Управляемые системы, ИМ, ИК СО АН СССР 1969 г. выпуск 3.
УДК.519.3:51:62-50

УСЛОВИЯ ПЕРИОДИЧНОСТИ МАКСИМУМА КРИТЕРИЯ ДЛЯ МНОГОШАГОВЫХ ПРОЦЕССОВ

В.З.Леонов, И.А.Красс

Пусть задан многошаговый процесс:

$$\left.\begin{aligned} &\bar{x}(n)=\bar{f}(\bar{x}(n-1),\bar{u}(n)) \quad (n=1,2,\dots,N),\\ &x_0=\bar{x}_0 \end{aligned}\right\} \qquad /1/$$

где $\bar{x}(n)\in E_m, \bar{u}(n)\in U$ причем U -замкнутое множество из E_s, а $\bar{f}$ - -непрерывная вектор-функция от $(\bar{x},\bar{u})\in E_m\times U$.

Предположим, что решается задача отыскания допустимого управления $\bar{u}(i)=\bar{u}_i^N(x_0)\in U\,(i=1,\dots,N)$, в случае которого достигается

$$\max_{(u(1),\dots,u(N))\in U^N} R(\bar{x}_N(\bar{x}_0,\bar{u}(1),\dots,\bar{u}(N))=R_N(\bar{x}_0), \qquad /2/$$

где $\bar{x}_n(\bar{x}_0(\bar{u}(1),\dots,\bar{u}(n))$ -состояние, в которое переходит из $\bar{x}_0$ система /1/ на n-м шаге в результате управления $\bar{u}(1),\dots,\bar{u}'(n)$

Обозначим: $S_n(\bar{x}_0)=\bigcup\limits_{(\bar{u}_1,\dots,\bar{u}_n)\in U^n} x_n(\bar{x}_0,\bar{u}_1,\dots,\bar{u}_n)(n=1,2,\dots)$,

$$Z_n(\bar{x}_0)=\bigcup_{N\geq n+1}\bar{x}_n(\bar{x}_0,\bar{u}_1^N(\bar{x}_0),\dots,u_n^N(\bar{x}_0))\ (n=1,2,\dots),\ S_0(\bar{x}_0)=Z_0(\bar{x}_0),$$

$$S(\bar{x}_0)=\bigcup_{n=0}^{\infty}S_n(\bar{x}_0),\ Z(\bar{x}_0)=\bigcup_{n=0}^{\infty}Z_n(\bar{x}_0),$$

$|A|$ -мощность множества A.

Найдем условия, при выполнении которого функция $R_N(\bar{x}_0)$ является для $N\geq n_0$ переодической функцией от N, т.е. существуют такие минимальные целые положительные числа $n_0=n_0(\bar{x}_0,\bar{f})$ и $\omega=\omega(x_0,\bar{f})$, что

$$R_{n+\omega}(\bar{x}_0)=R_n(\bar{x}_0) \quad \text{при } n\geq n_0,\ R_{n_0-1+\omega}(\bar{x}_0)=R_{n_0-1}(x_0). \qquad /3/$$

Очевидно, что для выполнения /3/ необходимо, чтобы при всех N выполнялось неравенство: $-\infty<d\leq D_N(\bar{x}_0)\leq D<\infty$.

Ниже приводятся достаточные условия существования /3/, т.е. условия периодичности максимума $R_n(x_0)$ для критерия оптимальности $R_N(x(N))$

ТЕОРЕМА I. Если для процесса /1/ найдутся такие n_1 и $n_2, n_2>n_1$, что

$$Z_{n_2}(\bar{x}_0)=Z_{n_1}(\bar{x}_0), \qquad /4/$$

то при $n\geq n_2$ справедливо равенство:

$$R_n(\bar{x}_0)=R_{n-(n_2-n_1)}(x_0). \qquad /5/$$

Выполнение равенства /5/ следует из /3/ и рекуррентного соотношения

$$R_n(\bar{X}_0) = \max_{\bar{X} \in Z_K(\bar{X}_0)} R_{n-k}(\bar{X}_0), \qquad /6/$$

основанного на принципе оптимальности Р.Беллмана.

СЛЕДСТВИЕ. При выполнении /4/$(n_2 - n_1)$ делится нацело на $\omega(\bar{X}_0, \bar{f})$, а $n_1 \geqslant n_0(\bar{X}_0, \bar{f})$, причем $n_1 \equiv n_0(\bar{X}_0, \bar{f})(mod\,\omega(\bar{X}_0, \bar{f}))$. Из определения множества $Z(\bar{X}_0)$ следует, что $|Z(\bar{X}_0)| \leqslant \chi_0$.

ТЕОРЕМА 2. Если для процесса /I/ $|Z(X_0)| < \chi$, то $R_N(\bar{X}_0)$ является периодической функцией и для суммы величин $n_0(\bar{X}_0, \bar{f})$ и $\omega(\bar{X}_0, \bar{f})$ выполняется неравенство

$$n_0(\bar{X}_0, \bar{f}) + \omega(\bar{X}_0, \bar{f}) \leqslant 2^{|Z(X_0)|} - 1. \qquad /7/$$

Справедливость теоремы следует из того факта, что все $Z_n(\bar{X}_0)$ являются непустыми подмножествами конечного множества $Z(\bar{X}_0)$.

СЛЕДСТВИЕ. Если $|S(X_0)| < \chi_0$, то для системы /I/ условия теоремы 2 выполняются, причем имеет место оценка

$$n_0(\bar{X}_0, \bar{f}) + \omega(\bar{X}_0, \bar{f}) \leqslant 2^{|S(\bar{X}_0)|} - 1.$$

Поступила в редакцию 8.I2.I969 г.