Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР 1969 г. выпуск 3.
УДК.519.3:62-50.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ СИНТЕЗА СУБОПТИМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ

С.Ю.Ульм /Таллин/

Пусть линейная динамическая система описывается системой уравнений

$$\dot{x} = F(t)x + G(t)u, \qquad /1/$$

где $x(t)$ - n - мерный вектор состояния; $u(t)$ - m -мерный вектор управления; $F(t)$ и $G(t)$ - соответственно $n \times n$ и $n \times m$ непрерывные по t матрицы; начальное состояние системы /1/ $x(t_0)$ - задано.

Задача линейного оптимального регулятора будет состоять в определении управления $u(t)$ на интервале $[t_0, t_1]$, которое минимизирует квадратичный критерий оптимальности

$$J = \frac{1}{2}\left\{x'(t_1)P(t_1)x(t_1) + \int_{t_0}^{t_1}[x'(t)Q(t)x(t) + u'(t)R(t)u(t)]dt\right\}, \qquad /2/$$

где $P(t_1)$ и $Q(t)$ - симметричные неотрицательно определенные $n \times n$ матрицы; $R(t)$ - симметричная положительно определенная $m \times m$ матрица; $Q(t)$, $R(t)$ - непрерывные по t.

Известно, что в этих предположениях оптимальное управление порождается линейным замкнутым законом управления

$$u(t) = K(t)x(t), \qquad /3/$$

где элементы матрицы $K(t)$ вычисляются на основании решения дифференциально-матричного уравнения Риккати [1]. Однако реализация такого решения сопровождается рядом трудностей /жесткие требования в отношении объема памяти вычислительной машины, неустойчивость процесса решения уравнения Риккати в прямом времени и т.д., см. [2]/.

Для нахождения приближенного управления в [3] система /1/ разбивается на N подсистем заданием набора постоянных $m_i \times n$ матриц $A_i(i=1,\dots,N; n \geqslant N \geqslant 2)$, причем $\sum_{i=1}^{N} m_i = n$. Пусть A_i^+ обозначает матрицу, псевдообратную к A_i, определяемую соотношением

$$A_i A_i^+ A_i = A_i \quad (i=1,\dots,N). \qquad /4/$$

При этом требуется, чтобы

$$\sum_{i=1}^{N} A_i^+ A_i = J, \qquad /5/$$

где J - единичная матрица порядка $n \times n$.

Отметим, что для нахождения псевдообратных A_i^+ следует образовать $n \times n$ матрицу

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_N \end{pmatrix} \qquad /6/$$

Если A неособенная, то существует

$$A^{-1} = (C_1 \ldots \underbrace{C_i}_{n \times m_i} \ldots C_N). \qquad /7/$$

Нетрудно видеть, что

$$A_i^+ = C_i. \qquad /8/$$

Оптимальное управление подсистемами в [3] дается формулами:

$$u_i(t) = K_i(t)\, y_i(t); \qquad /9/$$

$$K_i(t) = -R^{-1}(t)[A_i G(t)]' S_i(t); \qquad /10/$$

$S_i(t)$ - решение дифференциально-матричных уравнений Риккати

$$\begin{cases} -\dot{S}_i = (A_i F A_i^+)' S_i + S_i (A_i F A_i^+) - \\ - S_i (A_i G) R^{-1} (A_i G)' S_i + A_i^{+\prime} Q A_i^+ ; & /11/ \\ S_i(t_1) = A_i^{+\prime} P(t_1) A_i^+ . & /12/ \end{cases}$$

Здесь $y_i(t)$ - m_i -мерный вектор i -й подсистемы;

$u_i(t)$ - соответствующий m - мерный вектор управления; S_i и K_i - соответственно $m_i \times m_i$ и $m \times m_i$ матрицы / $i = 1, \ldots, N$ /.

Субоптимальное управление системы /1/ при критерии /2/ дается формулой

$$u(t) = K^*(t)\, x(t), \qquad /13/$$

где

$$K^*(t) = \sum_{i=1}^{N} K_i(t) A_i . \qquad /14/$$

Значение критерия оптимальности при субоптимальном управлении

$$f = \frac{1}{2} x'(t_0) L(t_0) x(t_0). \qquad /15/$$

где $L(t)$ удовлетворяет линейному дифференциально-матричному уравнению

$$\begin{cases} -\dot{L} = B'L + LB + K^{*\prime} R K^* + Q ; & /16/ \\ L(t_1) = P(t_1); & /17/ \end{cases}$$

а

$$B = F + GK^*. \qquad /18/$$

Если обозначить через $\Phi(t, \tau)$ - переходную матрицу, соответствующую /18/, то получим:

$$L(t) = \Phi'(t_1, t) P(t_1) \Phi(t_1, t) + \int_t^{t_1} \Phi'(\tau, t)[Q(\tau) + K^{*\prime}(\tau) R(\tau) K^*(\tau)] \Phi(\tau, t)\, d\tau. \qquad /19/$$

Ясно, что задача выбора матриц разбиения является важной проблемой, поскольку от этого зависит качество субоптимального управления

/13/. Но в [3] никаких приемов, кроме метода проб и ошибок, для выбора матриц A_i не предлагается.

Следуя идеям статьи [2], возьмем критерием качества для выбора матриц разбиения A_i след матрицы $L(t_0)$, который обозначим через

$$trL(t_0). \qquad /20/$$

В [2] отмечено, что функционал /20/ имеет следующую физическую интерпретацию. Предположим, что начальное состояние $x(t_0)$ есть случайная переменная, которая равномерно распределена по поверхности n - мерной единичной сферы. В этом случае минимизация критерия /20/ эквивалентна минимизации ожидаемого значения критерия/15/.

Итак, мы получим следующую задачу оптимизации для выбора матриц разбиения A_i : минимизировать по A_i функционал /20/, причем $L(t)$ определяется уравнениями /16/, /17/.

Допустим, что оптимальные A_i существуют, причем матрица /6/ неособенная. Тогда поставленную задачу можно решить, т.е. получить необходимые условия, для выбора матриц разбиения A_i. Сам вопрос об условиях существования оптимальных A_i остается пока открытым.

Дадим матрицам A_i малые приращения $\varepsilon\Delta A_i$. Соответствующее варьированное решение уравнения /16/ обозначим через $L_\varepsilon(t)$. По методике [2] нетрудно получить, что в первом приближении по ε

$$tr[L_\varepsilon(t_0)-L(t_0)]=2\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\Phi'(t,t_0)(G'L+RK^*)'\times$$
$$\times\sum_{i=1}^{N}(\Delta K_i A_i+K_i\Delta A_i)\Phi(t,t_0)dt. \qquad /21/$$

При этом

$$\Delta K_i=-R^{-1}[(A_iG)'\Delta S_i-(\Delta A_iG)'S_i]; \qquad /22/$$

$$\Delta S_i=\Psi_i'(t_1,t)(\Delta A_i^{+\prime}P(t_1)A_i^{+}+A_i^{+\prime}P(t_1)\Delta A_i^{+})\Psi_i(t_1,t)+$$
$$+\int_t^{t_1}\Psi_i'(\tau,t)\{(A_iF(\tau)\Delta A_i^{+}+\Delta A_iF(\tau)A_i^{+})'S_i(\tau)+$$
$$+S_i(\tau)(\Delta A_iF(\tau)A_i^{+}+A_iF(\tau)\Delta A_i^{+})-$$
$$-S_i(\tau)[\Delta A_iG(\tau)R^{-1}(\tau)(A_iG(\tau))'+A_iG(\tau)R^{-1}(\tau)(\Delta A_iG(\tau))']\times$$
$$\times S_i(\tau)+A_i^{+\prime}Q(\tau)\Delta A_i^{+}+\Delta A_i^{+\prime}Q(\tau)A_i^{+}\}\Psi_i(\tau,t)d\tau, \qquad /23/$$

где $\Psi_i(t,\tau)$ - переходная матрица, соответствующая матрице

$$H_i=A_iFA_i^{+}-A_iGR^{-1}(A_iG)'S_i. \qquad /24/$$

Поскольку скалярное произведение двух матриц с одинаковыми размерностями определяется формулами

$$(C,D)=tr(CD')=tr(DC')=tr(D'C)=tr(C'D), \qquad /25/$$

то нашей дальнейшей задачей является представление /21/ в виде

$$tr[L_\varepsilon(t_0)-L(t_0)] = \varepsilon tr\sum_{i=1}^{N} G_i' \Delta A_i, \qquad /26/$$

где G_i $-m_i\times n$ матрицы. Тогда уравнения

$$G_i = 0 \quad (i=1,\dots,N) \qquad /27/$$

являются необходимыми условиями для выбора оптимальных матриц разбиения A_i.

Формулу /26/ можно получить на основании /21/ - /23/, если использовать элементарные свойства операции tr /ср. /25// и формулы для приращений псевдообратных

$$\Delta A_i^+ = -\sum_{j=1}^{N} A_j^+ \Delta A_j A_i^+ \quad (i=1,\dots,N). \qquad /28/$$

Последние можно выводить следующим образом: если A представлена в виде /6/, то

$$\Delta(A^{-1}) = -A^{-1}\begin{pmatrix}\Delta A_1\\ \vdots \\ \Delta A_N\end{pmatrix} A^{-1} \qquad /29/$$

и на основании /8/

$$\Delta(A^{-1}) = -(A_1^+\dots A_N^+)\begin{pmatrix}\Delta A_1\\ \vdots \\ \Delta A_N\end{pmatrix}(A_1^+\dots A_N^+) =$$

$$= -\Big(\sum_{j=1}^{N} A_j^+ \Delta A_j A_1^+, \dots, \sum_{j=1}^{N} A_j^+ \cdot \Delta A_j \cdot A_N^+\Big), \qquad /30/$$

т.е. справедливы /28/.

Пренебрегая вычислительными подробностями дадим окончательное выражение для G_i $(i=1,\dots,N)$:

$$\frac{1}{2}G_i = \int_{t_0}^{t_1}\Big[A_i^{+\prime}P(t_1)\sum_{j=1}^{N}A_j^+ W_j(t_1,t,t_0)A_j^{+\prime} + K_i'(t)Z(t,t_0) -$$

$$- S_i(t)A_i Z'(t,t_0)R^{-1}(t)G'(t)\Big]dt +$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}dt\int_{t}^{t_1}\Big[A_i^{+\prime}\sum_{j=1}^{N}D_j(\tau)W_j(\tau,t,t_0)A_j^{+\prime} + S_i(\tau)W_i(\tau,t,t_0)E_i(\tau)\Big]d\tau, \qquad /31/$$

причем введены обозначения

$$Z(t,t_0) = [G'(t)L(t)+R(t)K^*(t)]\Phi(t,t_0)\Phi'(t,t_0); \qquad /32/$$

$$U_i(t,t_0) = A_i G(t)R^{-1}(t)Z(t,t_0)A_i'; \qquad /33/$$

$$V_i(t,t_0) = U_i(t,t_0) + U_i'(t,t_0); \qquad /34/$$

$$W_i(\tau,t,t_0) = \Psi_i(\tau,t)V_i(t,t_0)\Psi_i'(\tau,t); \qquad /35/$$

$$D_i(t) = Q(t)A_i^+ + F'(t)A_i'S_i(t); \qquad /36/$$

$$E_i(t) = S_i(t)[A_i G(t)]R^{-1}(t)G'(t) - A_i^{+\prime}F'(t). \qquad /37/$$

Используя метод градиентов, можно вычислить оптимальные A_i итеративно по формуле:

$$A_i^{(k+1)} = A_i^{(k)} - \varepsilon_k G_i^{(k)}, \qquad /38/$$

где $k = 0, 1, \ldots$; $i = 1, \ldots, N$; $A_i^{(0)}$ - начальные приближения для матрицы разбиения.

Отметим, что метод градиентов порождает здесь итерационную схему на двух уровнях, т.е. на каждом итерационном шаге вычислительные задачи можно разделить на центральные задачи и на независимые подзадачи /центральной задачей является, например, нахождение переходной матрицы $\Phi^{(k)}(t, \tau)$ /. Вместе с $A_i^{(k)}$ на каждом итерационном шаге мы находим соответствующее $S_i^{(k)}(t)$ - решение дифференциально-матричного уравнения Риккати для i-й подсистемы /ср. /II/ - /I2// / $i = 1, \ldots, N$ /.

Приведем простой пример [3]. Пусть

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad P = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$Q = 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad R = 1;$$

$$t_0 = 0; \quad t_1 = 1.$$

Выбираем $A_1^{(0)}$ = /I ; - I/; $A_2^{(0)}$ = /I ; I/, т.е. в качестве начальных приближений выбраны предположенные в [3] матрицы разбиения. Пусть в /38/ ε_k = 0,I. Тогда получим:

$$A_1^{(3)} = /0{,}66976\ ;\ -0{,}9410916/;$$
$$A_2^{(3)} = /1{,}182503;\ \ 0{,}9320803/.$$

При этом

$$L^{(0)}(t_0) = \begin{pmatrix} 5{,}120314 & 1{,}541599 \\ 1{,}541599 & 2{,}603051 \end{pmatrix};$$

$$L^{(3)}(t_0) = \begin{pmatrix} 5{,}013896 & 1{,}553635 \\ 1{,}553635 & 2{,}602254 \end{pmatrix}.$$

Пусть $X(t_0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. По формуле /I5/ легко установить, что

$$f^{(3)} < f^{(0)},$$

если

$$\frac{\alpha}{\beta} > 0{,}186 \qquad \text{или} \qquad \frac{\alpha}{\beta} < 0{,}040.$$

Поступила в редакцию I6.7.I969г.

Л и т е р а т у р а

I. Kalman R.E., in Math. Opt. Techniques, ed. R.E.Bellman, Berkeley, University of Calif. Press, ch.I6, (I963), 309-33I.

2. O.L.Kleiman, M.Athans. IEEE Trans. Autom. Control., I3, N2, (I968) I50-I59.

3. J.S.Meditch. IEEE Trans.Autom.Control, II, N3, (I966), 433-439.

Работа доложена на Всесоюзной конференции по теоретической кибернетике /Новосибирск, I969/.