Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1988 г., вып. 28

УДК 517.946

ОБ УСЛОВИЯХ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ

Б.Д.Тажибаев

В задачах оптимального управления процессами, описываемыми уравнениями параболического типа, многими авторами (см. напр., [1 -5]) доказаны необходимые условия типа принципа максимума и некоторые достаточные условия оптимальности.

В [6] разработана универсальная схема получения условий оптимальности для широкого класса задач оптимизации.

В [3,4], используя эту схему, получены необходимые условия оптимальности, когда управляемый процесс описывается общим параболическим уравнением с дивергентной главной частью, а критерии качества не содержат явной зависимости от управления.

В настоящей заметке рассмотрена задача минимизации функционала

$$J(S) = \int_0^1 [u(x,T) - u_1(x)]^2 dx + \beta \int_0^1\int_0^T S^2(x,t)\, dt\, dx, \qquad (1)$$

$\beta > 0$, $u_1(x) \in W_2^1[0,1]$, $S(x,t)$ - измеримая функция, $|S(x,t)| \leq 1$ почти всюду в $Q_T = \{x,t \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq t \leq T\}$, $u_1(0) = u_1(1) = 0$, $u(x,t)$- решение краевой задачи

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(u, S(x,t)), \\ u(x,0) = u^0(x) \in W_2^1[0,1], \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \end{cases} \qquad (2)$$

$$u^0(0) = u^0(1) = 0, \; f(u,S) \in C^2(G),$$

$$G = R \times [-1,1], \; \max_{u,s \in G} (f_u, |f_s|) = K.$$

Аналогичные задачи с линейной зависимостью от управлений изучались, например, в [2,7]. С использованием методики из [2,7] получено необходимое условие оптимальности типа принципа максимума. При дополнительном предположении о данных задачи показано, что краевая задача принципа максимума однозначно разрешима, а необходимое условие оптимальности становится достаточным.

В дальнейшем будем считать, что все значения управлений и их приращений принадлежат области их допустимых значений, а именно: $|S(x,t)| \le 1$, $|S(x,t)+\Delta S(x,t)| \le 1$ почти всюду в Q_T. Из [8, с.241] следует, что при каждом управлении $S(x,t)$ существует единственное решение задачи (2):

$$u(x,t) \in W_2^{2,1}(Q_T) \cap H^{\alpha,\alpha/2}(Q_T), \quad 0<\alpha<1 .$$

Кроме того справедлива равномерная по всем S оценка [9, с. 213] :

$$\max_{Q_T} |u(x,t)| \le M, \tag{3}$$

где постоянная M зависит от u^0, K и T.

Л е м м а. Пусть $u(x,t)$ - решение задачи (2), соответствующее управлению $S(x,t)$. Дадим управлению $S(x,t)$ произвольное приращение $\Delta S(x,t)$. Тогда решение $u(x,t)$ получит приращение $\Delta u(x,t)$, для которого справедлива оценка

$$\|\Delta u\|_{L_2(Q_T)} \le D \|\Delta S\|_{L_p(Q_T)}^{\frac{2p}{p+2}}, \quad 1<p\le 2 .$$

Постоянная D в оценке зависит от K и T.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Приращение $\Delta u(x,t)$ удовлетворяет соотношениям

$$\Delta u_t = \Delta u_{xx} + \left[\int_0^1 f_u(u+\theta\Delta u,\, S+\Delta S)\,d\theta\right]\Delta u +$$

$$+ \left[\int_0^1 f_S(u,\, S+\theta\Delta S)\,d\theta\right]\Delta S \overset{def}{=} \tilde f_u\,\Delta u + \tilde f_S\,\Delta S,$$

$$\Delta u(x,0)=0, \quad \Delta u(0,t)=\Delta u(1,t)=0 . \tag{4}$$

Пусть $0 \le t_0 < \tau \le t \le T$, умножая (4) на Δu и интегрируя по прямоугольнику $Q_{t_0\tau} = [0,1]\times[t_0,\tau]$, имеем

$$\int_0^1 (\Delta u(x,\tau))^2 dx - \int_0^1 (\Delta u(x,t_0))^2 dx = -2\int_{t_0}^{\tau}\int_0^1 (\Delta u_x)^2 dx\,dt +$$

$$+ 2\int_{t_0}^{\tau}\int_0^1 \tilde f_u\cdot(\Delta u)^2 dx\,dt + 2\int_{t_0}^{\tau}\int_0^1 \tilde f_S\cdot\Delta u\cdot\Delta S\,dx\,dt .$$

Применяя неравенство Гельдера и учитывая, что $\tilde f_u, |\tilde f_S| \le K$, получим

$$\max_{t_0\le\tau\le t} \|\Delta u(x,\tau)\|_{2,\Omega}^2 \le \|\Delta u(x,t_0)\|_{2,\Omega}^2 +$$

$$+2K(t-t_0)\max_{t_0\le\tau\le t}\|\Delta u(x,\tau)\|^2_{2,\Omega}+$$

$$+2K\|\Delta S\|_{L_p(Q_{t_0 t})}\cdot\|\Delta u\|_{L_q(Q_{t_0 t})}\,. \tag{5}$$

Здесь $1/p+1/q=1,\ 1<p\le 2,\ 2\le q<\infty,\ \|\cdot\|_{2,\Omega}$ - норма $L_2([0,1])$. Примем $t_0=0$ и разделим промежуток $[0,T]$ на части точками $t_k=k\Delta t$, $k=0,1,2,\ldots,N-1,\ t_N=T$. Выберем Δt настолько малым, что $1-2K\Delta t=C^{-1}>0$. Тогда для каждого интервала $[t_K,t_{K+1}]$ из (5) следует:

$$\max_{t_k\le t\le t_{k+1}}\|\Delta u(x,t)\|^2_{2,\Omega}\le C(\|\Delta u(x,t_k)\|^2_{2,\Omega}+$$
$$+2K\|\Delta S\|_{L_p(Q_{t_k,t_{k+1}})}\|\Delta u\|_{L_q(Q_{t_k,t_{k+1}})})\,.$$

Применяя последовательно это неравенство k раз, получим

$$\max_{t_k\le t\le t_{k+1}}\|\Delta u(x,t)\|^2_{2,\Omega}\le const\|\Delta u\|_{L_q(Q_T)}\cdot\|\Delta S\|_{L_p(Q_T)}\,.$$

Отсюда следует, что справедливы соотношения:

$$\max_{0\le\tau\le T}\|\Delta u(x,\tau)\|^2_{2,\Omega}\le const\|\Delta u\|_{L_q(Q_T)}\cdot\|\Delta S\|_{L_p(Q_T)}, \tag{6}$$

$$\|\Delta u\|_{L_2(Q_T)}\le const\,. \tag{7}$$

Здесь постоянные зависят от K и T. С учетом известной оценки, свойств функции $f(u,S)$ и соотношения (7) очевидно, что

$$\|\Delta u\|_{W_2^{2,1}(Q_T)}\le C_1\|f(u+\Delta u,S+\Delta S)-f(u,S)\|_{L_2(Q_T)}\le$$
$$\le C_1K(\|\Delta u\|_{L_2(Q_T)}+\|\Delta S\|_{L_2(Q_T)})\le const \tag{8}$$

равномерно по всем S и $S+\Delta S$.

Из замечания 2.2 [10, с. 160-161] следует, что

$$\sup_{0\le t\le T}\|\Delta u_x\ x,t\|_{2,\Omega}\le const\|\Delta u\|_{W_2^{2,1}(Q_T)}\,,$$

а также $\forall t\in[0,T]\ u(x,t)\in\overset{\circ}{W}{}_2^1([0,1])\subset L_q([0,1])$ при $q\ge 2$. Значит, при фиксированных $t\in[0,T]$ с учетом (8) и [9, с. 79-80] справедливы

неравенства:

$$\|\Delta u_x(x,t)\|_{2,\Omega} \le const, \tag{9}$$

$$\|\Delta u(x,t)\|_{q,\Omega} \le \gamma \|\Delta u_x(x,t)\|^{\alpha}_{2,\Omega} \cdot \|\Delta u(x,t)\|^{1-\alpha}_{2,\Omega}, \alpha=\frac{1}{2}-\frac{1}{q}, \gamma=2^{\alpha}.$$

Теперь, используя (9), последовательно получим:

$$\|\Delta u(x,t)\|_{q,\Omega} \le const\, \|\Delta u(x,t)\|^{1-\alpha}_{2,\Omega},$$

$$\|\Delta u\|_{L_2(Q_T)} \le \Big[\int_0^T (const)^q \cdot \|\Delta u(x,t)\|^{q(1-\alpha)}_{2,\Omega}\, dt\Big]^{1/q} \le$$

$$\le const \cdot \max_{0\le t\le T} \|\Delta u\|^{1-\alpha}_{2,\Omega}.$$

Подставив это неравенство в (6) и выразив α через p, имеем:

$$\max_{t\in[0,T]} \|\Delta u(x,t)\|_{2,\Omega} \le const\, \|\Delta s\|^{2p/(p+2)}_{L_p(Q_T)}.$$

Тогда

$$\|\Delta u\|_{L_2(Q_T)} \le T^{1/2} \max_{t\in[0,T]} \|\Delta u(x,t)\|_{2,\Omega} \le D\cdot \|\Delta s\|^{2p/(p+2)}_{L_p(Q_T)}, \tag{10}$$

что и требовалось доказать.

Зададим непрерывную функцию $h(x,t,s)$ в замкнутой области $Q_T \times [-1,1]$. Определим для каждого $(x,t)\in Q_T$ множество $S(x,t)$:

$$S(x,t) = \{s : h(x,t,s) = \min_{|\sigma|\le 1} h(x,t,\sigma)\}.$$

$S(x,t)$ можно рассматривать как отображение из Q_T в подмножества сегмента $[-1,1]$.

З а м е ч а н и е. Очевидно, что $S(x,t)$ ограничено при каждом (x,t); кроме того легко показать, что множество $\Gamma(S) = \{(x,t,s)$: $(x,t)\in Q_T,\ s\in S(x,t)\}$ замкнуто. Тогда из утверждений [11, с. 53, 57, 59] следует полунепрерывность сверху относительно включения отображения $S(x,t)$, его измеримость и существование по меньшей мере одной однозначной измеримой ветви $\bar{s}(x,t)\subset S(x,t)$ такой, что

$$h(x,t,\bar{s}(x,t)) = \min_{|s'|\le 1} h(x,t,s').$$

Введем вспомогательную функцию $v(x,t)$ - решение задачи

$$\begin{cases} v_t = -v_{xx} - f_u(u, s(x,t))v, \\ v(x,t) = 2(u(x,T) - u_1(x)), \\ v(0,t) = v(1,t) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Согласно [8, с. 241], при каждом допустимом $s(x,t)$ существует единственное решение задачи (11): $v \in W_2^{2,1}(Q_T) \cap H^{\alpha,\alpha/2}(Q_T)$, $0<\alpha<1$. Из принципа максимума [9, с. 213] следует равномерная относительно $s(x,t)$ оценка:

$$\max_{Q_T} |v(x,t)| \le M_1, \tag{12}$$

где константа M_1 зависит от M, u_1, K и T. Обозначим через

$$M_2 = \max_{\substack{|u|\le M \\ |s|\le 1}} |f_{uu}(u,s)|,\ M_3 = \max_{\substack{|u|\le M \\ |s|\le 1}} |f_{us}(u,s)|,\ M_4 = \max_{\substack{|u|\le M \\ |s|\le 1}} |f_{ss}(u,s)|, \tag{13}$$

константа M определена в (3).

Т е о р е м а 1. 1) Пусть

$$H(u,v,s) = \beta s^2 + v f(u,s),\ \{u(x,t),\ s(x,t)\} -$$

оптимальный управляемый процесс в задаче (1)-(2), $v(x,t)$ - соответствующее решение задачи (11). Тогда почти всюду в Q_T выполнено соотношение

$$H(u(x,t), v(x,t), s(x,t)) = \min_{|s'|\le 1} (u(x,t), v(x,t), s'). \tag{14}$$

2) Пусть

$$\mu \equiv \mu(M_1, M, M_2, M_3, M_4, \beta, K, T) = \beta - M_1(M_2 D^2/2 + M_3 D + M_4/2).$$

(Постоянная $D = D(K,T)$) определена в лемме.) Если $\mu > 0$ и функции $u(x,t)$, $v(x,t)$, $s(x,t)$ удовлетворяют соотношениям (2), (11) и (14), то $s(x,t)$ есть оптимальное управление в задаче (1)-(2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Выведем формулу приращения функционала при переходе от управления s к управлению $s+\Delta s$. Пусть u и $u+\Delta u$ - решения задачи (2), соответствующие управлениям s и $s+\Delta s$.

$$\Delta J = J(s+\Delta s) - J(s) = \int_0^T \int_0^1 (2\beta s \Delta s + \beta(\Delta s)^2)\,dx\,dt +$$

$$+\int_0^1 2(u(x,T)-u_1(x))\Delta u(x,T)\,dx+\int_0^1(\Delta u(x,T))^2dx.$$

Преобразуем второе слагаемое.

$$\int_0^1 2(u(x,T)-u_1(x))\Delta u(x,T)\,dx=\int_0^1 v(x,T)\cdot\Delta u(x,T)\,dx=$$

$$=\int_0^1\int_0^T\frac{\partial}{\partial t}(v(x,t)\cdot\Delta u(x,t))\,dt\,dx=\int_0^T\int_0^1(v_t\,\Delta u+\Delta u_t\cdot v)\,dx\,dt=$$

$$=\int_0^T\int_0^1[(v\cdot\Delta u_x)_x-(\Delta u\cdot v_x)_x]\,dx\,dt+\int_0^T\int_0^1 v\cdot(f(u+\Delta u,s+\Delta s)-f(u,s)-$$

$$-f_u(u,s)\cdot\Delta u)\,dx\,dt=\int_0^T\int_0^1 v\cdot(f(u+\Delta u,s+\Delta s)-f(u,s)-f_u(u,s)\Delta u)\,dx\,dt.$$

Тогда

$$\Delta J=\iint_{Q_T}[(2\beta s\Delta s+\beta(\Delta s)^2)+v\cdot(f(u+\Delta u,s+\Delta s)-f(u,s)-$$

$$-f_u(u,s)\cdot\Delta u)]\,dx\,dt+\int_0^1(\Delta u(x,T))^2dx=$$

$$=\iint_{Q_T}\Delta_s H\,dx\,dt+\iint_{Q_T}v\cdot(f(u+\Delta u,s+\Delta s)-f(u,s+\Delta s)-$$

$$-f_u(u,s)\cdot\Delta u)\,dx\,dt+\int_0^1(\Delta u(x,T))^2dx, \tag{15}$$

где

$$\Delta_s H=H(u(x,t),v(x,t),s(x,t)+\Delta s(x,t))-H(u(x,t),v(x,t),s(x,t))=$$

$$=2\beta s(x,t)\cdot\Delta s(x,t)+\beta\cdot(\Delta s(x,t))^2+v(x,t)\times$$

$$\times[f(u(x,t),s(x,t)+\Delta s(x,t))-f(u(x,t),s(x,t))].$$

Оценим выражение под вторым интегралом в (15):

$$v\cdot[f(u+\Delta u,\, s+\Delta s)-f(u,s+\Delta s)-f_u(u,s)\Delta u]=$$

$$=v\cdot\Big[f_u(u,s+\Delta s)\Delta u+(\Delta u)^2\cdot\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f_{uu}(u+\theta_1\theta\Delta u,s+\Delta s)\theta d\theta_1 d\theta-$$

$$-f_u(u,s)\Delta u\Big]=v\cdot\Big[\Delta u\cdot\Delta s\cdot\int\limits_0^1 f_{us}(u,s+\theta\Delta s)\,d\theta\,+$$

$$+(\Delta u)^2\cdot\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f_{uu}(u+\theta\theta_1\Delta u,s+\Delta s)\theta d\theta_1 d\theta\Big]\,. \tag{16}$$

В силу (13), (15) и (16) имеем

$$\Delta J\le\iint\limits_{Q_T}\Delta_s H\,dx dt+M_1M_3\iint\limits_{Q_T}|\Delta u|\cdot|\Delta s|\,dx dt\,+$$

$$+(M_1M_2/2)\cdot\iint\limits_{Q_T}(\Delta u(x,t))^2 dx dt+\int\limits_0^1(\Delta u(x,T))^2\,dx\,. \tag{17}$$

Допустим, что процесс (u,s) – оптимальный. Докажем соотношение (14) от противного, т.е. что найдутся множество ненулевой меры $Q_\varepsilon\subset Q_T,\ mes\,Q_\varepsilon=$ $=\varepsilon>0$ и функция $\bar s(x,t),\ |\bar s(x,t)|\le 1$ такие, что

$$H(u(x,t),v(x,t),s(x,t))>H(u(x,t),v(x,t),\bar s(x,t))$$

при $(x,t)\in Q_\varepsilon$, где $\bar s(x,t)$ такова, что

$$H(u(x,t),v(x,t),\bar s(x,t))=\min_{|s'|\le 1}H(u(x,t),v(x,t),s')$$

почти всюду в Q_T.

Измеримость $\bar s(x,t)$ следует из замечания, если в качестве $h(x,t,s)$ взять $H(u(x,t),v(x,t),\,s)$. Можно указать такое натуральное число N и множество $Q_\varepsilon^N\subset Q_\varepsilon$, что

$$H(u(x,t),v(x,t),\bar s(x,t))-H(u(x,t),v(x,t),s(x,t))<-1/N \tag{18}$$

для $(x,t)\in Q_\varepsilon^N,\ mes\,Q_\varepsilon^N>0$.

Введем вспомогательное управление

$$s_N(x,t)=\begin{cases} s(x,t),\ (x,t)\in Q_T\setminus Q_\delta\,,\\ \bar s(x,t),\ (x,t)\in Q_\delta\,,\end{cases}$$

где $\quad Q_\delta \subset Q_\varepsilon^N, \ mes\, Q_\delta = \delta > 0.$

Так как по предположению S оптимально, то $\Delta J = J(S_N) - J(S) \geq 0$. Обозначим через $\Delta S_N = S_N - S$, $u + \Delta u$ решение задачи (2) при управлении S_N. Оценим сверху каждое слагаемое в (17):

$$\iint_{Q_T} \Delta_S H\,dx\,dt = \iint_{Q_\delta} \Delta_S H_S\,dx\,dt \leq -\delta/N.$$

Из неравенства Гельдера и леммы следуют неравенства

$$\iint_{Q_T} |\Delta u|\cdot|\Delta S_N|\,dx\,dt \leq \|\Delta u\|_{L_2(Q_T)}\cdot\|\Delta S_N\|_{L_2(Q_T)} \leq$$

$$\leq const\cdot\|\Delta S_N\|^{\frac{2p}{p+2}}_{L_p(Q_T)}\cdot\|\Delta S_N\|_{L_2(Q_T)} \leq const\cdot\delta^{\frac{p+6}{2(p+2)}},$$

$$\iint_{Q_T} (\Delta u(x,t))^2\,dx\,dt \leq const\cdot\|\Delta S_N\|^{\frac{4p}{p+2}}_{L_p(Q_T)} \leq const\cdot\delta^{\frac{4}{p+2}}.$$

Согласно (10), также имеем

$$\int_0^1 (\Delta u(x,T))^2\,dx \leq \max_{t\in[0,T]} \|\Delta u(x,t)\|^2_{2,\Omega} \leq const\cdot\|\Delta S_N\|^{\frac{4p}{p+2}}_{L_p(Q_T)} \leq const\cdot\delta^{\frac{4}{p+2}}.$$

Значит, для ΔJ справедлива следующая оценка:

$$\Delta J \leq -\frac{\delta}{N} + const\cdot\left(\delta^{\frac{p+6}{2(p+2)}} + \delta^{\frac{4}{p+2}}\right).$$

Для любых $p \in (1,2)$ и достаточно малых δ имеет место

$$\Delta J = J(S_N) - J(S) < 0.$$

Это противоречит предположению, что S оптимально.

2) Оценим снизу приращение функционала в окрестности произвольного $S(x,t)$. Пусть $u(x,t)$, $v(x,t)$ - соответствующие решения задач (2), (11), Δu, ΔS имеют прежний смысл.

Из (15) следует:

$$\Delta J = J(S+\Delta S) - J(S) = \iint_{Q_T} 2\beta S\cdot\Delta S + \beta(\Delta S)^2 +$$

$$+ v\cdot(f(u+\Delta u, S+\Delta S) - f(u,S) - f_u(u,S)\cdot\Delta u)]\,dx\,dt + \int_0^1 (\Delta u(x,T))^2\,dx. \quad (19)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$f(u+\Delta u, s+\Delta s)-f(u,s)-f_u(u,s)\Delta u=(\Delta u)^2\int_0^1\int_0^1 f_{uu}(u+\theta\theta_1\Delta u\,,$$

$$s+\Delta s)\cdot\theta d\theta d\theta_1+\Delta u\cdot\Delta s\cdot\int_0^1 f_{us}(u,s+\theta_1\Delta s)d\theta_1+(\Delta s)^2\times$$

$$\times\int_0^1\int_0^1 f_{ss}(u,s+\theta\theta_1\Delta s)\cdot\theta d\theta d\theta_1+f_s(u,s)\cdot\Delta s\,.$$

Тогда с учетом (13) и (19) справедливо неравенство

$$\Delta J\geqslant\iint_{Q_T}(v\cdot f_s(u,s)+2\beta s)\cdot\Delta s\,dxdt+\int_0^1(\Delta u(x,T))^2dx+$$

$$+\iint_{Q_T}\beta(\Delta s)^2dxdt-M_1((M_2/2)\cdot\iint_{Q_T}(\Delta u(x,t))^2dxdt+$$

$$+M_3\cdot\iint_{Q_T}|\Delta u|\cdot|\Delta s|\,dxdt+(M_4/2)\cdot\iint_{Q_T}(\Delta s)^2dxdt)\,. \tag{20}$$

Применяя оценку (10) с $p=2$, имеем

$$\Delta J\geqslant\iint_{Q_T}(v\cdot f_s(u,s)+2\beta s)\cdot\Delta s\,dxdt+\int_0^1(\Delta u(x,T))^2dx+$$

$$+[\beta-M_1(M_2D^2/2+M_3D+M_4/2)]\cdot\iint_{Q_T}(\Delta s(x,t))^2dxdt\geqslant$$

$$\geqslant\iint_{Q_T}H_s(u,v,s)\cdot\Delta s\,dxdt+\mu\cdot\|\Delta s\|^2_{L_2(Q_T)}\,. \tag{21}$$

Пусть теперь функции $u(x,t)$, $v(x,t)$, $s(x,t)$ удовлетворяют (2), (11) и (14). Покажем, что $\{u(x,t),\ s(x,t)\}$ есть оптимальный процесс в задаче управления (1)-(2).

Так как функция $H(u,v,s)$ дважды непрерывно дифференцируема, то в точках минимума по s при фиксированных u,v либо $H_s=0$ (если $|s|<1$), либо $H_s\cdot\Delta s\geqslant 0$ (если $|s|=1$), где Δs - произвольное допустимое приращение управления. Тогда почти всюду в Q_T выполнено

$$H_s(u,v,s)\cdot\Delta s=[v(x,t)\cdot f_s(u(x,t),s(x,t))+2\beta s(x,t)]\cdot\Delta s(x,t)\geqslant 0\,.$$

И из (21) получим, что $\Delta J \geq \mu \cdot \|\Delta S\|^2_{L_2(Q_T)} > 0$. Следовательно, $\{u(x,t),\ s(x,t)\}$ – оптимальный процесс.

Теорема доказана.

Предположим теперь, что параметры задачи (1)-(2) таковы, что $\mu(M, M_1, M_2, M_3, M_4, \beta, K, T) > 0$. Рассмотрим функцию $H(u,v,s) = v\cdot f(u,s) + \beta\cdot s^2$. Так как

$$2\mu = 2\beta - M_1(M_4 + M_2 D^2 + 2M_3 D) > 0,$$

то

$$2\beta - M_1 M_4 > M_1(M_2 D^2 + 2M_3 D) > 0.$$

Тогда

$$H_{ss}(u,v,s) = v\cdot f_{ss}(u,s) + 2\beta \geq 2\beta - M_1 M_4 > 0$$

для $\{(u,v,s) \mid |u| \leq M,\ |v| \leq M_1, |s| \leq 1\}$. Следовательно, $H(u,v,s)$ строго выпукла по s для (u,v,s) из этого множества, поэтому при каждом $(u,v) \in \{(u,v) : |u| \leq M, |v| \leq M_1\}$ существует единственная точка $\bar{s}(u,v) \in [-1,1]$, такая, что

$$H(u,v,\bar{s}(u,v)) = \min_{|\sigma|\leq 1} H(u,v,\sigma).$$

Нетрудно убедиться, что так определяемая функция $\bar{s}(u,v)$ является непрерывной в $\{(u,v) \mid |u| \leq M,\ |v| \leq M_1\}$. Рассмотрим задачу

$$\left.\begin{aligned} &u_t = u_{xx} + f(u,\bar{s}(u,v)),\\ &v_t = -v_{xx} - f_u(u,\bar{s}(u,v))\cdot v,\\ &u(x,0) = u^0(x),\\ &v(x,t) = 2(u(x,T) - u_1(x)),\\ &u(0,t) = u(1,t) = v(0,t) = v(1,t) = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

Подобные постановки краевых задач для линейных уравнений второго порядка в банаховом пространстве рассмотрены, например, в книге Крейна С.Г. [12, гл.3].

Т е о р е м а 2. Пусть $\mu > 0$ (константа μ определена условием 2 теоремы 1). В прежних предположениях относительно $f(u,s)$, $u^0(x)$, $u_1(x)$ существует единственное классическое решение задачи (22).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зададим функции $\varphi(x,t), \psi(x,t) \in C(Q_T)$.

$$\varphi(0,t) = \varphi(1,t) = \psi(0,t) = \psi(1,t) = 0.$$

Рассмотрим задачу

$$\left.\begin{aligned} &u_t - u_{xx} = f(u, \bar{s}(\varphi, \psi)), \\ &v_t + v_{xx} = -f_u(u, \bar{s}(\varphi, \psi)) \cdot v, \\ &u(x,0) = u^0(x), \\ &v(x,T) = 2(u(x,T) - u_1(x)), \\ &u(0,t) = u(1,t) = v(0,t) = v(1,t) = 0 . \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

В силу предположения о функции $f(u,s)$ при каждом φ, ψ таком, что $|\varphi|_C \leq M$, $|\psi|_C \leq M_1$, существует единственное классическое решение этой задачи [9, с. 32]. Следовательно, определен оператор $\mathcal{A} : C(Q_T) \times C(Q) \to C(Q_T) \times C(Q_T)$, ставящий в соответствие паре функций $(\varphi, \psi) \overset{def}{=} \vec{g}$ пару $(u, v) \overset{def}{=} \mathcal{A}\vec{g}$, - решение задачи (23). Обозначим через $\|\vec{g}\|_C = |\varphi|_C + |\psi|_C$ норму в $C(Q_T) \times C(Q_T)$. Из оценок (3),(12) следует, что $|u|_C \leq M$, $|v|_C \leq M_1$. Значит, оператор $\mathcal{A}$ переводит множество $\Pi = \{(\varphi, \psi) \mid |\varphi|_C \leq M, |\psi|_C \leq M_1\}$ в себя. Будем рассматривать оператор $\mathcal{A}$ на множестве Π.

Пусть $\vec{g}_n, \vec{g} \in \Pi$, $\vec{g}_n = (\varphi_n, \psi_n)$, $(u_n, v_n) = \mathcal{A}\vec{g}_n$, $\vec{g} = (\varphi, \psi)$, $(u, v) = \mathcal{A}\vec{g}$ и $\lim\limits_{n \to \infty} \|\vec{g}_n - \vec{g}\|_C = 0$. Разность $(u - u_n)$ удовлетворяет соотношениям:

$$(u - u_n)_t = (u - u_n)_{xx} + f(u, \bar{s}(\varphi, \psi)) - f(u_n, \bar{s}(\varphi_n, \psi_n)) =$$

$$= (u - u_n)_{xx} + \left[\int_0^1 f_u(u_n + \theta(u - u_n)), \bar{s}(\varphi_n, \psi_n))\, d\theta\right](u - u_n) +$$

$$+ f(u, \bar{s}(\varphi, \psi)) - f(u, \bar{s}(\varphi_n, \psi_n)),$$

$$u(x,0) - u_n(x,0) = 0, \; u(0,t) - u_n(0,t) = u(1,t) - u_n(1,t) = 0.$$

Так как при всех n

$$\left| \int_0^1 f_u(u_n + \theta(u - u_n)), \bar{s}(\varphi_n, \psi_n))\, d\theta \right| \leq K$$

в Q_T, то в силу принципа максимума для параболических уравнений (см. напр., [13, С.61]) справедлива оценка

$$|u - u_n|_{C(Q_T)} \leq 2e^{KT} \cdot |f(u, \bar{s}(\varphi, \psi)) - f(u, \bar{s}(\varphi_n, \psi_n))|_{C(Q_T)}. \qquad (24)$$

Так как $\bar{s}(\varphi', \psi')$ равномерно непрерывна в прямоугольнике

$$\{(\varphi', \psi') : |\varphi'| \le M, |\psi'| \le M_1\}$$

и функции φ_n, ψ_n сходятся к φ, ψ в $C(Q_T)$ при $n \to \infty$, то $\bar{s}(\varphi_n, \psi_n) \to \bar{s}(\varphi, \psi)$ равномерно в Q_T при $n \to \infty$. Тогда вследствие равномерной непрерывности $f(u, s)$ по совокупности переменных в $[-M, M] \times [-1, 1]$ последовательность $f(u, \bar{s}(\varphi_n, \psi_n))$ также сходится к $f(u, \bar{s}(\varphi, \psi))$ равномерно в Q_T при $n \to \infty$. Теперь, воспользовавшись (24), получим, что

$$\lim_{n \to \infty} |u - u_n|_{C(Q_T)} = 0.$$

Функция $v - v_n$ удовлетворяет уравнению

$$(v - v_n)_t = -(v - v_n)_{xx} - f_u(u, s(\varphi, \psi)) \cdot v + f_u(u_n, \bar{s}(\varphi_n, \psi_n)) \cdot v_n =$$

$$= -(v - v_n)_{xx} - f_u(u_n, \bar{s}(\varphi_n, \psi_n))(v - v_n) + [f_u(u_n,$$

$$\bar{s}(\varphi_n, \psi_n)) - f_u(u, \bar{s}(\varphi, \psi))] \cdot v$$

и краевым условиям $v(x,T) - v_n(x,T) = 2(u(x,T) - u_n(x,T))$, $v(0,t) - v_n(0,t) = v(1,t) - v_n(1,t) = 0$. Так как $|f_u(u_n, \bar{s}(\varphi_n, \psi_n))| \le K$ в Q_T $\forall n$, то из [13, с.61] и соотношения (12) имеем:

$$|(v - v_n)|_{C(Q_T)} \le 2e^{KT}(|2(u(x,T) - u_n(x,T))|_{C[0,1]} +$$

$$+ |f_u(u_n, \bar{s}(\varphi_n, \psi_n)) - f_u(u, \bar{s}(\varphi, \psi))|_{C(Q_T)} \cdot M_1).$$

Так как $u_n, \bar{s}(\varphi_n, \psi_n)$ сходятся в $C(Q_T)$ соответственно к u и $\bar{s}(\varphi, \psi)$ при $n \to \infty$ и так как $f_u(\cdot, \cdot)$ в $[-M, M] \times [-1, 1]$ равномерно непрерывна, то $|f_u(u_n, \bar{s}(\varphi_n, \psi_n)) - f_u(u, \bar{s}(\varphi, \psi))|_C \to 0$ при $n \to \infty$. Значит,

$$\lim_{n \to \infty} |v - v_n|_C = 0 \quad \text{и} \quad \|\lim_{n \to \infty} A\vec{g} - A\vec{g}\|_C = 0,$$

т.е. A непрерывен.

Обозначим через $|\cdot|_\alpha$ и $|\cdot|_\alpha^{[0,1]}$ нормы в гельдеровых классах $H^{\alpha, \alpha/2}(Q_T)$ и $H^\alpha[0,1]$ соответственно. Применим к классическому решению задачи (23) оценки в нормах $W_2^{2,1}(Q_T)$, следующие из [10. с.157]:

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(Q_T)} \le C(\|u^0\|_{W_2^1[0,1]} + \|f(u, \bar{s}(\varphi, \psi))\|_{L_2(Q_T)}),$$

$$\|v\|_{W_2^{2,1}(Q_T)} \le C(\|2(u(x,T) - u_1(x))\|_{W_2^1[0,1]} + \|f_u(u, \bar{s}(\varphi, \psi)) \cdot v\|_{L_2(Q_T)}).$$

Очевидно, что

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(Q_T)},\ \|v\|_{W_2^{2,1}(Q_T)} \leq const,$$

где постоянная не зависит от φ и ψ.

Из леммы 3.1 [8, с.241] следует существование таких чисел C' и α, $0<\alpha<1$, что

$$|u|_{\alpha} \leq C'\|u\|_{W_2^{2,1}(Q_T)} \leq const,$$

и

$$|v|_{\alpha} \leq C'\|v\|_{W_2^{2,1}(Q_T)} \leq const.$$

Из этих оценок и из компактности вложения $H^{\alpha}(Q_T)$ в $C(Q_T)$ следует компактность оператора A.

Тогда в силу принципа Шаудера существует неподвижная точка оператора A, которая и будет решением задачи (22). Докажем единственность решения задачи (22).

Допустим, что существуют два решения (u_1, v_1) и (u_2, v_2).

Тогда по теореме 1 функции $S_1(x,t) \equiv \bar{S}(u_1(x,t), v_1(x,t))$ и $S_2(x,t) \equiv \bar{S}(u_2(x,t), v_2(x,t))$ являются оптимальными управлениями в задаче (1)-(2).

Воспользуемся оценкой (21 и запишем:

$$0 = J(S_1) - J(S_2) \geq \iint\limits_{Q_T} H_S(u_2, v_2, S_2)(S_1 - S_2)\,dx\,dt +$$

$$+\mu \iint\limits_{Q_T} (S_1 - S_2)^2\,dx\,dt \geq \mu \iint\limits_{Q_T} (S_1 - S_2)^2\,dx\,dt,$$

где u_2, v_2 - решения краевых задач (2) и (11) при управлении S_2. Отсюда ясно, что функции S_1 и S_2 тождественно совпадают, так как они непрерывны. Тогда в силу однозначной разрешимости задач (2) и (11) $u_1 \equiv u_2$, $v_1 \equiv v_2$ при фиксированном S.

Теорема доказана.

Поступила в ред.-изд. отдел
8 июня 1987 г.

Литература

1. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. - М.: Наука, 1965. - 474 с.

2. Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. - М.: Наука, 1978. - 463 с.

3. Новоженов М.М., Плотников В.И. Обобщенное правило множителей Лагранжа для распределенных систем с фазовыми ограничениями // Дифференц. уравнения. - 1982. - Т.18. № 4. - С. 584-592.

4. Новоженов М.М. Необходимые условия в задаче оптимизации параболической системы // Дифференц. уравнения и мат. физика. - Куйбышев: КГПИ, 1985. - С. 91-94.

5. Пукальский И.Д., Матийчук М.И. О применениях функций Грина параболических краевых задач к задачам оптимального управления // Укр. мат. журн. - 1985. - 37. № 6. - С. 738-744.

6. Плотников В.И. Необходимые и достаточные условия оптимальности и условия единственности оптимизирующих функций для управляемых систем общего вида // Изв. АН СССР. Сер. матем. - 1972. - 36. - С. 652-679.

7. Проворова О.Г. К вопросу об управлении процессом, описываемым почти-линейным параболическим уравнением // Управляемые системы. - Новосибирск. - 1975. - Вып. 14. - С. 34-39.

8. Кружков С.Н. Квазилинейные параболические уравнения и системы с двумя независимыми переменными // Тр. семинара им. И.Г.Петровского/. МГУ.- 1979. - Вып. 5. - С. 217-272.

9. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. - М.: Наука, 1967. - 736 с.

10. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. - М.: Наука, 1973. - 407 с.

11. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. - М : Наука, 1985. - 224 с.

12. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. - М.: Наука, 1967. - 464 с.

13. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. - М.: Мир, 1968. - 426 с.