Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1989 г., вып. 29.

УДК 519.8

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО КЛАССА РАЗБИЕНИЙ В ЦЕЛОЧИСЛЕННОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

Л.А.Сайко

В настоящее время для исследования задач и методов целочисленного программирования (ЦП) развивается подход, связанный с использованием специальных разбиений конечномерного пространства [1-6]. На его основе описаны новые классы алгоритмов и отсечений, построены оценки числа итераций (отсечений) для ряда процессов, изучена структура некоторых задач ЦП, разработано программное обеспечение и проведены экспериментальные расчеты на ЭВМ. Наибольшее внимание в указанных работах уделялось L-разбиению, согласованному с лексикографическим порядком. Исследовались и другие разбиения, в частности, кубические, порождаемые различными округлениями векторов. Они использовались для построения верхних оценок числа итераций 1-го алгоритма Гомори [7] и оценки мощности L-накрытий задач ЦП [1], анализировалась их связь с L-разбиениями [1].

Данная работа посвящена дальнейшему изучению кубических разбиений. Рассматривается вопрос об отделимости элемента кубического разбиения, содержащего оптимальное решение непрерывной задачи (лексикографически максимальную точку), от области соответствующей задачи ЦП с помощью системы линейных неравенств. Устанавливается зависимость минимальной мощности такой системы от структуры булева вектора, определяющего кубическое разбиение, строятся верхние оценки указанного минимума, выделяются разбиения, для которых всегда существует одно отделяющее неравенство. Изучается возможность применения известных отсечений для исключения элементов кубических разбиений. Краткое сообщение о некоторых из полученных результатов имеется в [4,8].

§ 1. Применение разбиений для анализа алгоритмов ЦП

Пусть Z^n - множество всех целочисленных векторов n-мерного вещественного пространства R^n и $\mathcal{F}$ - некоторое разбиение R^n на классы эквивалентности. Для произвольного $S \subseteq R^n$ через $S/\mathcal{F}$ обозначим фактор-множество, порождаемое $\mathcal{F}$. В указанном подходе используются разбиения, удовлетворяющие следующим условиям:

1) каждая точка $z \in Z^n$ образует отдельный класс разбиения, остальные классы состоят только из нецелочисленных точек;

2) если S - ограниченное множество, то $S/\mathcal{F}$ - конечное;

3) $(S+z)/\mathcal{F} = S/\mathcal{F} + z$ для всех $z \in Z^n$ и $S \subseteq R^n$. Элементы из $S/\mathcal{F}$ называются $\mathcal{F}$-классами, а $\mathcal{F}$-классы, содержащие нецелочисленные точки, - дробными.

Наиболее изученным среди разбиений такого типа является L-разбиение, которое определяется следующим образом: точки x, y из R^n $(x \succ y)$ принадлежат одному классу, если не существует $z \in Z^n$ такой, что $x \succcurlyeq z \succcurlyeq y$. Здесь "$\succ$" - знак лексикографического сравнения. Любой дробный L-класс множества $S \subseteq R^n$ можно записать в виде

$$V = \{x : x_i = a_i,\ i = 1,\dots,r-1;\ a_r < x_r < a_r + 1\} \cap S,$$

где a_i - некоторое целое число, $i = 1,\dots,r$, $r \in \{1,\dots,n\}$. Номер r называется рангом L-класса. Пусть S и S' - непустые множества из R^n. Будем считать, что S лексикографически больше S', ($S \succ S'$), если для всех $x \in S$, $x' \in S'$ выполнено $x \succ x'$. Для элементов S/L это отношение является линейным порядком. Данное свойство называется согласованностью разбиения с лексикографическим порядком. Если S ограничено, то S/L - конечное множество и его можно записать следующим образом:

$$S/L = \{V_1,\dots,V_p\},\quad V_i \succ V_{i+1},\ i = 1,\dots,p-1 .$$

Пусть K^n - класс всех замкнутых множеств из R^n, имеющих лексикографически максимальный элемент, а K - некоторое подмножество K^n. Для $\Omega \in K$ рассматривается задача ЦП: найти

$$z^* = \operatorname{lex\,max}(\Omega \cap Z^n) . \tag{1.1}$$

При ее решении различными методами ЦП, основанными на аппарате непрерывной оптимизации (алгоритмы отсечения, ветвей и границ и др.) из Ω требуется исключить множество

$$\Omega_* = \{x \in \Omega \mid x \succ z \quad \text{для всех} \quad z \in \Omega \cap Z^n\},$$

которое называется дробным накрытием задачи. Если $\Omega \cap Z^n = \emptyset$, то Ω_* совпадает с Ω. Множество $\Omega_*/\mathcal{F}$ называется $\mathcal{F}$-накрытием, его мощность обозначается через $|\Omega_*/\mathcal{F}|$.

Предположим, что $\bar{x} = \operatorname{lex\,max}\Omega$, $\bar{x} \notin Z^n$, и $W_{\bar{x}}(\Omega)$ - элемент из $\Omega_*/\mathcal{F}$, содержащий $\bar{x}$. Нетрудно привести примеры множеств Ω и оценочных разбиений, для которых с помощью одного правильного линейного неравенства (отсечения) нельзя "отрезать" от Ω все точки множества

$W_{\bar{x}}(\Omega)$. Поэтому возникает необходимость рассмотрения системы линейных неравенств:

$$\gamma^i x \leq \gamma_0^i, \quad i = \overline{1,m}. \tag{1.2}$$

Система (1.2) называется $\mathcal{F}$-регулярной, если

1) для любого $x' \in W_{\bar{x}}(\Omega)$ существует номер $K \in \{1,\ldots,\bar{m}\}$ такой, что $\gamma^K x' > \gamma_0^K$;

2) $\gamma^i z \leq \gamma_0^i$ для всех $z \in \Omega \cap \mathbf{Z}^n$, $i = \overline{1,m}$.

Далее нас будет интересовать вопрос о минимальной мощности $\mathcal{F}$-регулярной системы для заданного класса множеств K, т.е. минимальное число неравенств, достаточное для исключения $W_{\bar{x}}(\Omega)$ произвольного множества из K. Это число мы назовем индексом разбиения $\mathcal{F}$ для K и обозначим $I_{\mathcal{F}}(K)$. В случае L-разбиения при достаточно широких предположениях о классе K $I_L(K) = 1$. Для других разбиений картина более разнообразна. Это относится и к изучаемым в следующих параграфах кубическим разбиениям. Там в качестве K будет выбран класс K_0^n ограниченных сверху множеств, определяемых следующим образом: для любого $\Omega \in K_0^n$ найдется вектор d такой, что $x \leq d$ для всех $x \in \Omega$. Используя предложенные А.А.Колоколовым L-регулярные отсечения вида

$$\sum_{i=1}^{\varphi(\bar{x})-1} \alpha^{\varphi(\bar{x})-i} x_i + x_{\varphi(\bar{x})} \leq \sum_{i=1}^{\varphi(\bar{x})-1} \alpha^{\varphi(\bar{x})-i} \bar{x}_i + \lfloor \bar{x}_{\varphi(\bar{x})} \rfloor, \tag{1.3}$$

где

$$\alpha \geq 1 + \max\{|d_i - \bar{x}_i| : i = \overline{1,n}\},\ \varphi(x) = \min\{i : x_i \neq \lfloor x_i \rfloor,\ i = \overline{1,n}\},$$

нетрудно показать, что для любого оценочного разбиения $I_{\mathcal{F}}(K_0^n) \leq n$. Здесь $\lfloor a \rfloor$ обозначает нижнюю целую часть числа a. Следует отметить, что (1.3) является непосредственным обобщением L-регулярных отсечений из [1], описанных для ограниченных множеств. L-регулярными являются некоторые отсечения Гомори, ρ-отсечения и др. [1].

Пусть $\Omega \in K^n$, $\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(\Omega)$ - число L-регулярных отсечений, порождаемых дробным процессом $\mathcal{D}$ при решении задачи (1.1) для Ω. Имеет место оценка [1]:

$$\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(\Omega) \leq |\Omega_* / L|. \tag{1.4}$$

Для произвольного оценочного разбиения это соотношение доказано при условии сохранения всех отсечений. В терминах $\mathcal{F}$-накрытий построены и нижние оценки числа отсечений [3].

§ 2. Кубические разбиения

Пусть B^n - множество всех n-мерных булевых векторов и δ - некоторый элемент B^n. Каждому $x \in R^n$ поставим в соответствие целочисленный вектор $\delta(x) = (\delta_1(x), \ldots, \delta_n(x))$, где

$$\delta_i(x) = \begin{cases} \lfloor x_i \rfloor & \text{, если } \delta_i = 0 , \\ \lceil x_i \rceil & \text{, если } \delta_i = 1 . \end{cases}$$

Здесь $\lceil a \rceil$ обозначает верхнюю целую часть числа a. Кубическое разбиение, порождаемое булевым вектором δ и для удобства обозначаемое далее этим же символом, вводится следующим образом:

1) каждая точка $z \in \mathbb{Z}^n$ образует отдельный класс;

2) нецелочисленные точки x, y из R^n принадлежат одному классу, если $\delta(x) = \delta(y)$. Его элементы будут называться δ-классами. В R^2 дробные классы этого разбиения представляют собой полузамкнутые квадраты, в R^3 - полузамкнутые кубы и т.д. Очевидно, что кубические разбиения принадлежат классу разбиений, описанных в § 1.

В [1] показано, что любой дробный класс W кубического разбиения R^n содержит ровно n L-классов, т.е.

$$W/L = \{V_1, \ldots, V_n\} .$$

Отсюда и из оценки (1.4) для числа L-регулярных отсечений дробного процесса $\mathcal{D}$ получается оценка

$$\mathcal{I}_{\mathcal{D}}(\Omega) \leq n\,|\Omega_*/\delta| .$$

Пусть a - некоторый целочисленный вектор, $\delta \in B^n$. Рассмотрим дробный класс W из R^n, определяемый условием $\delta(x) = a$. Выберем $V \in W/L$ и обозначим $\omega = \varphi(x)$ для $x \in V$. Используя представление L-класса R^n, приведенное в § 1, легко получить описание V в виде системы условий:

$$\begin{array}{lll} x_j = a_j & \text{для } j < \omega , & \\ a_j < x_j < a_j + 1 & \text{для } j = \omega , & \text{если } \delta_\omega = 0 , \\ a_j - 1 < x_j < a_j & \text{для } j = \omega , & \text{если } \delta_\omega = 1 , \\ a_j \leq x_j < a_j + 1 & \text{для } j > \omega , & \text{если } \delta_j = 0 , \\ a_j - 1 < x_j \leq a_j & \text{для } j > \omega , & \text{если } \delta_j = 1 . \end{array} \tag{2.1}$$

Ниже будет указан способ выписывания элементов W/L в порядке лексикографического убывания:

$$V_1 \succ V_2 \succ \ldots \succ V_n . \tag{2.2}$$

Введем следующие обозначения:

n^0 и n_0^{τ} - число компонент δ_j, равных нулю, для $j=\overline{1,n}$ и $j \leq \tau$ соответственно,

n_1^{τ} - число компонент δ_j, равных единице, для $j \geq \tau$;

$K(\tau)$ - номер L -класса V из W/L в последовательности (2.2), у которого ранг равен τ.

Приведем утверждение, позволяющее определить $K(\tau)$, исходя из структуры вектора δ.

Утверждение. Пусть V из W/L имеет ранг τ, тогда

$$K(\tau)=\begin{cases} n_0^{\tau}, & \text{если } \delta_{\tau}=0, \\ n_0+n_1^{\tau}, & \text{если } \delta_{\tau}=1. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $p,q\in\{1,\dots,n\}$ и $V_{K(p)}$, $V_{K(q)}$ - элементы W/L, ранги которых соответственно равны p и q. Отметим, что все V_j, $j=\overline{1,n}$, в (2.2) имеют различные ранги. Сравним величины $K(p)$ и $K(q)$ в зависимости от значений координат δ_p и δ_q. Предположим, что $x\in V_{K(p)}$, $y\in V_{K(q)}$. Рассмотрим три случая.

1). Пусть $\delta_p=0$, $\delta_q=1$. При $p<q$ из $\delta(x)=\delta(y)$ получаем: $x_j=y_j$ для $j<p$, $\lfloor x_p\rfloor=y_p$. Так как $x_p\notin \mathbf{Z}$, то $y_p<x_p<y_p+1$. Значит, $x\succ y$. Пусть $p>q$, тогда аналогично получаем $x_j=y_j$ для $j<q$, $x_q=\lceil y_q\rceil$, $y_q\notin \mathbf{Z}$. Следовательно, $x\succ y$. Полученное соотношение означает, что $V_{K(p)}\succ$ $\succ V_{K(q)}$. Таким образом, если $\delta_{\tau}=0$, то $K(\tau)\in\{1,\dots,n_0\}$.

2). Пусть $\delta_p=0$, $\delta_q=0$ и $p<q$. Из $\delta(x)=\delta(y)$ получаем $x_j=y_j$ для $j<p$, $\lfloor x_p\rfloor=y_p$, $x_p\notin \mathbf{Z}$. Отсюда $x\succ y$, т.е. $V_{K(p)}\succ V_{K(q)}$ и, значит, $K(p)<K(q)$. Для V из W/L ранга τ, такого, что $\delta_{\tau}=0$, с учетом 1 имеем $K(\tau)=n_0^{\tau}$.

3). Пусть $\delta_p=1$, $\delta_q=1$ и $p<q$. Соотношения на компоненты x и y имеют вид $x_j=y_j$ для $j<p$, $\lceil x_p\rceil=y_p$, $x_p\notin \mathbf{Z}$. Очевидно, что $y\succ x$, т.е. $V_{K(q)}\succ V_{K(p)}$, а следовательно, $K(q)<K(p)$. Отсюда и из 1 получаем, что для V из W/L ранга τ выполнено $K(\tau)=n_0+n_1^{\tau}$. На этом доказательство завершается.

Рассмотрим иллюстративный пример. Пусть $\delta=(0,1,1,0,0)^T$, $a=(4,3,0,1,9)^T$. Используя утверждение, получаем номера L -классов в последовательности (2.2) в зависимости от значения ранга:

$$K(1)=1,\ K(2)=5,\ K(3)=4,\ K(4)=2,\ K(5)=3.$$

Вид L -класса ранга τ дает система (2.1).

§ 3. Классификация кубических разбиений

В данном параграфе будет получено значение индекса кубического разбиения, которое определяется структурой порождающего его булева вектора. Используя формулу для вычисления индекса, легко оценить его сверху, а также описать кубические разбиения для фиксированного значения индекса, в частности, равного единице.

Т е о р е м а. Для класса множеств K_0^n индекс кубического разбиения δ равен $q+1$, где q - число пар компонент вектора δ, удовлетворяющих условию: $\delta_i = 0,\ \delta_{i+1} = 1,\ (1 \leq i \leq n-2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $i_1, \ldots, i_q$ номера компонент вектора δ, равных нулю, в выделенных парах. Тогда его структура может быть описана следующим образом:

$$\delta = (\sigma_1, \underset{i_1}{0}, 1, \sigma_2, \underset{i_2}{0}, 1, \ldots, \sigma_q, \underset{i_q}{0}, 1, \sigma_{q+1}, \sigma_{q+2}),$$

где $\sigma_t\ (t = \overline{1, q+1})$ - невозрастающая последовательность из нулей и единиц, $\sigma_{q+2} \in \{0,1\}$. Пусть $\Omega \in K_0^n$, $\bar{x} = \operatorname{lex\,max} \Omega$, $\delta(\bar{x}) = a$. Через $W_{\bar{x}}$ обозначим элемент Ω_*/δ, содержащий $\bar{x}$, а через V_j - элементы $W_{\bar{x}}/L$, упорядоченные по убыванию, $j = \overline{1,S}$, $S = |W_{\bar{x}}/L| \leq n$. Пусть минимальный номер дробной компоненты для x из V_S равен p, т.е. $\varphi(x) = p$, а число индексов из множества $\{i_1, \ldots, i_q\}$, меньших p, равно K. Рассмотрим систему L-регулярных отсечений, построенных для L-классов V_j, $j \in \{1, \ldots, S\}$, имеющих ранги $i_1, \ldots, i_K, p$ на основе (1.3):

$$\sum_{i=1}^{v-1} \alpha^{v-i} x_i + x_v \leq \sum_{i=1}^{v-1} \alpha^{v-i} a_i + \tilde{a}_v, \quad v \in \{i_1, \ldots, i_K, p\}, \tag{3.1}$$

где

$$\tilde{a}_v = \begin{cases} a_v & \text{, если } \delta_v = 0, \\ a_v - 1 & \text{, если } \delta_v = 1. \end{cases}$$

Покажем, что система (3.1) регулярна относительно кубического разбиения δ. Так как это система правильных отсечений, построенных по точкам, лексикографически большим z^*, то условие сохранения целочисленных точек выполнено. Проверим условие отсечения $W_{\bar{x}}$: для любой точки $\tilde{x} \in W_{\bar{x}}$ существует номер $v \in \{i_1, \ldots, i_K, p\}$ такой, что

$$\sum_{i=1}^{v} \alpha^{v-i} \tilde{x}_i > \sum_{i=1}^{v-1} \alpha^{v-i} a_i + \tilde{a}_v .$$

Будем считать, что $\varphi(\tilde{x}) \notin \{i_1, \ldots, i_K, p\}$, так как иначе точка $\tilde{x}$ от-

секается по построению. Рассмотрим два случая.

1) Пусть $\delta_p = 0$. Из утверждения § 2 следует, что для $\tilde{x} \in V_j$ $j = \overline{1, S-1}$, выполнены соотношения $\varphi(\tilde{x}) < p$ и $\delta_{\varphi(\tilde{x})} = 0$. Таким образом, $\delta_{\varphi(\tilde{x})}$ есть компонента некоторого σ_ℓ, $\ell \in \{1,\dots,K+1\}$. В этом случае точка $\tilde{x}$ исключается неравенством

$$\sum_{i=1}^{v} d^{v-i} x_i \le \sum_{i=1}^{v} d^{v-i} a_i ,$$

где $v = i_\ell$, если $\ell \in \{1,\dots,K\}$, и $v = p$, если $\ell = K+1$. Это следует из соотношений для компонент $\tilde{x}$:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_j &= a_j && \text{для} \quad j < \varphi(\tilde{x}), \\ a_j < \tilde{x}_j &< a_j + 1 && \text{для} \quad j = \varphi(\tilde{x}), \\ a_j \le \tilde{x}_j &< a_j + 1 && \text{для} \quad \varphi(\tilde{x}) < j < v. \end{aligned}$$

2) Пусть $\delta_p = 1$. Если $\varphi(\tilde{x}) < p$, то, по утверждению из § 2, $\delta_{\varphi(\tilde{x})} = 0$ является компонентой некоторого σ_ℓ, $\ell \in \{1,\dots,\varkappa, q+1\}$. Для $\ell = \overline{1,K}$ аналогично 1 имеем $v = i_\ell$. Пусть $\ell = q+1$, тогда $p = n$. Рассмотрим неравенство из системы (3.1) с номером $v = p$:

$$\sum_{i=1}^{n} d^{n-i} x_i \le \sum_{i=1}^{n-1} d^{n-i} a_i + a_n - 1 .$$

Для компонент вектора $\tilde{x}$ выполнены условия:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_j &= a_j && \text{для} \quad j < \varphi(\tilde{x}), \\ a_j < \tilde{x}_j &< a_j + 1 && \text{для} \quad j = \varphi(\tilde{x}), \\ a_j \le \tilde{x}_j &< a_j + 1 && \text{для} \quad \varphi(\tilde{x}) < j < n, \\ a_j - 1 < \tilde{x}_j &\le a_j && \text{для} \quad j = n. \end{aligned}$$

Очевидно, что $\tilde{x}$ не удовлетворяет указанному неравенству. Если $\varphi(\tilde{x}) > p$, то $\tilde{x}$ нарушает неравенство с номером p, так как $\tilde{x}_j = a_j$, $j = \overline{1,p}$.

Таким образом, мы показали, что система (3.1) регулярна относительно кубического разбиения δ. Ее размерность равна $K+1$, где $K \le q$. Отсюда получаем следующую оценку:

$$I_\delta(K_0^n) \le q + 1 . \tag{3.2}$$

Покажем теперь, что $q+1$ есть точное значение индекса. Для этого построим множество Ω, на котором полученная оценка достигается. Сделаем это сначала для δ специального вида:

$$\delta = (0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1, \delta_n)^T ,$$

где $\delta_n \in \{0,1\}$, n - нечетное. Для других δ построение ведется аналогично. Для этого разбиения неравенство (3.2) имеет вид $I_\delta(K_0^n) = \ell + 1$, где $\ell = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Рассмотрим множество Ω, полученное как выпуклая оболочка точек:

$$\omega^p = (0,1,\ldots,0,\underset{2p}{1},1/2,\ldots,1/2)^T, \ p = \overline{0,\ell},$$

$$z_i^p = (0,1,\ldots,0,\underset{2p}{1},0,\ldots,0,\underset{2(p+1)+i}{1},0,\ldots,0)^T, \ p = \overline{0,\ell-1}, \ i = \overline{0,n-2p-2},$$

$$0 = (0,0,\ldots,0)^T.$$

Очевидно, что $\Omega \subset B^n$. Вершинами многогранника Ω могут быть только точки из числа указанных, поэтому $\bar{x} = \omega^0$, где $\bar{x} = \operatorname{lex\,max} \Omega$. Вектор $z_0^{\ell-1} = (0,1,0,1,\ldots,0,1,0)^T$ является лексикографически максимальным среди z_i^p, $p = \overline{0,\ell-1}$, $i = \overline{0,n-2p-2}$, т.е. $z^* = z_0^{\ell-1} = \operatorname{lex\,max}(\Omega \cap Z^n)$.

Отметим, что $\omega^p \succ z^*$, $p = \overline{0,\ell}$, причем точки ω^p принадлежат различным L-классам из $W_{\bar{x}}/L$. Кроме этих L-классов в δ-классе пространства, содержащем $W_{\bar{x}}$, находится еще $n - \ell - 1$ дробных L-классов. Точка $\tilde{x}$, принадлежащая любому из них, удовлетворяет условиям:

$\tilde{x}_i = 0$ для $i < \varphi(\tilde{x})$ нечетных,

$\tilde{x}_i = 1$ для $i < \varphi(\tilde{x})$ четных,

$0 < \tilde{x}_{\varphi(\tilde{x})} < 1$, причем $\varphi(\tilde{x})$ четное.

Очевидно, что $\tilde{x} \prec z^*$. Таким образом, $W_{\bar{x}} = \bigcup_{j=0}^{\ell} V_j$ и $|W_{\bar{x}}/L| = \ell + 1$. Здесь V_j обозначает элемент L-разбиения $W_{\bar{x}}$, содержащий точку ω^j, $j = \overline{0,\ell}$.

Предположим, что существует регулярная система неравенств

$$\gamma^i x \le \gamma_0^i, \quad i = 1,\ldots,m, \tag{3.3}$$

где $m < \ell + 1$. Рассмотрим ℓ отрезков, соединяющих точки z_0^{j-1} и ω^j, $j = \overline{1,\ell}$, и отрезок $[0, \omega^0]$. Каждый из указанных отрезков принадлежит своему элементу множества $W_{\bar{x}}/L$. Возьмем бесконечную последовательность точек $\{v^j(\alpha)\}$, $\alpha = 2,3,\ldots$, $j = \overline{0,\ell}$, лежащих на этих отрезках;

$$v^0(\alpha) = \left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}, \ldots, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right)^T,$$

$$v^1(\alpha) = \left(0, 1, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}, \ldots, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right)^T,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$v^\ell(\alpha) = \left(0, 1, 0, 1, \ldots, 0, 1, \frac{1}{\alpha}\right)^T.$$

Очевидно, что $v^j(\alpha) \in V_j$, $j = \overline{0,\ell}$. Так как $m < \ell + 1$, то для каждого значения α среди точек $v^0(\alpha), \ldots, v^\ell(\alpha)$ существуют две, которые исключаются одним и тем же неравенством системы (3.3). Отсюда следует, что найдется неравенство с номером $K \in \{1, \ldots, m\}$

$$\gamma^K x \le \gamma_0^K \quad , \tag{3.4}$$

бесконечная подпоследовательность

$$\{v^0(\alpha_i), \ldots, v^\ell(\alpha_i)\}, \; i = 1, 2, \ldots,$$

и такие номера s и t, что указанное неравенство исключает точки $v^s(\alpha_i)$, $v^t(\alpha_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ ($s < t$, $s, t \in \{0, \ldots, \ell\}$). Далее индекс K ради простоты будем опускать. Подставим в (3.4) $v^s(\alpha_i)$ и $v^t(\alpha_i)$, $i = 1, 2, \ldots$

$$\gamma_2 + \gamma_4 + \ldots + \gamma_{2s} + \frac{\gamma_{2s+1} + \ldots + \gamma_n}{\alpha_i} > \gamma_0, \; i = 1, 2, \ldots \tag{3.5}$$

$$\gamma_2 + \gamma_4 + \ldots + \gamma_{2s} + \ldots + \gamma_{2t} + \frac{\gamma_{2t+1} + \ldots + \gamma_n}{\alpha_i} > \gamma_0, \; i = 1, 2, \ldots \tag{3.6}$$

Условия сохранения целочисленных точек z_0^{s-1}, z_0^{t-1} и 0 дают следующие соотношения:

$$\gamma_2 + \gamma_4 + \ldots + \gamma_{2s} \le \gamma_0 \quad , \tag{3.7}$$

$$\gamma_2 + \gamma_4 + \ldots + \gamma_{2s} + \ldots + \gamma_{2s+2} + \ldots + \gamma_{2t} \le \gamma_0 , \tag{3.8}$$

$$0 \le \gamma_0 \tag{3.9}$$

Так как

$$\lim_{i \to \infty} \frac{\gamma_{2s+1} + \ldots + \gamma_n}{\alpha_i} = 0 ,$$

то из (3.5), (3.7) и (3.9) имеем

$$\gamma_0 = \gamma_2 + \gamma_4 + \ldots + \gamma_{2s} \tag{3.10}$$

Из (3.6), (3.8) и (3.10) получаем

$$\gamma_{2t+1} + \ldots + \gamma_n > 0 \tag{3.11}$$

Точки z_i^s, $i = \overline{0, n-2s-2}$, удовлетворяют неравенству (3.4), поэтому, используя (3.10), получаем соотношения

$$\gamma_j \le 0, \; j = \overline{2s+2, n} \; .$$

Так как $t \geqslant s+1$, то верно неравенство

$$\gamma_{2t+1} + \ldots + \gamma_n \leq 0,$$

что противоречит (3.11). Значит, не существует регулярной системы неравенств размерности меньше $\ell + 1$. Следовательно,

$$I_\delta (K_0^n) = \ell + 1 .$$

При построении Ω в случае произвольного δ из B^n координаты точек ω^j и z_j^p, соответствующие компонентам σ_j, $j = \overline{1, q+1}$, нужно положить равными нулю. На этом доказательство теоремы завершается.

Следствие 1. Для произвольного кубического разбиения δ выполнено соотношение

$$1 \leq I_\delta (K_0^n) < \frac{n}{2} + 1 .$$

Следствие 2. Для кубического разбиения индекса один соответствующий булев вектор имеет вид

$$\delta = (1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0, \delta_n)^T,$$

где $\delta_n \in \{0, 1\}$.

Следствие 3. Для любого целого K такого, что $1 \leq K < n/2 + 1$ существует кубическое разбиение индекса K.

Нами также исследовался вопрос о регулярности некоторых известных классов отсечений относительно кубических разбиений. Было установлено, что отсечения 1-го алгоритма Гомори [9], В.Н.Шевченко [10], вполне регулярные отсечения (относительно L -разбиения) [11] и некоторые другие не являются регулярными для любого из кубических разбиений. А.А.Вотяковым был предложен z -алгоритм решения задачи ЦЛП, в котором на каждом шаге используется не более n отсечений. Нетрудно показать, что для класса задач, инвариантных относительно z -округления [12], в этом алгоритме порождаются системы неравенств, регулярные относительно кубических разбиений.

Поступила в ред.-изд. отдел
17 июля 1989 г.

Литература

1. Колоколов А.А. Алгоритмы отсечения и некоторые разбиения множеств. // Дискретная оптимизация и численные методы решения прикладных задач. - Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, - 1986. - С. 50-67.

2. Колоколов А.А. Исследование задач и методов целочисленного программирования на основе -разбиения. // 33 Intern. Wiss. Koll. TH. - Ilmenau, - 1988. - S. 53-55.

3. Колоколов А.А. О методе оценочных разбиений в целочисленном программировании. // УШ Всесоюз. конф. "Проблемы теоретической кибернетики". 1988: Тез. докл. - Горький, 1988. - С. 166.

4. Колоколов А.А., Сайко Л.А. О некоторых оценочных разбиениях в целочисленном программировании. // Системы программного обеспечения решения задач оптимального планирования. 10 Всесоюзный симпозиум (г. Нарва-Йыэсуу, 20-27 марта 1988 г.): Тез. докл. - Москва. - 1988. - С. 184.

5. Колоколов А.А., Заикина Г.М., Сайко Л.А., Цепкова Е.В. Экспериментальный анализ L -накрытий задач целочисленного программирования и алгоритмов отсечения. // Ш Всесоюзная школа "Дискретная оптимизация и компьютеры", Таштагол, 2-9 декабря 1987 г.: Тез. докл. - Москва. - 1987. - С. 117-118.

6. Сергиенко И.В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. - Киев: Наук. думка. - 1987. - 472 с.

7. Колоколов А.А. Верхние оценки числа отсекающих плоскостей для циклического алгоритма Гомори. // Методы моделирования и обработки информации. - Новосибирск: Наука. - 1976. - С. 106-116.

8. Сайко Л.А. Регулярные системы неравенств для одного класса оценочных разбиений. // Методы математического программирования и программного обеспечения. Тез. докл. - Свердловск. Институт математики и механики Уральского отделения АН СССР. - 1989. - С. 185.

9. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. - М.: Мир. - 1974. - 520 с.

10. Шевченко В.Н. Выпуклые многогранные конусы, системы сравнений и правильные отсечения в целочисленном программировании. // Комбинаторные алгебраические методы в прикладной математики. - Горький. - 1976. - С. 109-119.

11. Заблоцкая О.А., Колоколов А.А. Вполне регулярные отсечения в булевом программировании. // Экстремальные задачи исследования операций (Управляемые системы) - Новосибирск. - 1983. - Вып. 23. - С.55-63.

12. Вотяков А.А. О задачах, инвариантных относительно -округления. // Экономика и математические методы, том 7, вып. 2. - М.: Наука. - 1971. - С. 259-264.