Управляемые системы, ИМ, ИК СО АН СССР 1969 г. выпуск 3.
УДК.519.3:62-50

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В.П.Петров, М.Р.Берлин /Ленинград/

Постановка задачи

В настоящем сообщении рассматривается задача динамической оптимизации в случае процесса абсорбции газа жидкостью в колоннах с насадкой. Математическая модель для такого рода аппаратов с учетом распределенности параметров представляет систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} T_1 \frac{\partial y_1}{\partial t} + \frac{\partial y_1}{\partial x} &= f_1(y_1, y_2, u_1(t,x), u_2(t,x)), \\ T_2 \frac{\partial y_2}{\partial t} - \frac{\partial y_2}{\partial x} &= f_2(y_1, y_2, u_1(t,x), u_2(t,x)), \\ T_2 \frac{\partial y_3}{\partial t} - \frac{\partial y_3}{\partial x} &= f_3(y_2, u_1(t,x), u_2(t,x)), \end{aligned}\right\} \qquad /1/$$

где $x \in [0,1]$; $t \in [0,T]$, а краевые условия имеют вид:

$$\begin{gathered} y_1(0,x) = y_2(0,x) = y_3(0,x) = 0, \\ y_1(t,0) = z(t);\ y_2(t,1) = y_3(t,1) = 0. \end{gathered} \qquad /2/$$

В работе введены следующие обозначения:

t - время;

x - высота аппарата;

f_i / i = 1,2,3/-линейные функции, характерезующие кинетику и массоперенос процесса;

$y_i(t,x) (i=1,2,3)$ -фазовые координаты объекта, имеющие смысл концентрации абсорбируемого компонента соответственно в газовой /i=1/ и в жидкой /i=2,3/фазах в растворенном и химически связанном состоянии;

T_1, T_2 - время пребывания потоков газа и жидкости в аппарате.

Критерий оптимальности процесса сформулирован, исходя из экономической эффективности процесса, которая определяется качеством целевого продукта и потерями абсорбируемого компонента в газовой фазе на выходе из аппарата / $y_1(t,1)$ /.

Показателем качества целевого продукта является средняя концентрация абсорбируемого компонента в жидкой фазе /$y_2(t,0) + y_3(t,0)$/. При этом должно поддерживаться в определенных пределах соотношение между химически связанным и свободно растворенным абсорбируемым компонентом.

Рассматривается задача минимизации функционала

$$\lambda(u_1, u_2) = \int_0^T \sigma^2(t)\,dt, \text{ где } \sigma(t) = y_2(t,0) + y_3(t,0), \qquad /3/$$

при ограничениях на фазовые координаты:

$$\left.\begin{aligned} & y_1(t,1) \leqslant \beta_1 \quad , \\ & \alpha_1 \leqslant \frac{a + y_3(t,0)}{b + y_2(t,0)} \leqslant \alpha_2 \; . \end{aligned}\right\} \qquad /4/$$

Функции $u_1(t,x), u_2(t,x)$ однозначно определяют процесс, при этом для данной задачи справедливо равенство:

$$u_j(t,x) = u_j(t - T_2(1-x), 1) \quad (j = 1,2). \qquad /5/$$

Введем в рассмотрение вектор-функцию $u(t,x) = (u_1(t,x), u_2(t,x))$,которую назовем управляющей,и рассмотрим сформулированную выше задачу как задачу выбора управляющей функции $u(t,x)$.Будем называть управление $u(t,x)$ допустимым,если оно удовлетворяет следующим условиям:

I/ $u_j(t,x)$ - кусочно - непрерывные функции.с конечным числом разрывов;

2/ $|u_j(t,x)| \leqslant \bar{u}_j$. /6/

Множество допустимых управлений обозначим через М.Окончательно постановка задачи оптимального управления формулируется следующим образом:среди всех допустимых управлений $u(t,x) \in M$ найти такое, чтобы соответствующее ему решение системы /I,2/ минимизировало функционал /3/ и удовлетворяло неравенствам /4/.

Алгоритм решения задачи

Как известно [2-4] ,необходимые условия оптимальности в задачах подобного типа приводят к краевой задаче для системы / I,2 / и к вспомогательной сопряженной системе уравнений.В данном случае проблема фактического построения оптимального управления усугубляется наличием ограничений на фазовые координаты. Поэтому в основу численного алгоритма в данной работе положен метод последовательных приближений с использованием идеи "штрафных функций". Подобная процедура описана Н.Е.Кириным [5] .В этом методе фазовые ограничения учитываются интегрально введением функций "штрафа",при этом в данной задаче оказывается,что интегральная малость функций "штрафа" означает возможность нарушения неравенств [4]на сколь угодно малую величину. В качестве конструктивного метода для построения минимизирующей последовательности функций управления применяется метод разделяющих сфер.

Согласно принятому методу решения задачи,вычислительная процедура сводится к минимизации функционала вида:

$$f_{\lambda_k}(w) = \frac{\gamma}{4} |\lambda(w) - \lambda_k|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \gamma_i \int_0^T \varphi_i^2(w)\,dt. \qquad /7/$$

Здесь $\varphi_i \; (i = 1,2,3)$ - функции "штрафа",представляющие собой невязку выполнения ограничений вида:

$$\begin{aligned} & y_1(t,1) - \beta + v_1(t) = 0, \\ & \alpha_1(b + y_2(t,0)) - (a + y_3(t,0)) + v_2(t) = 0, \\ & a + y_3(t,0) - \alpha_2(b + y_2(t,0)) + v_3(t) = 0, \end{aligned} \qquad /8/$$

где $v_i(t) \geq 0, \quad i = 1,2,3$.

Минимизация функционала f_{λ_k} проводится на множестве допустимых управлений:

$$M^* \equiv \{ w(t,x) \equiv (u_1(t,x), u_2(t,x), v_1(t), v_2(t), v_3(t)) : |u_j(t,x)| \leq \bar{u}_j, \; j = 1,2; \} \qquad /9/$$

Пусть $0 \leq v_i(t) \leq \bar{v}_i; \; i = 1,2,3$,

$\gamma, \gamma_i \; (i = 1,2,3)$ – весовые коэффициенты,

λ_k – некоторая оценка снизу функционала $\lambda(w)$ на k – м шаге алгоритма.

Рассмотрим последовательность вычислительных операций на k – м шаге алгоритма.

Минимум функцмонала f_{λ_k} ищется методом наискорейшего спуска.

I. Направление наискорейшего спуска определяется из следующего выражения:

$$\min_{\Delta w \in M^*} \frac{\partial f_{\lambda_k}(w_k)}{\partial w} \Delta w_k = \gamma(\lambda(w_k) - \lambda_k) \int_0^T \sigma(w_k) \Delta\sigma(\Delta w_k) dt +$$
$$+ \sum_{i=1}^{3} \gamma_i \int_0^T \varphi_i(w_k) \Delta\varphi_i(\Delta w_k) dt. \qquad /10/$$

З а м е ч а н и е: Чтобы избежать необходимости на каждом шаге алгоритма интегрировать систему уравнений в частных производных /I,2/, а также вспомогательную сопряженную систему уравнений для вычисления функциональной производной $\frac{\partial f_{\lambda_k}(w_k)}{\partial w}$ и определения направления наискорейшего спуска, было использовано интегральное представление системы /I,2/:

$$\underset{i=1,2,3}{y_i(t)} = \int_0^t [h_{1i}(t-\tau)u_1(\tau) + h_{2i}(t-\tau)u_2(\tau) + h_{3i}(t-\tau)z(\tau)] d\tau, \qquad /11/$$

где $y_i(t)$ –значения фазовых координат на соответствующих границах $y_1(t) \equiv y_1(t,1); \; y_2(t) \equiv y_2(t,0); \; y_3(t) \equiv y_3(t,0); \; u_j(t) \equiv u_j(t,1) \; j = 1,2$, $h_{\ell i}(t) (\ell = 1,2,3)$ –импульсные переходные функции по соответствующим каналам.

В результате интегрального преобразования /I,2/ существенно сокращается время реализации алгоритма.

2. Определение точки минимума функционала f_{λ_k} на направлении наискорейшего спуска $\Delta\bar{w}_k$ сводится /в силу структуры функционала f_{λ_k} / к решению кубического уравнения:

$$\rho_1\mu^3 + \rho_2\mu^2 + \rho_3\mu + \rho_4 = 0. \qquad /12/$$

Из построения /см. ниже/ следует выполнение неравенства $\lambda_k \leq \lambda(w_k)$, при этом условии f_{λ_k} – выпуклый функционал, и тогда многочлен /12/ имеет один вещественный корень. Обозначим его $\hat{\mu}$. За точку минимума функционала f_{λ_k} следует брать:

$$\mathring{\mu} = \begin{cases} \hat{\mu}, & \text{если } 0 \leq \hat{\mu} < 1, \qquad /13/ \\ 1, & \text{если } \hat{\mu} \geq 1. \qquad /14/ \end{cases}$$

3. Вычисление W_{k+1} : $W_{k+1} = W_k + \bar{\mu}\Delta\bar{W}_k$

4. Вычисление λ_{k+1} :

Согласно методу разделяющих сфер, следовало бы брать:

$$\lambda_{k+1} = \begin{cases} \lambda_k + \sqrt{\dfrac{4 f_{\lambda_k}(W_{k+1})}{\gamma}}, & \text{если } \dfrac{f_{\lambda_k}(W_k) - f_{\lambda_k}(W_{k+1})}{f_{\lambda_k}(W_k)} \leq \delta, \\ \lambda_k - & \text{в противном случае} \end{cases} \qquad /15/$$

Однако очевидно, что, вычисляя по формуле /15/, получим $\lambda_{k+1} > \lambda(W_{k+1})$; при этом функционал f_{λ_k} становится невыпуклым, в результате чего нет гарантии нахождения минимума $f_{\lambda_{k+1}}$ градиентным методом. Поэтому в /15/ сумму $\lambda_k + \sqrt{\dfrac{4 \cdot f_{\lambda_k}}{\gamma}}$ заменяем на число $\bar{\lambda} \leq \lambda(W_{k+1})$.

Численный пример

Задача оптимального управления, расмотренная выше, была решена для процесса абсорбции сернистого газа водой в колонне с активной насадкой - известняком, работающей по принципу противотока. Исследование этого процесса показало [6] , что существует оптимальное управление, минимизирующее функционал /3/ и удовлетворяющее ограничениям /4/.

Практика решения задачи показала, что алгоритм поиска оптимального закона управления сходится для любых начальных приближений управляющей функции $u(t,x)$. При этом скорость сходимости алгоритма существенно зависит: 1/ от начального приближения вспомогательных управляющих функций $v_i(t)\,(i=1,2,3)$; 2/ от весовых коэффициентов γ, $\gamma_i\ (i=1,2,3)$.
Алгоритм сходился за 5-6 шагов в случае, когда $v_i^{(1)}(t)$ задавались так, чтобы ограничения на фазовые координаты /8/ были близки к нулю, а весовые коэффициенты γ, γ_i выбирались так, чтобы на каждом шаге происходило существенное убывание функционала $\lambda(W_k)$.

Характер убывания функционала $\lambda(W_k)$ показан на рис. 1, на рис. 2 и 3 приведены ограничения на фазовые координаты. На рис. 4 приведены некоторые члены минимизирующей последовательности $\{u_k\}$. Для рассмотренного примера уже на 5 - 6 шаге алгоритма функции u_{1k}, u_{2k} удовлетворяют с заданной точностью всем требованиям задачи, и в этом смысле закон управления $u_k(t,x) = (u_{1k}(t,x), u_{2k}(t,x))$ может считаться приближенно оптимальным.

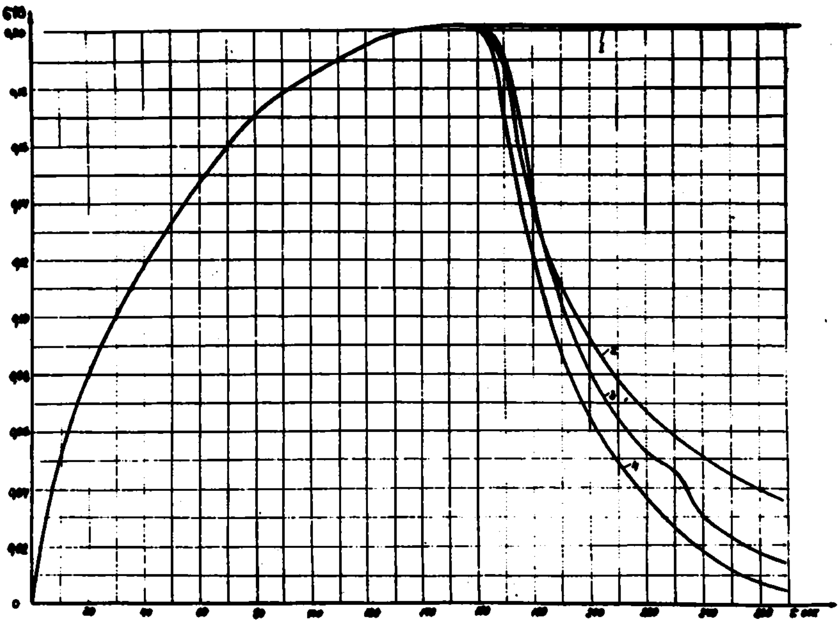

Рис.I

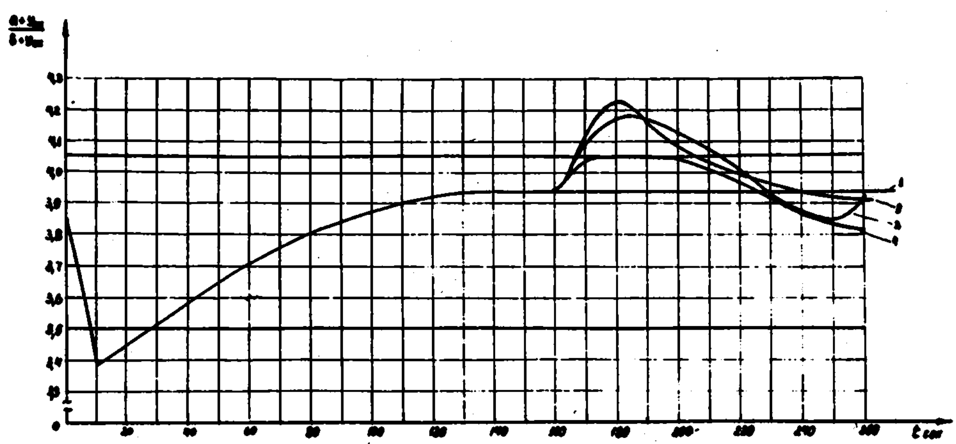

Рис.2

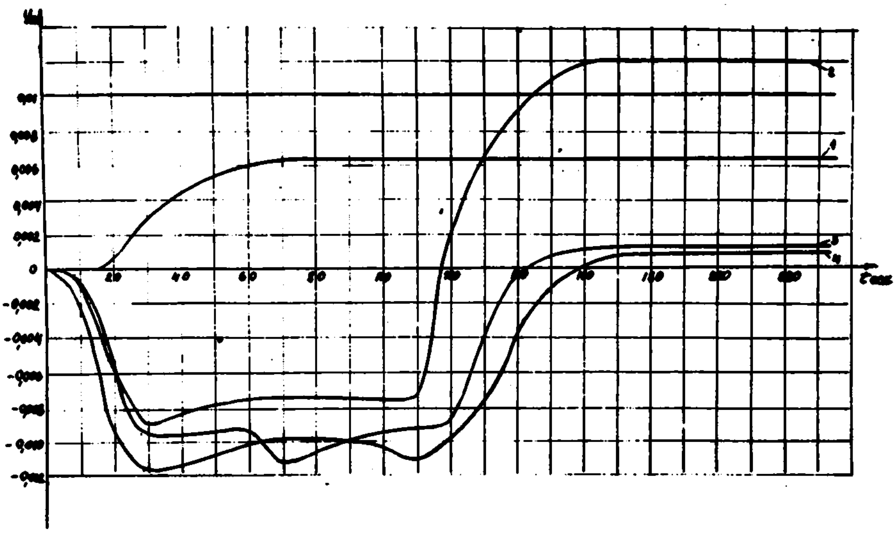

Рис.3

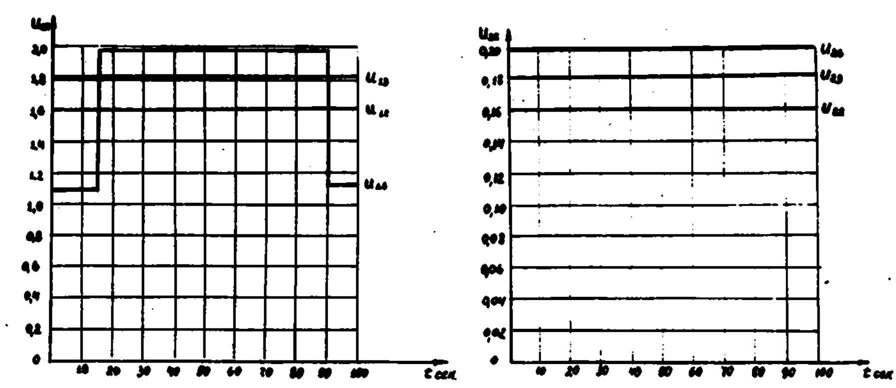

Рис.4

Поступила в редакцию I2.6.I969 г.

Литература

I. В.М.Элиашберг, В.П.Петров, Математические модели динамики процессов в насадочных колоннах, Труды института ВНИИБа, изд-во "Лесная промышленность", вып.50, I965.

2. А.Г.Бутковский, Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами, изд-во "Наука", I965.

3. А.И.Егоров, Об оптималлном управлении процессами в некоторых системах с распределенными параметрами, Автоматика и телемеханика, т. ХХУ, № 5, I964.

4. Т.К.Сирязетдинов, К теории оптимальных процессов с распределенными параметрами, Автоматика и телемеханика, т. ХХУ, № 4, I964.

5. Н.Е.Кирин, Вычислительные методы теории оптимального управления, изд-во ЛГУ, I968.

6. М.Р.Берлин, В.П.Петров, В.М.Элиашберг, Об одной задаче оптимального управления объектом типа колонного аппарата с активной насадкой, в сб., "Математические модели технологических процессов, системы автоматического управления", Труды института ВНИИБа, изд-во "Лесная промышленность", вып. 54, I969.

Работа доложена на Всесоюзной конференции по теоретической кибернетике /Новосибирск, I969/.