется проделать $O(I \cdot J)$ элементарных опера-

ций. Такова же трудоемкость и предлагаемого способа отыскания набора $(\delta_{ij}),\ i\in I_j^1,\ j\in J_1$. Наиболее трудоемкая часть преобразования – отыскание оптимального решения $\bar{z}$ задачи $\mathcal{D}R(F, C+\bar{R}, B)$ – потребует $O(I^2\cdot J^2)$ операций. Следовательно, трудоемкость преобразования 1-го типа в целом можно оценить величиной $O(I^2\cdot J^2)$.

5.3. Всякому допустимому решению (R, z) задачи $\mathcal{D}\mathcal{E}(F, C, C^0, B)$ поставим в соответствие семейства множеств $\{M_j(R,z)\},\ j\in J$, и $\{Q_j(R,z)\},\ j\in J$, где $M_j(R,z)=\{i\in I \mid i\in I_j(R,z')$ при некотором $z',\ 0\le z'\le z\}$, $Q_j(R,z)=\{i\in I \mid$ найдется $i_0\in I_0(R)$ такой, что

$$f_{ij}-(c_{ij}+r_{ij})z=f_{i_0 j}-(c_{i_0 j}+r_{i_0 j})z$$

и

$$c_{ij}+r_{ij}\geqslant c_{i_0 j}+r_{i_0 j}\}\cup I_j^0(R,z).$$

Иными словами, множество $M_j(R,z)$ содержит те и только те элементы $i\in I$, для которых при некотором $z'\le z$ выполняется равенство

$$f_{ij}-(c_{ij}+r_{ij})z'=w_j(R,z').$$

Если же $i\in Q_j(R,z)$, то элемент r_{ij} либо не может быть увеличен (если $i\in I_j^0(R,z)$), либо увеличение этого элемента не сказывается на значении целевой функции задачи при $z'\geqslant z$.

Некоторые свойства этих множеств будут использованы при получении оценки трудоемкости предлагаемого алгоритма построения тупикового решения задачи $\mathcal{D}\mathcal{E}(F, C, C^0, B)$. Отметим, в частности, что если (R, z) – допустимое решение задачи $\mathcal{D}\mathcal{E}(F, C, C^0, B)$ и $z'>z$, то для всякого $j\in J$ справедливы включения

$$M_j(R,z)\subseteq M_j(R,z'),$$
$$Q_j(R,z)\subseteq Q_j(R,z').$$

Предположим, что (R, z) – оценочное решение задачи $\mathcal{D}\mathcal{E}(F, C, C^0, B)$ и в результате применения к нему преобразования 1-го типа получено оценочное решение $(\bar{R}, \bar{z})$. Очевидно, если $j\in J\setminus J_1$, то $M_j(R,z)\subseteq M_j(\bar{R},\bar{z})$, поскольку $\bar{r}_{ij}=r_{ij},\ i\in I$, и $\bar{z}>z$.

Пусть $j\in J_1$. Если $i\in M_j(R,z)\setminus I_j(R,z)$ либо $i\in I_j(R,z)$ и $c_{ij}+r_{ij}\geqslant \mu_j^1(R,z)$, то $\bar{r}_{ij}=r_{ij}$ и, следовательно, $i\in M_j(\bar{R},\bar{z})$. Если же $i\in I_j(R,z)$ и $c_{ij}+r_{ij}<\mu_j^1(R,z)$, то

$$f_{ij}-(c_{ij}+\bar{r}_{ij})\cdot z_0=\max_{i'\in I}\{f_{i'j}-(c_{i'j}+\bar{r}_{i'j})\cdot z_0\},$$

т.е. $i\in I_j(\bar{R}, z_0)$, а так как $\bar{z}\geqslant z_0$, то отсюда следует, что

$i \in M_j(\bar{R},\bar{z})$. Таким образом, включение

$$M_j(R,z) \subseteq M_j(\bar{R},\bar{z})$$

справедливо при всех $j \in J$.

Далее, нетрудно заметить, что если $i \in Q_j(R,z)$, то $\bar{\tau}_{ij} = \tau_{ij}$ для всякого $j \in J$. Следовательно,

$$Q_j(R,z) \subseteq Q_j(\bar{R},\bar{z})$$

при всех $j \in J$.

Предположим, что $z_0 = \tilde{z}_i$ для некоторого $i \in I^1$. Это означает, что $\delta_i(R) > 0$ и для некоторого $j \in J$ справедливо неравенство $c_{ij} + \tau_{ij} < \mu_j'(R,z)$, а,следовательно, $i \notin Q_j(R,z)$. Но $i \in Q_j(\bar{R},\bar{z})$, поскольку $\delta_i(\bar{R}) = 0$. Таким образом, в рассматриваемой ситуации

$$\sum_{j\in J} |Q_j(\bar{R},\bar{z})| > \sum_{j\in J} |Q_j(R,z)|.$$

Рассмотрим случай, когда $z_0 = \hat{z}_j$ для некоторого $j \in J$. Предположим, что $j \in J \setminus J_1$. Тогда $\hat{z}_j$ – точка излома функции $w_j(R,x)$, т.е. найдется номер $i \in I$ такой, что

$$f_{ij} - (c_{ij} + \tau_{ij}) \cdot \hat{z}_j = w_j(R,\hat{z}_j)$$

и при любом $z' < \hat{z}_j$ имеет место неравенство

$$f_{ij} - (c_{ij} + \tau_{ij}) \cdot z' < w_j(R,z').$$

Следовательно, $i \notin M_j(R,z)$ и $i \in M_j(R,z_0)$. Но поскольку $j \notin J_1$, то $M_j(\bar{R},z_0) = M_j(R,z_0)$, а отсюда получаем, что

$$i \in M_j(\bar{R},z_0) \subseteq M_j(\bar{R},\bar{z}).$$

Если же $j \in J_1$, то $\hat{z}_j$ – точка, в которой для некоторого $i \in I \setminus I_j(R,z)$ выполняется равенство

$$f_{ij} - (c_{ij} + \tau_{ij}) \cdot \hat{z}_j = f_{\ell(j)j} - \mu_j'(R,z) \cdot \hat{z}_j.$$

Поскольку $i \notin I_j(R,z)$ и $z < \hat{z}_j$, то отсюда получаем, что

$$f_{ij} - (c_{ij} + \tau_{ij}) \cdot z' < f_{\ell(j)j} - \mu_j'(R,z) \cdot z'$$

при всех $z' < z$, а,значит, $i \notin M_j(R,z)$. С другой стороны,

$$i \in M_j(\bar{R},z_0) \subseteq M_j(\bar{R},\bar{z}).$$

Таким образом, доказана следующая

Л е м м а 6. Пусть по оценочному решению (R,z), $z > 0$, при помощи преобразования 1-го типа построено оценочное решение $(\bar{R},\bar{z})$, $\bar{z} < \infty$. Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{j\in J} (|M_j(\bar{R},\bar{z})| + |Q_j(\bar{R},\bar{z})|) > \sum_{j\in J} (|M_j(R,z)| + |Q_j(R,z)|).$$

Более того, предположим, что при выполнении преобразования 1-го типа выяснилось, что решение $(\bar{R}, z_0)$ не является оценочным и для отыскания оптимального решения $\bar{z}$ задачи $\mathcal{D}R(F, C+\bar{R}, B)$ потребовалось проделать p шагов алгоритма п.2.2 из [1]. Тогда

$$\sum_{j\in J}(|M_j(\bar{R},\bar{z})| + |Q_j(\bar{R},\bar{z})|) >$$
$$> p + \sum_{j\in J}(|M_j(R,z)| + |Q_j(R,z)|),$$

а трудоемкость преобразования равна $O((p+1)\cdot I\cdot J)$.

5.4. Преобразование 2-го типа аналогично преобразованию 1-го типа, и выполняется оно в том случае, когда оценочное решение (R, z), $z>0$, таково, что $J_0(R,z)=\emptyset$ и

$$\sum_{j\in J}\beta_j^0(R,z) < B. \tag{5}$$

В ходе преобразования 2-го типа строится такое оценочное решение $(\bar{R}, \bar{z})$, что $\bar{R}\geqslant R$ и для всякого $j\in J$ выполняются равенства

$$\beta_j(\bar{R},z) = \beta_j^0(R,z),$$
$$w_j(\bar{R},z) = w_j(R,z).$$

Поскольку решение $(\bar{R}, z)$ не является оценочным, то

$$B(R,z) = B(\bar{R},z) > B(\bar{R},\bar{z}).$$

Построение матрицы $\bar{R}$ осуществляется аналогично тому, как это делалось в случае преобразования 1-го типа. Рассмотрим множества ;

$$J_2 = \{j\in J \mid \beta_j^0(R,z) < \beta_j(R,z)\},$$
$$I_j^2 = \{i\in I_j(R,z) \mid c_{ij}+r_{ij} > \beta_j^0(R,z)\},\quad j\in J_2,$$
$$I^2 = \bigcup_{j\in J_2} I_j^2,$$
$$J_i^2 = \{j\in J_2 \mid i\in I_j^2\},\quad i\in I^2,$$

и пусть $k(j)\in I_j(R,z)$ - элемент, для которого $c_{k(j)j}+r_{k(j)j} = \beta_j^0(R,z)$. Сравнивая (1) и (5), нетрудно заметить, что $\beta_j(R,z)>\beta_j^0(R,z)$ хотя бы для одного $j\in J$ и, следовательно, ни одно из перечисленных множеств не является пустым.

Зададимся теперь для всяких $j \in J_2$, $i \in I_j^2$ величинами $\delta_{ij} > 0$ такими, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{j \in J_i^2} \delta_{ij} \leq \delta_i(R), \; i \in I^2, \tag{6}$$

и определим элементы матрицы $\bar{R}$ следующим образом:

$$\bar{r}_{ij} = \begin{cases} r_{ij} + \delta_{ij} & \text{, если } j \in J_2, \; i \in I_j^2; \\ r_{ij} & \text{– в противном случае.} \end{cases}$$

Теперь, если $j \in J_2$ и $i \in I_j^2$, то выполняются соотношения

$$f_{ij} - (c_{ij} + \bar{r}_{ij}) \cdot z < f_{K(j)j} - \beta_j^0(R, z) \cdot z = w_j(R, z) = w_j(\bar{R}, z),$$

откуда следует, что $\beta_j(\bar{R}, z) = \beta_j^0(R, z)$ для всякого $j \in J$.

Опишем способ отыскания набора (δ_{ij}), $i \in I_j^2$, $j \in J_2$, удовлетворяющего (6) и в некотором смысле наилучшего среди всех подобных наборов. Предположим, что величины δ'_{ij}, $i \in I_0^2$, $j \in J_2$, удовлетворяют (6), и пусть

$$r'_{ij} = \begin{cases} r_{ij} + \delta'_{ij} & \text{, если } i \in I_j^2, \; j \in J_2; \\ r_{ij} & \text{– в противном случае.} \end{cases}$$

Обозначим через $z(\delta')$ наименьшую среди величин $z' \geq 0$, для которых равенство

$$f_{K(j)j} - \beta_j^0(R, z) \cdot z' = \max_{i \in I} \{ f_{ij} - (c_{ij} + r'_{ij}) \cdot z' \}$$

выполняется для всякого $j \in J$, а в качестве искомого набора (δ_{ij}) примем тот, для которого $z(\delta) = \min z(\delta')$, где минимум берется по всем допустимым наборам. Отыскивать такой набор будем следующим образом.

Для всякого $j \in J$ найдем точку $\hat{z}_j$, удовлетворяющую условию

$$\hat{z}_j = \max \left\{ \frac{f_{ij} - f_{K(j)j}}{c_{ij} + r_{ij} - \beta_j^0(R, z)} \,\middle|\, i \in I \setminus I_j(R, z), \right.$$

$$\left. f_{ij} > f_{K(j)j}, \; c_{ij} + r_{ij} > \beta_j^0(R, z) \right\}.$$

Нетрудно установить, что $\hat{z}_j < z$. При этом если $j \in J \setminus J_2$, то $\hat{z}_j$ является ближайшей к z точкой излома функции $w_j(R, x)$. Если же $j \in J_2$ и $\hat{z}_j > 0$, то это наибольшая среди точек $z' < z$, для которых при некотором $i \in I \setminus I_j(R, z)$ выполняется равенство

$$f_{ij} - (c_{ij} + r_{ij}) \cdot z' = f_{K(j)j} - \beta_j^0(R, z) \cdot z'.$$

Далее, если $\hat{z}_j > 0$, то для всякого z', $0 < z' < \hat{z}_j$, справедливо соотноше-

ние

$$f_{k(j)j}-\beta_j^0(R,z)\cdot z'<\max_{i\in I\setminus I_j(R,z)}\{f_{ij}-(c_{ij}+r_{ij})\,z'\},$$

откуда получаем, что для любого допустимого набора (δ'_{ij}) имеет место неравенство

$$z(\delta')\geq\max_{j\in J}\hat{z}_j .$$

Пусть (δ'_{ij}) - допустимый набор и $i\in I^2$. Для всякого $j\in J_i^2$ при некотором z'_j, $z'_j=z'_j(\delta')<z$, имеет место равенство

$$f_{k(j)j}-\beta_j^0(R,z)\cdot z'_j=f_{ij}-(c_{ij}+r_{ij}+\delta'_{ij})\cdot z'_j .$$

Поскольку $c_{ij}+r_{ij}>\beta_j^0(R,z)$ и $f_{k(j)j}<f_{ij}$, то отсюда следует, что

$$f_{k(j)j}-\beta_j^0(R,z)\cdot z'<f_{ij}-(c_{ij}+r_{ij}+\delta'_{ij})\cdot z'$$

при $z'<z'_j$, а, значит, $z(\delta')\geq z'_j(\delta')$. Следовательно,

$$z(\delta')\geq z_i(\delta')=\max_{j\in J_i^2}z'_j(\delta').$$

Отыщем для всякого $i\in I^2$ величину $\tilde{z}_i$ такую, что

$$\tilde{z}_i=\min z_i(\delta'),$$

где минимум берется по всем допустимым наборам (δ'_{ij}). Для этого заметим, что $\tilde{z}_i$ обладает следующим свойством: для некоторого набора (δ_{ij}) такого, что

$$\sum_{j\in J_i^2}\delta_{ij}=\delta_i(R),$$

при всех $j\in J_i^2$ имеем $\tilde{z}_i=z'_j(\delta)$. Отсюда, суммируя по $j\in J_i^2$ равенства

$$f_{k(j)j}-\beta_j^0(R,z)\cdot\tilde{z}_i=f_{ij}-(c_{ij}+r_{ij}+\delta_{ij})\cdot\tilde{z}_i ,$$

получаем

$$\tilde{z}_i=\frac{\sum_{j\in J_i^2}(f_{ij}-f_{k(j)j})}{\sum_{j\in J_i^2}(c_{ij}+r_{ij}-\beta_j^0(R,z))+\delta_i(R)},\ i\in I^2.$$

Понятно, что для всякого допустимого набора (δ'_{ij}) имеет место неравенство

$$z(\delta')\geq z_0=\max\{\max_{i\in I^2}\tilde{z}_i,\ \max_{j\in J}\hat{z}_j\}.$$

Как и в случае преобразования 1-го типа, построим набор (δ_{ij}), для которого $z(\delta) = z_0$. Для этого положим

$$w_j' = f_{K(j)j} - \beta_j^0(R, z)\cdot z_0, \quad j \in J_z,$$

и для всяких $j \in J_z$, $i \in I_j^z$ величину δ_{ij} определим из соотношения

$$f_{ij} - (c_{ij} + \tau_{ij} + \delta_{ij})\cdot z_0 = w_j'.$$

Нетрудно показать, что так определенный набор (δ_{ij}) является искомым.

Покажем, что решение $(\bar{R}, z_0)$ является оценочным (т.е. можно положить $\bar{z} = z_0$). Поскольку ни одна из функций $w_j(\bar{R}, x)$, $j \in J$, не имеет точек излома, лежащих между z и z_0, для всякого $j \in J$ справедливы равенства

$$\mu_j(\bar{R}, z_0) = \beta_j(\bar{R}, z) = \beta_j^0(R, z),$$

и, следовательно,

$$\sum_{j\in J} \mu_j(\bar{R}, z) < B.$$

Далее, если $j \in J \setminus J_z$, то

$$\beta_j(\bar{R}, z_0) = \beta_j(R, z_0) \geq \beta_j(R, z)$$

(поскольку $z_0 < z$). Если же $j \in J_z$, то

$$\beta_j(\bar{R}, z_0) > \beta_j(R, z).$$

Действительно, если $i \in I_j(R, z)$ и $c_{ij} + \tau_{ij} = \beta_j(R, z)$, то $i \in I_j(\bar{R}, z_0)$ и $\bar{\tau}_{ij} > \tau_{ij}$, откуда получаем требуемое неравенство. Таким образом,

$$\sum_{j\in J} \beta_j(\bar{R}, z_0) > \sum_{j\in J} \beta_j(R, z) \geq B.$$

Отсюда следует, что решение $(\bar{R}, z_0)$ является оценочным.

Заметим также следующее. Для всякого $j \in J$ выполняется равенство $\mu_j(\bar{R}, z_0) = \beta_j^0(R, z)$ и, кроме того, $K(j) \in I_j(\bar{R}, z_0)$. Это означает, что $\mu_j(\bar{R}, z_0) = \mu_j^0(\bar{R}, z_0)$. Следовательно, $J_0(\bar{R}, z_0) = \varnothing$ и

$$\sum_{j\in J} \mu_j^0(\bar{R}, z_0) < B.$$

Таким образом, если полученное решение $(\bar{R}, z_0)$ не является тупиковым, то для него выполняется условие (5), т.е. к этому решению можно в свою очередь применить преобразование 2-го типа. Поэтому естественным представляется вопрос о том, сколько раз подряд может выполняться подобное преобразование. Чтобы ответить на этот вопрос, введем в рассмотрение множества $M_j'(R, z)$ и $Q_j'(R, z)$, $j \in J$, аналогичные множествам $M_j(R, z)$ и $Q_j(R, z)$, и

докажем утверждение, аналогичное лемме 6.

Для всякого $j \in J$ положим $M_j^{\prime}(R,z)=\{i \in I \mid i \in I_j(R,z^{\prime})$ при некотором $z^{\prime} \geq z\}$, $Q_j^{\prime}(R,z)=\{i \in I \mid f_{ij}-(c_{ij}+\tau_{ij})\cdot z^{\prime} < f_{i_0 j}-(c_{i_0 j}+\tau_{i_0 j})\cdot z^{\prime}$ для некоторого $i_0 \in I_0(R)$ при всех $z^{\prime} < z\}$. Нетрудно убедиться (аналогично тому, как это делалось в случае преобразования 1-го типа), что для всякого $j \in J$ выполняются включения

$$M_j^{\prime}(R,z) \subseteq M_j^{\prime}(\bar{R},z_0),$$
$$Q_j^{\prime}(R,z) \subseteq Q_j^{\prime}(\bar{R},z_0).$$

Покажем, что для некоторого $j \in J$ хотя бы одно из этих включений является строгим.

Действительно, предположим, что $z_0 = \tilde{z}_i$ для некоторого $i \in I$. Тогда найдется хотя бы один элемент $j \in J_i^{z}$ такой, что

$$f_{K(j)j} - \beta_j^{0}(R,z)\cdot z^{\prime} < f_{ij}-(c_{ij}+\bar{\tau}_{ij})\cdot z^{\prime}$$

при всех $z^{\prime} < z_0$. Поскольку $\delta_i(\bar{R})=0$, то отсюда следует, что $K(j) \in Q_j^{\prime}(\bar{R},z_0)$. Но $K(j) \notin Q_j^{\prime}(R,z)$, следовательно, $|Q_j^{\prime}(\bar{R},z_0)| > |Q_j^{\prime}(R,z)|$.

Пусть теперь $z_0 = \hat{z}_j$ для некоторого $j \in J$. Тогда найдется номер $i \in I_j(\bar{R},z_0)$ такой, что $i \notin I_j(R,z)$, т.е. $|M_j^{\prime}(\bar{R},z_0)|>|M_j^{\prime}(R,z)|$. Следовательно, справедлива

Л е м м а 7. Пусть по оценочному решению (R,z) при помощи преобразования 2-го типа построено оценочное решение $(\bar{R},z_0)$. Тогда

$$\sum_{j\in J}(|M_j^{\prime}(\bar{R},z_0)|+|Q_j^{\prime}(\bar{R},z_0)|) > \sum_{j\in J}(|M_j^{\prime}(R,z)|+|Q_j^{\prime}(R,z)|).$$

С л е д с т в и е. Преобразование 2-го типа может выполняться подряд не более $2\cdot J\cdot(I-1)$ раз.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость этого утверждения вытекает из соотношений

$$1 \leq |M_j^{\prime}(R,z)| \leq I,$$
$$0 \leq |Q_j^{\prime}(R,z)| \leq I-1, \quad j \in J.$$

В заключение заметим, что трудоемкость преобразования 2-го типа не превосходит $O(I\cdot J)$.

5.5. Предположим, что рассматриваемое оценочное решение (R,z), $z>0$, не является тупиковым и к нему не может быть применено ни преобразование 1-го типа, ни преобразование 2-го типа. Это означает, что, во-первых,

$$\sum_{j\in J_0(R,z)} \beta_j(R,z) + \sum_{j\in J\setminus J_0(R,z)} \mu_j^0(R,z) \le B,$$

ибо в противном случае к решению (R, z) применимо преобразование 1-го типа, и, во-вторых, $J_0(R,z) \neq \emptyset$. Действительно, предположим, что $J_0(R,z) = \emptyset$. Тогда если

$$\sum_{j\in J} \beta_j^0(R,z) \ge B,$$

то решение (R,z) является тупиковым, а если

$$\sum_{j\in J} \beta_j^0(R,z) < B,$$

то к этому решению применимо преобразование 2-го типа.

Опишем <u>вспомогательное преобразование</u>, при помощи которого в данной ситуации может быть построено оценочное решение $(\bar R, \bar z)$, $\bar R \ge R$, для которого $B(\bar R,\bar z) < B(R,z)$.

Обозначим через j_0 такой номер $j \in J_0(R,z)$, для которого количество элементов в множестве $I_j(R,z)$ наименьшее, и пусть

$$w'_{j_0} = max\{\max_{i\in I\setminus I_{j_0}(R,z)} \{f_{ij_0} - (c_{ij_0} + r_{ij_0})\cdot z\},$$

$$\max_{i\in I_{j_0}(R,z)} \{f_{ij_0} - (c_{ij_0} + r_{ij_0} + \delta_i(R))\cdot z\}\}.$$

Далее, для всякого $i \in I_{j_0}(R,z)$ положим

$$\delta_{ij_0} = (w_{j_0}(R,z) - w'_{j_0})/z,$$

а элементы матрицы $\bar R$ определим следующим образом:

$$\bar r_{ij} = \begin{cases} r_{ij_0} + \delta_{ij_0}, & \text{если } j = j_0,\ i \in I_{j_0}(R,z); \\ r_{ij} & \text{— в противном случае.} \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что

$$\sum_{j\in J} \bar r_{ij} \le c_i^0$$

для всякого $i \in I$. Кроме того, $w_{j_0}(\bar R, z) = w'_{j_0} < w_{j_0}(R,z)$, откуда следует, что $B(\bar R, z) < B(R,z)$. Далее, поскольку $\beta_{j_0}(\bar R, z) > \beta_{j_0}(R,z)$, справедливо следующее утверждение: если решение $(\bar R, z)$ не является оценочным, то для оценочного решения $(\bar R, \bar z)$ выполняется неравенство $\bar z > z$.

Очевидно, что либо $|I_0(\bar{R})| > |I_0(R)|$, либо $|I_{j_0}(\bar{R}, z)| > |I_{j_0}(R, z)|$. Отсюда следует, что вспомогательное преобразование при фиксированном z выполняется подряд (т.е. применительно к оценочному решению (R', z), $R' \geq R$) не более $I \cdot J + I$ раз.

Отметим также следующие свойства вспомогательного преобразования. Если при помощи этого преобразования по оценочному решению (R, z) построено решение $(\bar{R}, z)$, то

$$M_j(R, z) \subseteq M_j(\bar{R}, z)$$

и

$$Q_j(R, z) \subseteq Q_j(\bar{R}, z)$$

для всякого $j \in J$. Если при этом решение $(\bar{R}, z)$ является оценочным, то трудоемкость преобразования равняется $O(I \cdot J)$. Если же для отыскания оптимального решения $\bar{z}$ задачи $\mathcal{D}R(F, C + \bar{R}, B)$ потребовалось проделать p шагов алгоритма п. 2.2 из [1], то трудоемкость преобразования - $O((p+1) \cdot I \cdot J)$ и выполняется неравенство

$$\sum_{j \in J} |M_j(R, z)| + p \leq \sum_{j \in J} |M_j(\bar{R}, \bar{z})| .$$

5.6. В заключение данного параграфа убедимся, что справедлива

Л е м м а 8. Предположим, что оценочное решение (R, z), $z > 0$, обладает следующим свойством: $B(R, z) \leq B(\bar{R}, \bar{z})$ для всякого допустимого решения $(\bar{R}, \bar{z})$ такого, что $\bar{R} \geq R$ и $\bar{z} \geq 0$. Тогда (R, z) - тупиковое решение задачи $\mathcal{D}\mathcal{E}(F, C, C^0, B)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное и рассмотрим случай, когда

$$\sum_{j \in J} \mu_j^0(R, z) > B .$$

Случай, когда

$$\sum_{j \in J} \beta_j^0(R, z) < B ,$$

рассматривается аналогично.

Если $J_0(R, z) = \emptyset$ или выполняется неравенство (3), то при помощи преобразования 1-го типа построим оценочное решение $(\bar{R}, \bar{z})$ такое, что $\bar{R} \geq R$, $\bar{z} > z$ и $B(\bar{R}, \bar{z}) < B(R, z)$.

Если же $J_0(R, z) \neq \emptyset$ и неравенство (3) не выполняется, то подобное решение $(\bar{R}, \bar{z})$ может быть построено при помощи вспомогательного преобразования.

Таким образом, предполагая, что

$$\sum_{j\in J} \mu_j^0(R, z) > B,$$

приходим к противоречию с условиями леммы.

§ 6. Алгоритм построения тупикового решения

Предлагаемый алгоритм построения тупикового решения задачи $\mathcal{DE}(F, C, C^0, B)$ основан на многократном применении преобразований 1-го и 2-го типов и вспомогательных преобразований. Алгоритм состоит из некоторого числа однотипных этапов. На подготовительном (нулевом) этапе строится начальное оценочное решение (R^0, z^0) такое, что $z^0 > 0$. Далее, на K-м, $K \geq 1$, этапе рассматривается оценочное решение (R^{K-1}, z^{K-1}), полученное к началу этого этапа. Если это решение оказывается тупиковым, работа алгоритма заканчивается. В противном случае в ходе K-го этапа при помощи одного из описанных выше преобразований строится оценочное решение (R^K, z^K) с меньшим значением целевой функции.

6.1. Опишем более подробно действия, выполняемые в ходе подготовительного этапа алгоритма.

Рассмотрим задачу $\mathcal{D}R(F, C, B)$, и пусть z - оптимальное решение этой задачи. Если $z = \infty$, то целевая функция задачи $\mathcal{DE}(F, C, C^0, B)$ не ограничена снизу. В этом случае в качестве искомой верхней границы принимается величина $B = -\infty$, после чего работа алгоритма заканчивается.

Если $0 < z < \infty$, то в качестве начального оценочного решения принимается решение (R^0, z^0), где $z^0 = z$, а $r_{ij}^0 = 0$, $i \in I$, $j \in J$. После этого переходим к выполнению первого этапа алгоритма.

Рассмотрим случай, когда $z = 0$, и пусть $R^{(1)} = (r_{ij}^{(1)})$, $r_{ij}^{(1)} = 0$, $i \in I, j \in J$. Если

$$\sum_{j\in J} \mu_j^0(R^{(1)}, z) \leq B,$$

то решение $(R^{(1)}, z)$ является тупиковым и алгоритм заканчивает работу.

Предположим, что

$$\sum_{j\in J} \mu_j^0(R^{(1)}, z) > B.$$

В этом случае построим матрицу R^0, $R^0 \geqslant R^{(1)}$, для которой решение либо является тупиковым, либо не является оценочным.

Построение такой матрицы будет осуществляться по шагам. Пусть к началу K-го шага, $K \geq 1$, построена матрица $R^{(K)} \geqslant R^{(1)}$, для которой выполняются неравенства

$$\sum_{j\in J}\mu_j(R^{(K)},z)\le B<\sum_{j\in J}\mu_j^0(R^{(K)},z),$$

т.е. решение $(R^{(K)},z)$ является оценочным, но не тупиковым решением задачи $\mathcal{D}\mathcal{E}(F,C,C^0,B)$. На K-м шаге построения матрицы R^0 выполняются следующие действия.

Рассмотрим множество

$$J^{(K)}=\{j\in J\,|\,\mu_j(R^{(K)},z)<\mu_j^0(R^{(K)},z)\}$$

и для всякого $j\in J^{(K)}$ положим

$$\mu_j'=\min_{i\in I_j(R^{(K)},z)}\{c_{ij}+\delta_i(R^{(K)})\}.$$

Обозначим через j_0 тот номер $j\in J^{(K)}$, для которого количество элементов в множестве $\{i\in I_j(R^{(K)},z)\,|\,c_{ij}<\mu_j'\}$ наименьшее, и определим элементы матрицы $R^{(K+1)}$ следующим образом:

$$r_{ij}^{(K+1)}=\begin{cases} r_{ij}^{(K)}, & \text{если } j\in J,\ j\ne j_0,\ i\in I;\\ \max\{0,\mu_{j_0}'-c_{ij_0}\}, & \text{если } j=j_0,\ i\in I.\end{cases}$$

Рассматривая решение $(R^{(K+1)},z)$, нетрудно убедиться, что оно является допустимым решением задачи $\mathcal{D}\mathcal{E}(F,C,C^0,B)$ и имеют место соотношения

$$\mu_j(R^{(K)},z)=\mu_j(R^{(K+1)},z)\le\mu_j^0(R^{(K+1)},z)\le\mu_j^0(R^{(K)},z),$$

если $j\in J$ и $j\ne j_0$, и

$$\mu_{j_0}(R^{(K)},z)<\mu_{j_0}(R^{(K+1)},z)=\mu_{j_0}^0(R^{(K+1)},z)\le\mu_{j_0}^0(R^{(K)},z).$$

Следовательно,

$$\sum_{j\in J}\mu_j(R^{(K)},z)<\sum_{j\in J}\mu_j(R^{(K+1)},z)\le$$

$$\le\sum_{j\in J}\mu_j^0(R^{(K+1)},z)\le\sum_{j\in J}\mu_j^0(R^{(K)},z).$$

Если при этом решение $(R^{(K+1)},z)$ оказывается тупиковым, то полагаем $R^0=R^{(K+1)}$ и алгоритм заканчивает работу. Если $(R^{(K+1)},z)$ оказывается оценочным (но не тупиковым) решением задачи $\mathcal{D}\mathcal{E}(F,C,C^0,B)$, переходим к следующему шагу построения матрицы R^0. Наконец, если решение $(R^{(K+1)},z)$ не является оценочным, положим $R^0=R^{(K+1)}$, после чего перейдем к рассмотрению задачи $\mathcal{D}R(F,C+R^0,B)$ и отыщем ее оптимальное решение z^0. Очевидно, $z^0>0$ и решение (R^0,z^0) является оценочным решением задачи $\mathcal{D}\mathcal{E}(F,C,C^0,B)$.

После этого переходим к выполнению первого этапа алгоритма.

Заметим, что количество элементов в множестве $J^{(K)}$ не превосходит $J-K+1$, поэтому для построения матрицы R^0 потребуется проделать не более $J+1$ шагов. Отсюда нетрудно получить, что трудоемкость подготовительного этапа алгоритма задается величиной $O(I^2\cdot J^2)$.

6.2. Опишем теперь действия, выполняемые на K-м, $K\geqslant 1$, этапе алгоритма построения тупикового решения.

Пусть (R^{K-1}, z^{K-1}) - оценочное решение, построенное к началу этапа, $z^{K-1}>0$. Если это решение оказывается тупиковым, то работа алгоритма заканчивается. Рассмотрим случай, когда решение (R^{K-1}, z^{K-1}) не является тупиковым. Тогда либо

$$\sum_{j\in J}\mu_j^0(R^{K-1}, z^{K-1})>B,$$

либо

$$\sum_{j\in J}\beta_j^0(R^{K-1}, z^{K-1})<B$$

(при $J_0(R^{K-1}, z^{K-1})\neq\emptyset$ справедливы оба эти неравенства). В любой из этих ситуаций по решению (R^{K-1}, z^{K-1}) строится новое оценочное решение (R^K, z^K) такое, что $R^K\geqslant R^{K-1}$ и $B(R^K, z^K)<B(R^{K-1}, z^{K-1})$. При этом если решение (R^{K-1}, z^{K-1}) удовлетворяет условию (3), то применяется преобразование 1-го типа (и, следовательно, $z^K>z^{K-1}$). Если же условие (3) не выполняется, но имеет место соотношение (5), то применяется преобразование 2-го типа и $z^K<z^{K-1}$. Наконец, если решение (R^{K-1}, z^{K-1}) не удовлетворяет соотношениям (3) и (5), новое оценочное решение строится при помощи вспомогательного преобразования.

Если оказывается, что $z^K=\infty$, то это означает, что целевая функция задачи $\mathcal{D}\mathcal{E}(F, C, C^0, B)$ не ограничена снизу, в качестве искомой верхней границы принимается величина $B=-\infty$ и алгоритм заканчивает работу. Если же $z^K<\infty$, то переходим к выполнению следующего этапа алгоритма.

6.3. Оценим трудоемкость предлагаемого алгоритма.

Пусть $K_0\geqslant 1$ - номер такого этапа алгоритма, в ходе выполнения которого оценочное решение (R^{K_0}, z^{K_0}) строится по оценочному решению (R^{K_0-1}, z^{K_0-1}) при помощи преобразования 2-го типа, причем на предшествующих этапах преобразование 2-го типа не применялось. Тогда из свойств преобразования 2-го типа следует, что на всех последующих этапах алгоритма применяется только это преобразование и количество таких этапов не превосходит $O(I\cdot J)$ (см. следствие леммы 7). Таким образом, суммарная трудоемкость K_0-го и всех последующих этапов алгоритма не превосходит величины $O(I^2 J^2)$.

Для того чтобы оценить суммарную трудоемкость этапов с номерами, меньшими K_0, рассмотрим следующую ситуацию.

Пусть K и ℓ – номера этапов такие, что $1 \le K < \ell < K_0$, $z^{K-1} < z^{\ell-1}$, и либо $\ell = K+1$, либо для всякого n, такого, что $K < n < \ell$, выполняется равенство $z^{n-1} = z^{K-1}$. Возможны следующие три случая:

1) $\ell = K+1$, т.е. оценочное решение (R^K, z^K) построено по оценочному решению (R^{K-1}, z^{K-1}) при помощи либо вспомогательного преобразования, либо преобразования 1-го типа, и $z^{K-1} < z^K$;

2) $\ell > K+1$, причем на этапах с номерами $K, K+1, \dots, \ell-2$ выполнялись вспомогательные преобразования, а на $\ell-1$ -м этапе – преобразование 1-го типа;

3) $\ell > K+1$, причем на этапах с номерами $K, K+1, \dots, \ell-1$ выполнялись вспомогательные преобразования.

Обозначим через $p_{\ell-1}$ количество шагов алгоритма п.2.2 из [1], выполняемых в ходе $\ell-1$ -го этапа при отыскании оптимального решения $z^{\ell-1}$ задачи $\mathcal{D}R(F, C+R^{\ell-1}, B)$. Тогда трудоемкость $\ell-1$ -го этапа будет задаваться величиной $O((p_{\ell-1}+1)\cdot I\cdot J)$. Суммарная трудоемкость этапов с номерами $K, K+1, \dots, \ell-2$ (во втором и третьем случаях) равна $O((\ell-K)\cdot I\cdot J)$, и, следовательно, суммарная трудоемкость этапов с номерами $K, K+1, \dots, \ell-1$ составит $O((p_{\ell-1}+1+\ell-K)\cdot I\cdot J)$.

Используя лемму 6, а также свойства вспомогательного преобразования, нетрудно показать, что имеет место следующее неравенство:

$$\sum_{j\in J}(|M_j(R^{\ell-1}, z^{\ell-1})| + |Q(R^{\ell-1}, z^{\ell-1})|) \ge$$

$$\ge p_{\ell-1} + \ell - K + \sum_{j\in J}(|M_j(R^{K-1}, z^{K-1})| + |Q_j(R^{K-1}, z^{K-1})|) . \qquad (7)$$

Пусть теперь $\ell_1, \dots, \ell_S$ – номера этапов, в ходе которых выполнялось преобразование 1-го типа. Тогда с помощью (7) получаем, что

$$\sum_{q=1}^{S} p_{\ell_q} = O(I\cdot J),$$

$$\sum_{q=2}^{S} (\ell_q - \ell_{q-1}) = O(I\cdot J),$$

и, следовательно, суммарная трудоемкость этапов с 1-го по ℓ_S-й равна $O(I^2\cdot J^2)$.

Заметим теперь, что либо $\ell_S = K_0 - 1$, либо K_0 -му этапу предшествует последовательность этапов $\ell_S+1, \dots, K_0-1$, в ходе которых выполняется только вспомогательное преобразование и $z^{\ell_S} = z^{\ell_S+1} = \dots = z^{K_0-1}$.

Поскольку трудоемкость такой последовательности этапов есть величина $O(I^2 \cdot J^2)$, то и трудоемкость алгоритма в целом составляет $O(I^2 \cdot J^2)$.

§ 7. Выбор выделенного решения

Возвращаясь к конкретизации основных элементов вычислительной схемы ветвей и границ применительно к задаче $\mathcal{E}(F, C, C^0, B)$, построим функцию выбора выделенного решения на подмножествах решений этой задачи.

7.1. Определим прежде всего выбор выделенного решения на базисных подмножествах. Для этого каждому базисному подмножеству $\pi(x_1, \ldots, x_I)$ поставим в соответствие задачу $R(F', C', B')$, где

$$F' = (f_{ij})(i \in \mathbf{I} \setminus \bar{\mathbf{I}}_0, j \in \mathbf{J}),\ C' = (c_{ij})(i \in \mathbf{I} \setminus \bar{\mathbf{I}}_0, j \in \mathbf{J}),\ B' = B - \sum_{i \in \mathbf{I}_1} c_i^0 .$$

Очевидно, всякое решение $(x_i)(x_{ij})$ из множества $\pi(x_1, \ldots, x_I)$ определяется решением (x_{ij}) задачи $R(F', C', B')$, и в качестве выделенного решения на множестве $\pi(x_1, \ldots, x_I)$ будем принимать оптимальное решение задачи $R(F', C', B')$.

7.2. Наличие выделенного решения в проверяемом подмножестве предотвращает дальнейшее его ветвление. Поэтому крайне желательно указывать выделенные решения и для некоторых подмножеств $\pi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_q})$, отличных от базисных. В качестве таких решений естественно брать наилучшие решения на подмножествах. В силу этого представляют особый интерес способы отыскания наилучших решений хотя бы на некоторых подмножествах $\pi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_q})$. Ниже формулируется условие, достаточное для того, чтобы наилучшим решением на подмножестве $\pi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_q})$ являлось решение $(x'_i)(x'_{ij})$ такое, что $x'_i = 0$ для всякого $i \notin (i_1, \ldots, i_q)$.

Л е м м а 9. (критерий оптимальности). Пусть $\tilde{\mathbf{I}} = \{i \in \mathbf{I} \mid c_i^0 = 0\} \neq \emptyset$. Предположим, что для некоторого тупикового решения $(\tilde{R}, \tilde{z})$ задачи $\mathcal{D}\mathcal{E}(F, C, C^0, B)$ справедливы неравенства

$$\sum_{j \in \mathbf{J}} \tilde{z}_{ij} < c_i^0, \quad i \in \mathbf{I} \setminus \tilde{\mathbf{I}} .$$

Тогда существует оптимальное решение $(x_i^*)(x_{ij}^*)$ задачи $\mathcal{E}(F, C, C^0, B)$ такое, что $x_i^* = 0$ для всякого $i \in \mathbf{I} \setminus \tilde{\mathbf{I}}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $\tilde{z} > 0$. Тогда

$$\sum_{j \in \mathbf{J}} \mu_j^0(\tilde{R}, \tilde{z}) \le B \le \sum_{j \in \mathbf{J}} \beta_j^0(\tilde{R}, \tilde{z}) ,$$

и, поскольку $I_0(R) = \tilde{\mathbf{I}}$, для всякого $j \in \mathbf{J}$ найдутся номера $\ell(j), K(j) \in \tilde{\mathbf{I}}$ такие, что

$$\mu_j^0(\tilde{R},\tilde{z}) = c_{\ell(j)j}\ ,\quad \beta_j^0(\tilde{R},\tilde{z}) = c_{k(j)j}\ ,$$

$$f_{\ell(j)j} - c_{\ell(j)j}\cdot\tilde{z} = f_{k(j)j} - c_{k(j)j}\cdot\tilde{z} = w_j(\tilde{R},\tilde{z})\ .$$

Рассмотрим задачу $R(\tilde{F},\tilde{C},\tilde{B})$, где $\tilde{F} = (f_{ij}), i\in\tilde{I},\ j\in J$; $\tilde{C} = (c_{ij}), i\in\tilde{I},\ j\in J$. Покажем, что $\tilde{z}$ – оптимальное решение задачи $\mathcal{D}R(\tilde{F},\tilde{C},\tilde{B})$. Действительно, при любом $j\in J$ имеют место равенства:

$$w_j(\tilde{z}) = \max_{i\in I}\{f_{ij} - c_{ij}\cdot\tilde{z}\} = f_{\ell(j)j} - c_{\ell(j)j}\cdot\tilde{z} = f_{k(j)j} - c_{k(j)j}\cdot\tilde{z},$$

$$\mu_j(\tilde{z}) = \min\{c_{ij}\mid i\in I,\ f_{ij} - c_{ij}\cdot\tilde{z} = w_j(\tilde{z})\} =$$
$$= c_{\ell(j)j} = \mu_j^0(\tilde{R},\tilde{z}),$$

$$\beta_j(\tilde{z}) = \max\{c_{ij}\mid i\in I,\ f_{ij} - c_{ij}\cdot\tilde{z} = w_j(\tilde{z})\} =$$
$$= c_{k(j)j} = \beta_j^0(\tilde{R},\tilde{z})\ .$$

Следовательно,

$$\sum_{j\in J}\mu_j(\tilde{z}) \le B \le \sum_{j\in J}\beta_j(\tilde{z})\ ,$$

т.е. точка $\tilde{z}$ удовлетворяет критерию оптимальности для многовариантной задачи о ранце.

Пусть $(\tilde{x}_{ij})$ – оптимальное решение задачи $R(\tilde{F},\tilde{C},B)$. Тогда

$$\sum_{j\in J}\ \sum_{i\in I} f_{ij}\ \tilde{x}_{ij} = \sum_{j\in J} w_j(\tilde{z}) + B\cdot\tilde{z}\ .$$

Рассмотрим решение (x_i^*), (x_{ij}^*) задачи $\mathcal{E}(F,C,C^0,B)$, которое следующим образом строится по решению $(\tilde{x}_{ij})$:

$$x_i^* = \begin{cases} 1, \text{ если } & i\in\tilde{I};\\ 0, \text{ если } & i\in I\setminus\tilde{I};\end{cases}$$

$$x_{ij}^* = \begin{cases}\tilde{x}_{ij}, \text{ если } & i\in\tilde{I};\\ 0, \text{ если } & i\in I\setminus\tilde{I},\quad j\in J\ .\end{cases}$$

Очевидно, это решение является допустимым решением задачи $\mathcal{E}(F,C,C^0,B)$. Кроме того, для всякого допустимого решения (x_i) (x_{ij}) задачи справедлива цепочка соотношений

$$\sum_{i\in I}\ \sum_{j\in J} f_{ij}\ x_{ij} \le \sum_{j\in J} w_j(\tilde{R},\tilde{z}) + B\cdot\tilde{z} = \sum_{j\in J} w_j(\tilde{z}) + B\cdot\tilde{z} =$$

$$= \sum_{i \in \tilde{I}} \sum_{j \in J} f_{ij} \tilde{x}_{ij} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} f_{ij} x^*_{ij} .$$

Отсюда следует, что $(x^*_i)\ (x^*_{ij})$ – оптимальное решение задачи $\mathcal{E}(F, C, C^o, B)$.

Случай $\tilde{z} = 0$ рассматривается аналогично. Заметим, что при этом

$$\sum_{j \in J} \mu^o_j(\tilde{R}, \tilde{z}) \leq B$$

и для всякого $j \in J$ найдется элемент $\ell(j) \in \tilde{I}$ такой, что $w_j(\tilde{R}, \tilde{z}) = f_{\ell(j)j}$ и $\mu^o_j(\tilde{R}, \tilde{z}) = c_{\ell(j)j}$.

Предположим, что при отыскании верхней границы на подмножестве $\pi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_q})$ построено тупиковое решение (R, z) задачи $\mathcal{D}\mathcal{E}(\bar{F}, \bar{C}, \bar{C}^o, \bar{B})$. Если при этом

$$\sum_{j \in J} r_{ij} < c^o_i$$

для всякого $i \in I'$, то отыщем на подмножестве $\pi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_q})$ выделенное решение. С этой целью рассмотрим задачу $R(F_1, C_1, B)$, где

$$F_1 = (f_{ij}),\ i \in \bar{I}_1,\ j \in J\ ;\ C_1 = (c_{ij}),\ i \in \bar{I}_1,\ j \in J\ .$$

Пусть $(x_{ij}),\ i \in \bar{I}_1,\ j \in J$, – оптимальное решение этой задачи. Тогда в качестве выделенного решения на подмножестве $\pi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_q})$ примем решение $(\tilde{x}_i)\ (\tilde{x}_{ij})$, которое строится следующим образом:

$$\tilde{x}_i = \begin{cases} 1, \text{ если } & i \in \bar{I}_1; \\ 0, \text{ если } & i \in I \setminus \bar{I}_1; \end{cases} \qquad \tilde{x}_{ij} = \begin{cases} x_{ij}, \text{ если } & i \in \bar{I}_1 \\ 0, \text{ если } & i \in I \setminus \bar{I}_1,\ j \in J. \end{cases}$$

Как следует из леммы 9, так определенное выделенное решение является наилучшим решением задачи $\mathcal{E}(F, C, C^o, B)$ на подмножестве $\pi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_q})$.

§ 8. Функция ветвления

Аналогично тому, как это делалось в [2], с каждым частичным решением $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_q})$ свяжем подмножество проверяемых решений $\pi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_q})$ и множество неотброшенных решений, являющееся объединением множества $\pi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_q})$ и всех множеств $\pi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{q'-1}}, 0)$ таких, что $x_{i_{q'}} = 1,\ q' \leq q$.

Результатом применения функции ветвления к множеству неотброшенных решений будем считать множество $\pi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_q})$, к множеству проверяе-

мых решений - подмножество $\mathcal{X}(x_{i_1},\dots,x_{i_q},1)$, где номер $i_{q+1}\in I$ определяется следующим образом.

Пусть в результате решения задачи $\mathcal{D}\mathcal{E}(\bar F,\bar C,\bar C^0,\bar B)$, соответствующей частичному решению $(x_{i_1},\dots,x_{i_q})$, получено тупиковое решение (R,z) и пусть

$$I_0'(R,z)=\{i\in I'\mid \sum_{j\in J} z_{ij}=c_i^0\}.$$

Если $I_0'(R,z)=\emptyset$, то, воспользовавшись критерием оптимальности (лемма 9), отбрасываем множество $\mathcal{X}(x_{i_1},\dots,x_{i_q})$. Если же $I_0'(R,z)\neq\emptyset$, то в качестве i_{q+1} берется такой номер $i\in I_0'(R,z)$, для которого число элементов в множестве $\{j\in J\mid f_{ij}-(c_{ij}+z_{ij})\cdot z=w_j(R,z)\}$ наибольшее.

§ 9. Результаты численных экспериментов

Описанный алгоритм решения задачи $\mathcal{E}(F,C,C^0,B)$ реализован в виде программы на языке ФОРТРАН-IУ для ЭВМ БЭСМ-6. Сделаем некоторые общие замечания об оценках качества алгоритма и программы.

Нетрудно оценить количество элементарных операций, достаточное для реализации одного шага алгоритма ветвей и границ. Наиболее трудоемкой процедурой, выполняемой на шаге, является построение тупикового решения задачи $\mathcal{D}\mathcal{E}(F,C,C^0,B)$. Как уже отмечалось, трудоемкость этой процедуры, а следовательно, и трудоемкость одного шага алгоритма ветвей и границ составляет $O(I^2\cdot J^2)$.

Что же касается числа шагов алгоритма, то теоретически оно может быть равно числу всех подмножеств, рассмотрение которых возможно в процессе работы алгоритма, и в данном случае равно 2^I. В действительности же число шагов алгоритма ветвей и границ, наблюдаемое при его применении к решению конкретных задач, часто оказывается значительно меньше теоретического и зависит в основном от того, насколько точно вычисляется верхняя граница и насколько удачно выбирается перспективный элемент при ветвлении подмножеств. Если верхняя граница вычисляется достаточно точно, то число шагов алгоритма оказывается сравнительно небольшим.

В силу сказанного становится ясно, что качество алгоритма и его программной реализации характеризовала бы средняя трудоемкость, представление о которой можно составить в результате массового применения алгоритма к конкретным задачам.

Экспериментальные расчеты проводились на задачах, исходные данные которых формировались при помощи датчика случайных чисел. Эксперимент сводился к последовательному заданию конкретных матриц F , C , C^0 и решению за-

дачи $\mathcal{E}(F, C, C^0, B)$ при различных значениях B. Решались в основном задачи с $I = 10$, $J = 10$ и $I = 15$, $J = 15$. Результаты эксперимента приведены в таблице. Интересно отметить, что время счета задачи существенно зависит от величины B. Так, при малых и при больших значениях B время счета задачи мало. В тех же случаях, когда в оптимальное решение задачи включается 3-4 изделия (т.е. при средних значениях B), время решения задачи заметно возрастает.

В целом проведенные эксперименты дали удовлетворительные результаты и показали практическую работоспособность построенного алгоритма решения задачи $\mathcal{E}(F, C, C^0, B)$ и его программной реализации.

Таблица.

$I \times J$	Величина B	Кол-во изделий в опт. решении	Кол-во задач	Среднее время решения	Среднее кол-во шагов алгоритма
10x10	250	1	10	10	7
	300-400	1	17	1 02	31
	500-600	2-3	12	3 45	54
	700	3	36	32	48
	800	3-4	35	9	46
15x15	350-400	1	9	47	15
	600-1400	2-4	14	1 45	113
	1600-1800	5-6	24	1 01	105
	2000-2400	7-9	83	12	48

Поступила в ред.-изд. отдел
23 апреля 1986 г.

Литература

1. Давыдов А.И. Задача выбора оптимального ряда изделий по критерию "суммарная эффективность". I// Управление и оптимизация (Управляемые системы) - Новосибирск, 1985. - Вып. 26. - С. 40-54.

2. Береснев В.Л., Ибрагимов Г.И., Кочетов Ю.А. Алгоритмы решения задачи оптимального выбора динамического ряда изделий// Задачи поиска оптимальных решений (Управляемые системы). - Новосибирск, 1984. - Вып. 24. - С. 3-19.