Управляемые системы, ИМ ИК СО АН СССР 1969 г. выпуск 3.
УДК.512.25/26+519.3:330.115.

ОБ ОДНОМ ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И НЕКОТОРЫХ ЕЁ ОБОБЩЕНИЙ

С.М.Анцыз, И.И.Дикин

Данная работа написана на основе доклада, прочитанного авторами на Всесоюзной конференции по проблемам теоретической кибернетики в июне 1969 года.

Рассмотрим задачу линейного программирования: минимизировать

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad /1/$$

при условиях

$$x_j \geqslant 0,\ j=1,2,\ldots,n; \qquad /2/$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - x_j^0) = 0,\ i=1,2,\ldots,m. \qquad /3/$$

Известно, что для того, чтобы $\bar{x}$ являлся решением задачи /1/ - - /3/, необходимо и достаточно существование вектора $\bar{u} \in E_m$ такого, чтобы при $j=1,2,\ldots,n$ выполнялись условия:

$$\bar{x}_j\Big(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\bar{u}_i - c_j\Big) = 0, \qquad /4/$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\bar{u}_i - c_j \leqslant 0. \qquad /5/$$

Аналогично выписываются условия оптимальности для модели выпуклого программирования и некоторых задач линейного программирования с переменными коэффициентами. При решении прикладных оптимальных задач часто дело обстоит так, что знание вектора $\bar{u}$ не менее важно, чем решение исходной задачи. Естественной схемой решения экстремальных проблем, у которых для наличия $\bar{x}$ необходимо и достаточно существование вектора разрешающих множителей $\bar{u} \in E_m$ /m равно числу основных ограничений задачи/, является следующая. Дан допустимый вектор x^k, по нему находится $u^k \in E_m$. Если для пары векторов x^k и u^k выполнен признак оптимальности, то проблема решена; в противном случае вычисляются x^{k+1} и u^{k+1}. В итоге получаем $\bar{x}$ и $\bar{u}$, которые с заданной точностью удовлетворяют условиям оптимальности.

Отметим следующие конкретные реализации рассматриваемой схемы: одна из модификаций симплекс-метода, метод решения обобщенной задачи линейного программирования /[1], гл. 22 /, метод решения задачи выпуклого программирования с линейными ограничениями [2]. Предлагаемый в данной работе вычислительный метод также укладывается в эту схему.

Вектору x^k поставим в соответствие вектор двойственных оценок

u^k, являющийся решением задачи: найти

$$\min_{u\in E_m} \sum_{j=1}^{n}\left[x_j^k\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i-c_j\right)\right]^2. \qquad /6/$$

Положим

$$\delta_j^k=\sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i^k-c_j, \quad \Phi_k=\sum_{j=1}^{n}(x_j^k\delta_j^k)^2.$$

В [3] предлагается следующий итеративный алгоритм решения задачи /1/ - /3/.

Пусть вектор x^0 такой, что

$$x_j^0>0, \quad j=1,2,\dots,n. \qquad /7/$$

При $k=0,1,\dots$ вычислим

$$x_j^{k+1}=x_j^k(1+\lambda_k x_j^k\delta_j^k), \; j=1,2,\dots,n, \qquad /8/$$

$$\lambda_k=1/\sqrt{\Phi_k}. \qquad /9/$$

По сравнению с алгоритмами, предлагаемыми в [1,2], процесс /6/ - /9/ обладает той особенностью, что при его применении движение к оптимуму осуществляется по внутренним точкам допустимого множества. При этом если $\overline{X}$ - множество решений задачи /1/ - /3/ и размерность его не равна нулю, то $\bar{x}$ /предел последовательности $\{x^k\}$/ является внутренней точкой $\overline{X}$.

Этот подход особенно удобен для случая, когда исследователя интересует динамика получения оптимального вектора и связанных с ним экономических показателей из некоторого плана /например, принятого на практике/.

Заметим, что при $k=0,1,\dots$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j(x_j^k-x_j^{k+1})=\sqrt{\Phi_k}.$$

Предлагается следующая реализация алгоритма /6/ - /9/. Пусть $\varepsilon_1,\varepsilon_2>0$. Итерационный процесс совпадает с /6/ - /9/ до тех пор, пока $\sqrt{\Phi_k}\geqslant\varepsilon_1$. При $\sqrt{\Phi_k}<\varepsilon_1$ вычислим $\varphi_k=\min_j x_j^k\delta_j^k$ и примем $\lambda_k=-1/\varphi_k$. Если $\varphi_k\geqslant-\varepsilon_2$, вычисления прекращаются.

Для иллюстрации работы алгоритма приведем результаты счета двух задач линейного программирования. При расчете по модели, исследуемой в [4] ($m=70$, $n=170$, $\varepsilon_1=10$, $\varepsilon_2=0{,}01$, $\sum_{j=1}^{n} c_jx_j^0=315$, $\sum_{j=1}^{n} c_jx_j^{15}=482{,}3$)

на 15 -й итерации получены план и оценки, практически не отличающиеся от оптимальных. Решен пример, построенный на базе модели, разрабатываемой в отделении кибернетики Института математики СОАН СССР

($m=85$, $n=186$, $\varepsilon_1=50$, $\varepsilon_2=0{,}01$, $\sum_{j=1}^{n} c_jx_j^0=3781{,}7$, $\sqrt{\Phi_0}=142{,}85$, $\sum_{j=1}^{n} c_jx_j^{40}=221{,}3$, $\sqrt{\Phi_{40}}=0{,}07$, время счета на БЭСМ-6 - 74,5 секунды/.

При распространении метода на нелинейные модели на каждой итерации так же, как и при решении задачи линейного программирования, требуется минимизировать выпуклый квадратичный функционал. При этом часть параметров задачи, конструируемой по аналогии с /6/, пересчитывается на каждом шаге итерационного процесса, выбор величины шага λ_k усложняется [3,5]. Заметим, что впервые метод был применен осенью 1966 года при решении одной нелинейной задачи /[6], стр. 210-211 /.

В заключение отметим, что эффективность этого метода определяется вычислительными возможностями алгоритмов, которые применяются для минимизации квадратичных функционалов, возникающих при обработке информации по методу наименьших квадратов.

Поступила в редакцию 25.9.1969 г.

Литература

1. Дж.Данциг. Линейное программирование, его применения и обобщения. Прогресс, 1966.

2. В.А.Булавский, Г.Ш.Рубинштейн. О решении задачи выпуклого программирования с линейными ограничениями методом последовательного улучшения допустимого вектора, ДАН СССР, 150, № 2 /1963/,231-234.

3. И.И.Дикин. Итеративное решение задач линейного и квадратичного программирования, ДАН СССР, 174, № 4 /1967/, 747-748.

4. Г.Г.Пузанова. О некоторых экстремальных расчетах на однопродуктовой динамической модели. Оптимальное планирование, "Наука", Новосибирск, 1967. вып. 8.

5. С.М.Анцыз, И.И.Дикин. О применении одного эффективного метода решения задачи линейного программирования и некоторых ее обобщений, Материалы конференции молодых экономистов и социологов Сибири и Дальнего Востока, Новосибирск 1968, выпуск I.

6. Экономико-статистические исследования промышленного производства, Статистика, 1969.