

К ЗАДАЧЕ СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНЫХ ПО ВЫСТРОИТЕЛЬНОСТИ УПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Л.А.Володин, А.И.Мороз, М.Г.Огульник /Москва/

В докладе\* излагаются некоторые результаты исследований в области приложения теории оптимального синтеза к нескольким прикладным задачам.

Реализация проводится с использованием процедуры, идея которой изложена в [1]. Эта процедура построения закона управления основана на аппроксимации поверхности переключения, заданной в параметрическом виде, системой плоскостей и на введении логики, определяющей принадлежность фазовой точки каждому из двух множеств, на которые поверхность переключения делит фазовое пространство.

Полученный закон в виде обратной связи легко реализуется на аналоговых вычислительных машинах с небольшим числом элементов и с нелинейностями лишь типа реле.

Используемое параметрическое представление поверхности переключения дает возможность графически определить минимальное время переходного процесса для произвольных начальных условий с желаемой степенью точности. В докладе описана эта процедура.

Кроме того, для некоторого достаточно широкого класса объектов приводятся результаты построения синтезирующей функции при наличии ограничений на фазовые координаты.

Проведен синтез также и для системы, описывающей динамику гироскопического компаса, матрица которой имеет комплексные собственные значения. Эта задача решалась другим путем в работе [2], где было получено программное управление.

Все задачи иллюстрируются полученными на АБМ осциллограммами переходных процессов в замкнутой системе.

1. Уравнения поверхности переключения.

Будем рассматривать систему управления, описываемую уравнением

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad /1/$$

где  $x$ ,  $b$  и  $A$  - векторы и матрица соответственно, управление  $u$  ограничено  $u_0 \leq u \leq u_1$ .

---

\*/ Данная работа была доложена на Всесоюзной конференции по проблемам теоретической кибернетики /Новосибирск - 1969 г./

Через  $G^T$  обозначим область достижимости начала координат для системы [1] за время, не превращающее  $T$ .

В [1] получено следующее параметрическое уравнение поверхности переключения для системы [1], матрица  $A$  которой имеет действительные собственные значения

$$x = x^-(r) - \left(1 - \frac{u_1}{u_0}\right)x^-(s) \quad /2/$$

для той части поверхности, в точках которой  $u = u_1$  и

$$x = x^+(r) - \left(1 - \frac{u_1}{u_0}\right)x^+(s) \quad /3/$$

для остальной части поверхности переключения. В этих выражениях обозначено

$$x^-(r) = \int_0^r e^{-\tau A} b d\tau.$$

В случае симметричных ограничений  $|u| \leq 1$  уравнения поверхности переключения получаем в виде

$$x = x^-(r) - 2x^-(s), \quad 0 \leq s \leq r, \quad /4/$$

и

$$x = x^+(r) - 2x^+(s) = -x^-(r) + 2x^-(s), \quad /5/$$

имея в виду, что  $x^+(r) = \frac{u_1}{u_0}x^-(r)$ .

Параметр  $r$  имеет смысл общего времени прихода изображающей точки в начало координат при движении по поверхности переключения, а  $(r - s)$  соответствует времени движения на последнем интервале постоянства управления.

Тогда граница поверхности переключения, расположенной в  $G^T$ , является координатной линией  $r = T$ , т.е. линией

$$x = x^-(T) - \left(1 - \frac{u_1}{u_0}\right)x^-(s), \quad 0 \leq s \leq T. \quad /6/$$

Пусть матрица  $A$  имеет комплексные собственные значения  $\rho \cos \beta \pm i \sin \beta$  и  $\lambda$  - действительное.

Введем в рассмотрение следующие функции [3]:

$$\begin{aligned} \varphi_0(r) &= -[b, Ab, e^{-rA}b] \\ \varphi_1(r) &= -[b, e^{-rA}b, e^{-rA}Ab]. \end{aligned} \quad /7/$$

В этом докладе рассматривается задача, когда  $\lambda < \rho \cos \beta$ . В этом случае функция  $\varphi_0(r)$  сохраняет знак, а  $\varphi_1(r)$  меняет знак при  $r > 0$ . Пусть  $r_c$  корни управления  $\varphi_1(r) = 0$ .

Уравнение поверхности переключения имеет вид:

$$x = (-1)^m x^-(r) + 2 \sum_{l=1}^{m+1} (-1)^l x^-(q_l(s)) \quad /8/$$

$$r_m \leq r \leq r_{m+1}, \quad 0 \leq s \leq \pi,$$

где  $q_l(s)$  - функции, заданные в неявном виде в уравнении:

$$[b, e^{-q_l(s)A}b, \gamma(s)] = 0,$$

$$r_{s-1} \leq q_s(s) \leq r_s, \quad 0 \leq s \leq \pi,$$

$V(s)$  - вектор-функция, например, такая  $V(s) = -Ab \cos(s) - [b \times Ab] \sin(s)$  /.

Из физических условий обычно бывает ясно, какова верхняя граница времени движения в начало координат с момента попадания точки на поверхность переключения. Пусть это будет  $\tilde{t}$ . Обозначим через

$r_1$ , первый корень уравнения  $\varphi_1(r) = 0$ . Тогда функция  $\varphi_1(r)$  сохраняет знак при  $\tilde{t} < r_1$ , и для  $0 < r < r_1$  формула /8/ примет вид /имея в виду, что  $r_0 = 0$  /

$$\chi = \chi^-(r) - 2\chi^-(q_1(s)). \quad /9/$$

Отсюда видно, что если  $q_1$ , рассматривать как независимый параметр, это выражение совпадает с /4/, т.е. в  $G^n$  уравнение поверхности переключения при  $0 < r < r_1$ , аналогично уравнению поверхности переключения, когда матрица  $A$  имеет только действительные собственные значения. В этом случае, учитывая знакопостоянство функций  $\varphi_0(r)$  и  $\varphi_1(r)$ , знак гауссовой кривизны, который определяется выражением

$$u_0^3(u_0 - u_1)^3 |e^{n-2A}|^2 \varphi_0(r) \cdot \varphi_1(r) \quad /10/$$

будет во всех точках поверхности положительный. Следовательно, в  $G^n$  свойства, которыми обладает поверхность переключения в случае действительных собственных значений, сохраняются, а именно 1/ условие /10/ влечет за собой локальную выпуклость поверхности, т.е. все точки, за исключением граничных между кусками поверхности, соответствующих различным управлениям, будут эллиптическими; это дает возможность разбить поверхность на выпуклые куски; 2/ поверхность переключения является однозначной в направлении вектора  $b$ ; 3/ проекции линий  $\chi^-(r)$  и  $\chi^+(r)$  на плоскости  $(b, \chi) = 0$  являются выпуклыми.

Способ реализации синтезирующей функции, задаваемой такой поверхностью переключения, может быть таким же, как описано в /1/.

## 2. О наискорейшем приведении гироскопического компаса в меридиан.

В качестве примера рассмотрим задачу о приведении гироскопического компаса в меридиан за минимальное время. Эта задача изучалась в [2], где было получено программное управление при некоторых начальных значениях и минимальное время переходного процесса оказалось равным  $T = 1200$  сек.

В работе [4] рассматривалась задача о приведении этого же гироскопического компаса в меридиан за заданное время, которое было принято равным  $T = 1800$  сек.

На примере этой задачи проиллюстрируем возможность создания системы управления с обратной связью, оптимальной по быстродействию.

Движение компаса описывается системой уравнений [2]

$$\dot{x}_1 = \frac{1,53921}{41,1368} x_2 + \frac{1,53921}{41,1368} \cdot 0,62 x_3 + u, \quad /11/$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= -41,1368 \cdot 10^{-6} x_1, \\ \dot{x}_3 &= -1,5 \cdot 10^{-3} x_2 - 1,5 \cdot 10^{-3} x_3, \end{aligned}$$

где  $|u| \leq u_0 = 0,6401 \cdot 10^{-3}$  - собственные значения;

$$\lambda = -0,8824 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon \pm i\omega = \gamma \cos \varphi \pm i \sin \beta = -0,3088 \cdot 10^{-3} \pm 0,9481 \cdot 10^{-3} i.$$

В этом случае  $\lambda < \gamma \cos \beta$  и функция  $\varphi_0(r)$  знакопостоянна, а  $\varphi_1(r)$  меняет знак.

$$\begin{aligned} \text{Функция } \varphi_1(r) &= -[b, e^{-rA} b, e^{-rA} Ab] = \\ &= -|T| e^{-2\gamma r \cos \varphi} [\omega - \lambda e^{-(\lambda - \varepsilon)r} \sin \omega r + \gamma e^{-(\lambda - \varepsilon)r} \sin(r\omega - \beta)], \end{aligned}$$

где  $T$  - матрица преобразования  $A$  к жордановой форме - имеет первый положительный корень, равный  $r_1 = 4465$ . Следовательно, при  $r > r_1$ , функция  $\varphi_1(r)$  знакопостоянна. Как было указано выше,  $r$  имеет смысл времени движения по поверхности, в то время как в указанных работах общее время переходного процесса не превышало  $T = 1800$ . Тогда в течение всего времени движения  $\varphi_0(r)$  и  $\varphi_1(r)$  знакопостоянны и уравнение поверхности, соответствующее управлению  $u = 0,6401 \cdot 10^{-3}$ , описывается формулой /9/ и обладает перечисленными выше свойствами.

В соответствии с работой [1] в качестве аппроксимирующих поверхность переключения неравенств были взяты следующие:

а/ разбиение фазового пространства на два полупространства производится плоскостью:

$$(\varphi_1, x) = 0,375x_1 - 145x_2 + 501x_3 > 0; \quad /12/$$

б/ поверхность в одном полупространстве аппроксимировалась неравенствами:

$$(\varphi_2, x) + d_2 \equiv 0,629x_1 - 189x_2 + 339x_3 + 0,0359 > 0; \quad /13/$$

$$(\varphi_3, x) + d_3 \equiv 5,385x_1 - 726x_2 + 1005x_3 + 0,036 > 0.$$

В другом полупространстве аппроксимирующие плоскости принимались симметричными плоскостям /13/ относительно начала координат.

$$(\varphi_4, x) + d_4 \equiv 0,629x_1 - 189x_2 + 339x_3 - 0,0359 > 0, \quad /13'/$$

$$(\varphi_5, x) + d_5 \equiv 5,385x_1 - 726x_2 + 1005x_3 - 0,036 > 0.$$

Тогда для формирования управления строится следующий алгоритм:

- 1/ если /12/ удовлетворяется и /13/ удовлетворяется, то  $u = -u_0$ ;
- 2/ если /12/ удовлетворяется, а /13/ не удовлетворяется, то  $u = +u_0$ ;
- 3/ если /12/ не удовлетворяется, а /13'/ удовлетворяется, то  $u = +u_0$ ;
- 4/ если /12/ не удовлетворяется и /13'/ не удовлетворяется, то  $u = -u_0$ ;

Этот алгоритм был реализован на АБМ ЭМУ-8 и были получены осциллограммы рис.1, рис.2.

Если ввести логические переменные  $y_i$ , принимающие значения только 0 или 1, следующим образом:

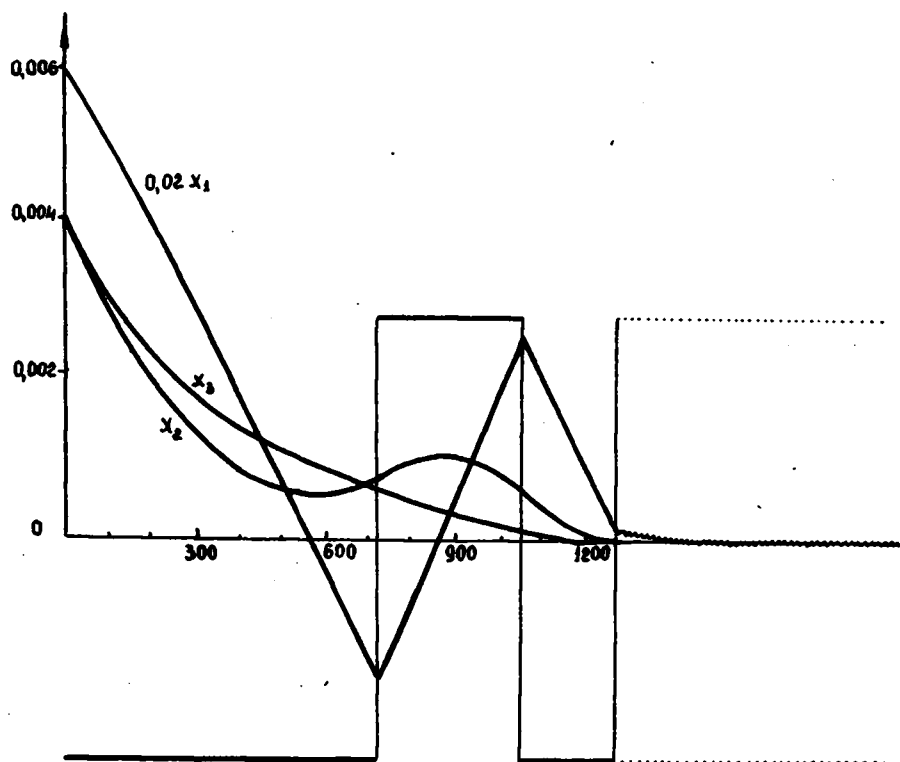


Рис. I

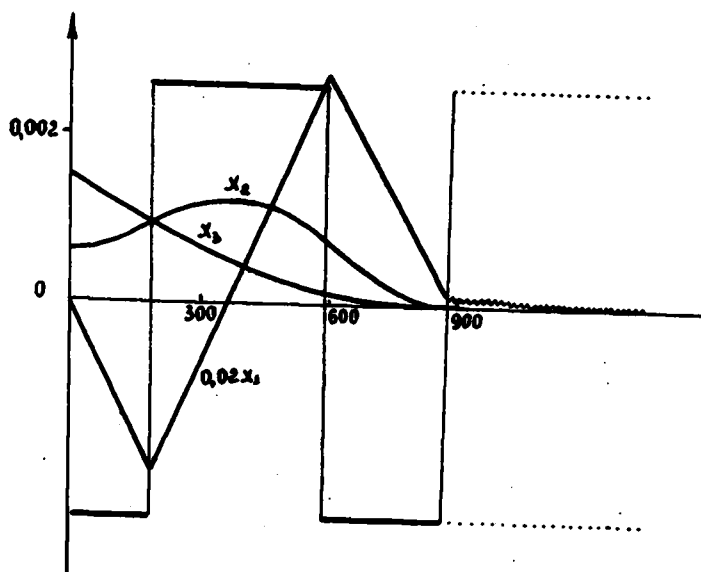


Рис. 2

$$\begin{cases} y_1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (p_1, x) > 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} y_2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (p_2, x) + d_2 > 0 \\ (p_3, x) + d_3 > 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} y_3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (p_4, x) + d_4 > 0 \\ (p_5, x) + d_5 > 0 \end{cases},$$

то синтезирующая функция запишется в виде:

$$u(x) = -u_0 + 2u_0 \{ y_1(x)(1-y_2(x)) + (1-y_1(x))y_3(x) \}.$$

3. Графическое определение времени перехода изображающей точки в начало координат.

Иногда бывает необходимо оценить оптимальное время при переходе из одного состояния в другое, не прибегая к сложным вычислениям. Ниже описывается методика определения этого времени.

Эта методика основана на геометрической интерпретации поверхности /2/ и /3/ и рассмотрении проекций траекторий движения системы /1/ на координатные плоскости.

Для определения минимального времени движения из некоторой начальной точки  $X_0$  необходимо сделать следующее:

1. Определить точку попадания  $\chi(\bar{r}, \bar{s})$  траектории с началом в  $X_0$  на поверхность переключения.

2. Общее время движения складывается из времени движения по траектории  $\tilde{\chi}$  из точки  $X_0$  в точку  $\chi(\bar{r}, \bar{s})$ , которое известно из расчета траектории, и из времени движения по поверхности переключения, которое определяется параметром  $\bar{r}$  точки  $\chi(\bar{r}, \bar{s})$  /о смысле параметров  $r$  и  $s$  говорилось выше/.

Таким образом, для решения задачи осталось определить лишь точку  $\chi(\bar{r}, \bar{s})$ . Для этого требуется:

1. Рассчитать линии  $\chi^-(r)$  и  $\chi^+(r)$ , а также координатные линии  $r = \text{const}$ ,  $0 \leq s \leq r$  по формулам /2/ и /3/ и построить их проекции на плоскости  $X_1 X_3$  и  $X_2 X_3$ .

2. Нанести на проекции  $X_1 X_3$  и  $X_2 X_3$  траекторию  $\tilde{\chi}$  с управлением на первом интервале, знак которого обычно известен из физических условий задачи. Если же определение знака управления на первом интервале затруднительно, необходимо провести построение траекторий для обоих управлений.

3. Построить в проекции  $X_2 X_3$  линию  $L$ , представляющую собой геометрическое место точек пересечения траектории  $\tilde{\chi}$  с координатными линиями  $r = \text{const}$  в проекции  $X_1 X_3$ . Тогда точка  $\chi(\bar{r}, \bar{s})$  является точкой пересечения  $L$  и  $\tilde{\chi}$  в проекции  $X_2 X_3$ .

Точность определения времени зависит в основном от точности определения параметров  $\bar{r}$  и  $\bar{s}$  точки  $\chi(\bar{r}, \bar{s})$ . Практически эти вычисления можно провести вручную или с использованием малых вычислитель-

ных средств.

4.06 одной задаче синтеза при наличии ограничений на фазовые координаты

Рассмотрим задачу о построении управления в виде обратной связи для систем, описывающих продольное движение летательных аппаратов при наличии ограничений на угол тангажа и угловую скорость. В этом разделе из-за недостатка места основные выкладки будут опущены и приведены лишь окончательные результаты/.

Динамика таких объектов описывается следующими уравнениями [5]:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{24}x_4 + b_2u, \\ \dot{x}_3 &= a_{34}x_4, \\ \dot{x}_4 &= a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{44}x_4 - b_4u,\end{aligned}\quad /14/$$

где  $x_1$  - тангаж,  $x_2$  - угловая скорость,  $x_3$  - высота и  $x_4 = \dot{x}_3$ .

Для этого класса объектов имеет место следующее обстоятельство: среди собственных значений матрицы  $A$  имеется отрицательное и большее по абсолютной величине собственное значение. Требуется определить закон управления как функцию фазовых координат, осуществляющий перевод системы /14/ из некоторой точки  $x_0$  в начало координат за минимальное время при ограничениях

$$u_0 \leq u \leq u_1; \quad |x_1| \leq C_1; \quad |x_2| \leq C_2.$$

С помощью невырожденного преобразования  $x = KZ$ , и используя указанное свойство матрицы  $A$  системы /14/ можно от системы /14/ перейти к следующей системе:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= \lambda_1 z_1 + d_1 u, \\ \dot{z}_2 &= z_3 + d_2 u, \\ \dot{z}_3 &= d_3 u,\end{aligned}\quad /15/$$

в которой уравнение, соответствующее большему отрицательному собственному значению, отсутствует. Оценки погрешности при таком переходе достаточно просты и здесь не приводятся.

Будем решать сформулированную задачу, где вместо системы /14/ рассмотрим систему /15/.

Уравнение поверхности переключения для /15/ представляется выражениями /2/ и /3/.

Пусть для начала имеем только одно ограничение фазовой координаты  $|x_1| \leq C_1$ . Тогда, учитывая /15/, это ограничение можно записать

$$z_1 + \alpha_1 z_3 - C_1 = 0 \quad /16/$$

/  $C_1$  - некоторая константа/.

Особое управление, выбранное из условия движения фазовой точки по ограничению /16/, как нетрудно убедиться, будет

$$u = \alpha_2 z_1, \quad /17/$$

где

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{d_1 + \alpha_1 d_3},$$

и, далее, в соответствии со структурой уравнений /14/ и /15/ имеем  $u=0$  и  $z_1=0$ . Тогда ограничение представляет собой прямую

$$\begin{cases} z_1 = 0, \\ z_3 = \text{const}, \end{cases} \quad /18/$$

лежащую в плоскости /16/, по которой фазовая точка движется со скоростью  $\dot{z}_2 = \dot{z}_3 = \text{const}$ .

Не записывая здесь гамильтониан системы /15/, можно, однако, отметить, что функция  $\Psi$ , представляющая собой сумму коэффициентов при  $u$ , при переходе фазовой точки на ограничение претерпевает скачок, а сама траектория касается ограничения. Ввиду того, что система /15/ имеет два нулевых собственных значения, поверхность, по которой происходит попадание на прямую /18/, представляет собой цилиндрическую поверхность

$$z^* = \tilde{z}(t) + \ell n^0, \quad /19/$$

где  $\tilde{z}(t)$  - "направляющая" траектория с управлением  $u_0$ ,  $n^0$  - единичный вектор образующей.

$\tilde{z}(t)$  - определяется из условия касания поверхности /19/ плоскости /16/, т.е. из

$$(z - \tilde{z}(t)) \cdot n^0 \frac{d\tilde{z}(t)}{dt} = z_1 + \alpha_1 z_3 - c_1.$$

Пусть теперь имеем ограничение  $|x_2| \leq C_2$ . В этом случае уравнение ограничения в координатах  $Z$  и особое управление могут быть найдены аналогично предыдущему.

Ограничение представляет собой плоскость

$$z_1 = \text{const}. \quad /20/$$

Особое управление

$$u = \alpha_3 z_1 = \text{const}. \quad /21/$$

Функция  $\Psi$  скачков не имеет, и траектории не касаются ограничения.

Если в системе имеются оба ограничения, то плоскость /20/ пересекается с поверхностью /19/ по прямой, параллельной прямой /18/, и определяемой системой

$$\begin{cases} z^* = \tilde{z}(t) + \ell n^0, \\ z_1 = \text{const}. \end{cases}$$

Синтез управления для системы /15/ при наличии обоих ограничений осуществляется по методике, описанной ранее.

Отметим, кроме того, что время переходного процесса в этом случае может быть также определено с помощью рассмотрения проекций описанных поверхностей на оси  $z_1, z_3$  и  $z_2, z_3$ . Точка  $x(\bar{P}, \bar{S})$  теперь есть точка попадания траектории, двигающейся по ограничению, на поверхность переключения.

В качестве примера рассмотрено движение гипотетического объекта



со следующими характеристиками:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 15 & -3,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -70 & -18 & 0 & -2,5 \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} 8 \\ 1,8 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Тогда система /15/ будет:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -0,5z_1 - 2,5u, \\ \dot{z}_2 &= z_3 + 200u, \\ \dot{z}_3 &= -95u. \end{aligned}$$

Ограничения были выбраны такие:

$$-0,15 \leq u \leq 0,5; \quad |x_1| \leq 40^\circ; \quad |x_2| \leq 16\%/сек.$$

Для формулирования управления поверхность /19/ аппроксимировалась одним неравенством

$$29z_1 - 1,35z_3 - 28 > 0. \quad /22/$$

Ограничение /20/ имело вид

$$z_1 + 0,54 > 0, \quad /23/$$

а поверхность переключения - двумя:

$$5,8z_1 - 0,8z_2 - 2z_3 > 0, \quad /24/$$

$$15,7z_1 + 1,6z_2 + 6,7z_3 + 71 > 0. \quad /25/$$

Или, переходя к исходным координатам  $x_i$ , можем записать

$$-12x_1 - 1,75x_2 - 0,22x_4 + 3,2 > 0, \quad /22'/$$

$$-5x_2 + 1,4 > 0, \quad /23'/$$

$$-4x_1 - 0,9x_2 + 0,08x_3 - 0,00x_4 > 0, \quad /24'/$$

$$-8,6x_1 - 1,2x_2 + 0,015x_3 - 0,17x_4 + 0,7 > 0. \quad /25'/$$

Теперь построим следующую логическую функцию:

1/ если /24/ удовлетворяется и /22'/, /23'/, /25'/ удовлетворяется, то  $u = 0,5$ ;

2/ если /24/ удовлетворяется, а /22'/, /23'/, /25'/ не удовлетворяются, то  $u = -0,15$ .

Для второй половины поверхности переключения запись неравенств и их проверка проводится аналогичным образом.

Сформированное управление по трем координатам  $z_i$  подавалось в исходную систему /14/. На рис. 3,4 показаны переходные процессы системы /14/ при найденном законе управления с ограниченными фазовыми координатами.

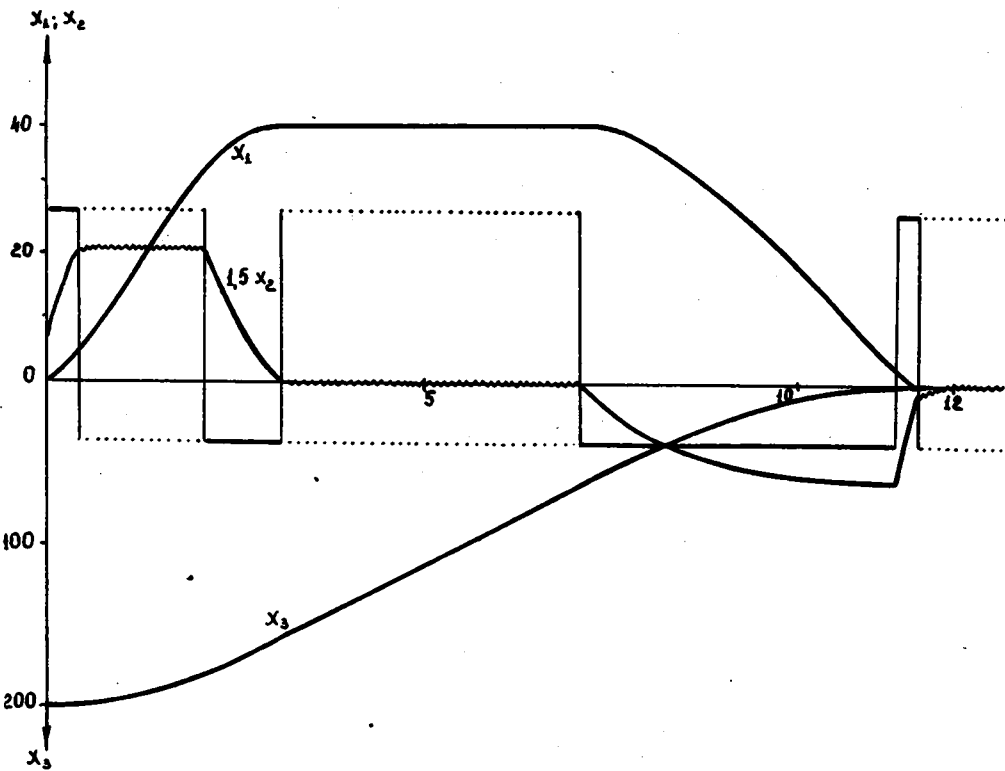


Рис. 3

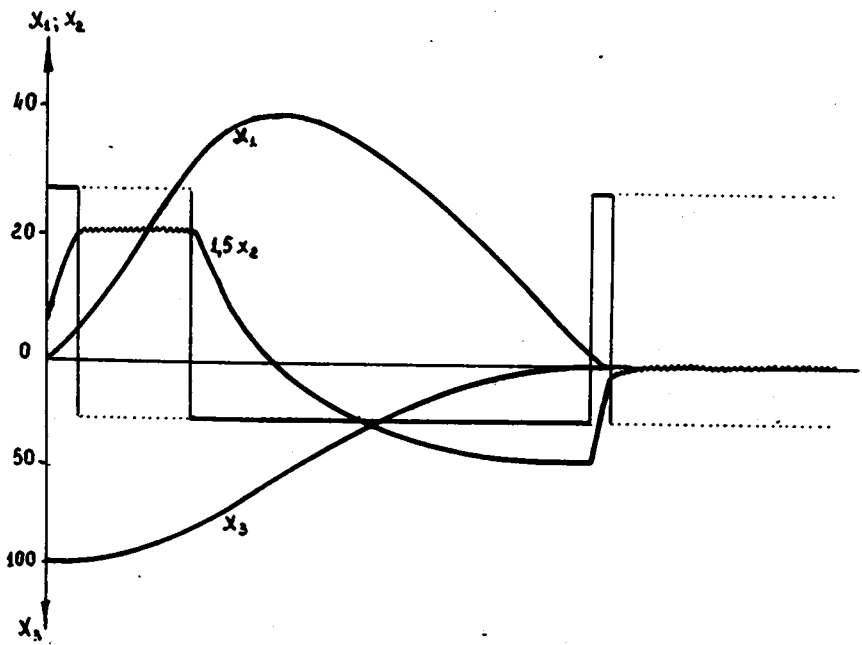


Рис. 4

Поступила в редакцию 13.6.1969 г.

### Л и т е р а т у р а

1. Л.А.Володин, А.И.Мороз, М.Г.Огульник, К вопросу реализации оптимальных по времени синтезирующих функций для одного класса линейных систем третьего порядка, Автоматика и телемеханика № 4, 1969.

2. Н.Н.Красовский, Теория управления движением. "Наука", 1968.

3. А.И.Мороз, Синтез оптимального по времени управления для линейных систем третьего порядка. I, Автоматика и телемеханика № 5, 1969.

4. Я.Н.Ройтенберг, Некоторые задачи управления движением. "Наука", 1963.

5. А.А.Лебедев, Л.С.Чернобровкин, Динамика полета. Оборонгиз, 1962.

Работа доложена на Всесоюзной конференции по теоретической кибернетике /Новосибирск, 1969/.