Управляемые системы, ИМ, ИК СО АН СССР 1969 г. выпуск 3.
УДК.519.3.

ЗАДАЧА О ВСТРЕЧЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР С ИНТЕГРАЛЬНОЙ ПЛАТОЙ

В.И.Жуковский /Москва/

Рассматриваются достаточные условия существования оптимальных стратегий для указанных дифференциальных игр, осуществляющих встречу игроков по выбранным координатам в заданный момент времени.

§ 1. Постановка задачи

Движение двух противоборствующих объектов описывается системами дифференциальных уравнений:

$$\frac{dy}{dt} = Ay + \varphi(y) + au \qquad y(t_0) = y_0, \qquad /1.1/$$

$$\frac{dz}{dt} = Bz + \psi(z) + bv \qquad z(t_0) = z_0.$$

В качестве платы игры задан функционал

$$\mathcal{J}(u,v) = \int_{t_0}^{T} (ku^2 - \ell v^2)\,dt.$$

Здесь y - q - мерный, z - r - мерный векторы фазовых координат движущихся объектов; постоянные матрицы A, B и векторы a, b соответствующих размерностей, скалярные функции $u(t)$, $v(t)$ - соответственно управления первого и второго игроков; $\varphi(y)$ и $\psi(z)$ - непрерывные, нелинейные вектор-функции, $\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}$, $\frac{\partial\psi}{\partial z_j}$ $(i=1,\dots,q;\ j=1,\dots,r)$ непрерывны, $\varphi(0)=0, \psi(0)=0$ и таковы, что система /1.1/ при $y(t_0)=y_0$, $z(t_0)=z_0$ и непрерывных, ограниченных $u(t)$, $v(t)$ допускает решение $\{y(t), z(t)\}$, непрерывное, единственное, продолжимое на весь интервал $[t_0, T]$ и равномерно ограниченное на этом интервале; $T-t_0$ - фиксированное время продолжительности игры, которая начинается в момент t_0; постоянные k и ℓ положительны.

Предполагаем, что ресурсы управлений обеих игроков ограничены

$$u \in U = \{u(t): \alpha_1 < u(t) < \alpha_2\}, \quad v \in V = \{v(t): \beta_1 < v(t) < \beta_2\} \qquad /1.3/$$

$$\alpha_i, \beta_i = Const \ (i = 1, 2).$$

Первые m компонент векторов y, z, $m \leq min(r,q)$ будем обозначать соответственно $y^{[m]}$, $z^{[m]}$.

ЗАДАЧА 1. Указать метод построения допустимых стратегий $u(t)$, $v(t)$, удовлетворяющих условию Липшица на $[t_0, T]$ с одной и той же постоянной и таких, что $u(t)$, $v(t)$ осуществляют встречу игроков в силу системы /1.1/ в заданный момент времени T по выбранным наперед m координатам

$$y^{[m]}(T) = z^{[m]}(T). \qquad /1.4/$$

/Не ограничевая общности,будем считать, что это первые m координат векторов y и z / Задача решается в § 2.

ЗАДАЧА 2. Указать достаточные условия существования оптимальных стратегий $u^*(t) \in \overline{U}$, $v^*(t) \in \overline{V}$, осуществляющих /1.4/ в силу системы /1.1/ и доставляющих функционалу /1.2/ седловую точку:

$$\min_{u\in \overline{U}} \max_{v\in \overline{V}} J(u,v) = \max_{v\in \overline{V}} \min_{u\in \overline{U}} J(u,v) = J(u^*, v^*).$$

Задача решается в § 3, как частный случай теоремы существования.

При ряде допущений эту задачу физически можно итерпретировать как возможность обоих игроков двигаться с минимально возможной затратой энергии и в конце движения осуществить встречу по выбранной части координат.

Подобная задача для линейной системы в случае отсутствия ограничений на управления рассматривалась в [I]. С точки зрения классификации дифференциальных игр игра /1.1/ - /1.4/ есть игра с закрепленными концами, фиксированным временем продолжительности игры и интегральной платой.

Далее под нормой вектор-функции понимается сумма модулей функций, являющихся их компонентами, за норму матриц - сумма модулей их элементов.

§ 2. Допустимые стратегии

1. Линейный случай. Пусть в системе /1.1/: $\varphi(y) \equiv 0$, $\psi(z) \equiv 0$

$$\frac{dy}{dt} = Ay + au \qquad y(t_0) = y_0, \qquad /2.1/$$

$$\frac{dz}{dt} = Bz + bv \qquad z(t_0) = z_0 .$$

По формуле Коши:

$$y^{[m]}(T) = Y^{[m]}(T-t_0)y_0 + \int_{t_0}^{T} Y^{[m]}(T-\tau)au\,d\tau,$$

$$/2.2/$$

$$z^{[m]}(T) = Z^{[m]}(T-t_0)z_0 + \int_{t_0}^{T} Z^{[m]}(T-\tau)bv\,d\tau.$$

Здесь $Y(T-t)$, $Z(T-t)$ - фундаментальные матрицы систем /2.1/ соответственно при $u=0$, $v=0$, индекс сверху означает количество первых строк, из которых составлена матрица. Далее используются стратегии $u(t)$, $v(t)$ в виде

$$u(t) = p'(t)\ell, \qquad v(t) = q'(t)\ell, \qquad /2.3/$$

где m векторы $p(t)$, $q(t)$ удовлетворяют условию Липшица с одной и той же постоянной L :

$$\|p(t_1)-p(t_2)\| \leq L|t_1-t_2|, \quad \|q(t_1)-q(t_2)\| \leq L|t_1-t_2|$$

для всех пар $t_1, t_2 \in [t_0, T]$, штрих сверху означает операцию транспонирования; ℓ - постоянный m вектор. Подставляя /2.3/ в /2.2/ и учитывая /I.4/, получаем

$$\ell = H^{-1} h^{[m]}. \qquad /2.4/$$

Здесь H^{-1} - матрица, обратная к

$$H = \int_{t_0}^{T} [Y^{[m]}(T-\tau)ap'(\tau) - Z^{[m]}(T-\tau)bq'(\tau)]\, d\tau$$

$$h^{[m]} = -Y^{[m]}(T-t_0)y_0 + Z^{[m]}(T-t_0)z_0. \qquad /2.5/$$

Условие существования стратегий $u(t), v(t)$ вида /2.3/, осуществляющих встречу игроков по выбранным координатам в момент T сводится, таким образом, к существованию матрицы, обратной к H, т.е. к условию невырожденности H.

Покажем, что существуют системы, для которых множество матриц H вида /2.5/, допускающих обратную, не пусто. Пусть системы /2.I/ вполне управляемы на $[t_0, T]$ по выбранным m координатам. Положим

$$p(t) = Y^{[m]}(T-t)a, \quad q(t) = Z^{[m]}(T-t)b.$$

Из общей теории управления следует, что матрицы порядка $m \times m$

$$H_1 = \int_{t_0}^{T} Y^{[m]}(T-\tau)a(Y^{[m]}(T-\tau)a)'\, d\tau,$$

$$H_2 = \int_{t_0}^{T} Z^{[m]}(T-\tau)b(Z^{[m]}(T-\tau)b)'\, d\tau \qquad /2.6/$$

определенно положительны. Чтобы матрица $H = H_1 - H_2$ была невырожденной, достаточно, чтобы $H_1 - H_2$ была знакоопределенной, т.е. одна из систем /2.I/ "более управляема", чем вторая. Отметим, что такое условие приведено в [I]. Если раскрыть выражение $\det H$, то в него войдут слагаемые, содержащие произведения интегралов от компонент векторов $p(t)$ и $q(t)$. Условие $\det H \neq 0$ в каждом конкретном случае накладывает ограничения на изменение координат $p(t)$ и $q(t)$. Таким образом, задача сводится к нахождению решения нелинейного неравенства.

Далее предполагаем, что существуют постоянные векторы $c_i, d_i\ (i=1,2)$

$$c_1 < p(t) < c_2, \quad d_1 < q(t) < d_2. \qquad /2.7/$$

при которых матрица H невырожденная.

Решения систем /2.I/ при $u = v = 0$, $y(t_0) = y_0$, $z(t_0) = z_0$ ограничены на интервале $[t_0, T]$, поэтому существует постоянная $c \geq 1$

такая, что нормы $\|Y(t)\|$, $\|Z(t)\|$ фундаментальных матриц систем /2.1/ ограничены, именно

$$\max(\|Y(t)\|, \|Z(t)\|) \leqslant c \quad \text{при всех } t \in [t_0, T]. \qquad /2.8/$$

Тогда из /2.3/ - /2.5/, /2.7/ - /2.8/

$$\max(|u(t)|, |v(t)|) \leqslant \alpha c (\|y_0\| + \|z_0\|) \quad \text{при } \forall t \in [t_0, T] \qquad /2.9/$$
$$\alpha = const > 0.$$

2. Нелинейный случай. Рассмотрим способ постороения допустимых стратегий для системы /1.1/, основанный на процессе последовательных приближений решения соответствующей задачи оптимального управления [2]. От /1.1/ перейдем к соответствующей системе интегральных уравнений, тогда

$$y^{[m]}(T) = Y^{[m]}(T-t_0)y_0 + \int_{t_0}^{T} Y^{[m]}(T-\tau)\varphi(y(\tau))d\tau + \int_{t_0}^{T} Y^{[m]}(T-\tau)au(\tau)d\tau,$$

$$z^{[m]}(T) = Z^{[m]}(T-t_0)z_0 + \int_{t_0}^{T} Z^{[m]}(T-\tau)\psi(z(\tau))d\tau + \int_{t_0}^{T} Z^{[m]}(T-\tau)bv(\tau)d\tau.$$

Предлагаемый итерационный процесс описывается следующими рекуррентными соотношениями:

$$Y^{[m]}(T-t_0)y_0 - Z^{[m]}(T-t_0)z_0 + \int_{t_0}^{T} [Y^{[m]}(T-\tau)\varphi(y_n(\tau)) - Z^{[m]}(T-\tau)\psi(z_n(\tau))]d\tau +$$
$$+ \int_{t_0}^{T} [Y^{[m]}(T-\tau)au_n(\tau) - Z^{[m]}(T-\tau)bv_n(\tau)]d\tau = 0;$$

$$y_{n+1}(t) = Y(t-t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} Y(t-\tau)\varphi(y_{n+1}(\tau))d\tau + \int_{t_0}^{t} Y(t-\tau)au_n(\tau)d\tau;$$

$$z_{n+1}(t) = Z(t-t_0)z_0 + \int_{t_0}^{t} Z(t-\tau)\psi(z_{n+1}(\tau))d\tau + \int_{t_0}^{t} Z(t-\tau)bv_n(\tau)d\tau.$$

Если при $n=1$ в первом из соотношений /2.10/ положить $y_1(t) \equiv 0$, $z_1(t) \equiv 0$, то из условия $\varphi(0)=0$, $\psi(0)=0$ получаем уравнение для определения управлений $u_1(t)$, $v_1(t)$. Предположим, что выполнены ограничения, указанные в предыдущем пункте параграфа. Тогда, следуя указанному там приему, возможно построить удовлетворяющие условию Липшица и /1.3/ управления $u_1(t)$, $v_1(t)$, обеспечивающие встречу объектов в момент времени T по выбранным m координатам. Движения описываются линейными системами, соответствующими /1.1/ при $\varphi = 0$ и $\psi = 0$. Если найденные $u_1(t)$, $v_1(t)$ подставить в /1.1/, то согласно двум последним соотношениям из /2.10/:

$$y_2(t)=Y(t-t_0)y_0+\int_{t_0}^{t}Y(t-\tau)\varphi(y_2(\tau))d\tau+\int_{t_0}^{t}Y(t-\tau)au_1(\tau)d\tau,$$

$$z_2(t)=Z(t-t_0)z_0+\int_{t_0}^{t}Z(t-\tau)\psi(z_2(\tau))d\tau+\int_{t_0}^{t}Z(t-\tau)bv_1(\tau)d\tau.$$

Зная эти решения, можно вычислить

$$\int_{t_0}^{T}Y(T-\tau)\varphi(y_2(\tau))d\tau,\qquad \int_{t_0}^{T}Z(T-\tau)\psi(z_2(\tau))d\tau.$$

Подставив найденные интегралы в первое соотношение из /2.10/, получаем уравнения для определения $u_2(t)$ и $v_2(t)$. Эти первые приближения, в свою очередь, позволяют из /2.10/ найти $y_3(t)$ и $z_3(t)$, которые необходимы для нахождения $u_3(t)$ и $v_3(t)$ и т.д.

Предполагаем, что соотношения между ресурсами управлений в /1.3/ таковы, что все указанные операции разрешимы.

В n -м приближении

$$y_n(T)=Y(T-t_0)y_0+\int_{t_0}^{T}Y(T-\tau)\varphi(y_n(\tau))d\tau+\int_{t_0}^{T}Y(T-\tau)au_{n-1}(\tau)d\tau,$$

$$z_n(T)=Z(T-t_0)z_0+\int_{t_0}^{T}Z(T-\tau)\psi(z_n(\tau))d\tau+\int_{t_0}^{T}Z(T-\tau)bv_{n-1}(\tau)d\tau.$$

Подставив

$$\int_{t_0}^{T}Y(T-\tau)\varphi(y_n(\tau))d\tau,\qquad \int_{t_0}^{T}Z(T-\tau)\psi(z_n(\tau))d\tau.$$

в первое из соотношений /2.10/, находим

$$\int_{t_0}^{T}[Y^{[m]}(T-\tau)a\Delta u_n(\tau)-Z^{[m]}(T-\tau)b\Delta v_n(\tau)]d\tau=-[y^{[m]}(T)-z^{[m]}(T)].$$

Это условие определяет добавки $\Delta u_n(t)=u_n(t)-u_{n-1}(t)$ и $\Delta v_n(t)=v_n(t)-v_{n-1}(t)$ к управлениям, найденным из $n-1$ -го приближения. Как следует из первого пункта /линейный случай/,

$$\Delta u_n(t)=p'(t)H^{-1}[z^{[m]}(T)-y^{[m]}(T)],$$
$$\Delta v_n(t)=q'(t)H^{-1}[z^{[m]}(T)-y^{[m]}(T)]$$

и

$$y_n(t)=\int_{t_0}^{T}Y(t-\tau)a\Delta u_n(\tau)d\tau,\quad z_n(t)=\int_{t_0}^{t}Z(t-\tau)b\Delta v_n(\tau)d\tau.$$

Таким образом, для построения данного итерационного процесса доста-

точно знать значения решений системы /I.I/ лишь в момент времени T.

Перейдем к вопросу о сходимости /2.10/. Пусть выполнены условия /2.8/, /2.9/. Предполагаем далее, что для некоторого положительного числа λ, удовлетворяющего условию

$$\lambda \exp c\lambda(T-t_0) < \frac{1}{c^2\alpha(T-t_0)^2},$$

определена некоторая замкнутая область $R=\{y,z: \|y\|+\|z\| \leq A_0, A_0=const>0\}$, в которой функции $\varphi(y)$ и $\psi(z)$ удовлетворяют условию Липшица с одной и той же постоянной λ,

$$\|\varphi(y')-\varphi(y'')\| \leq \lambda \|y'-y''\|, \quad \|\psi(z')-\psi(z'')\| \leq \lambda \|z'-z''\|,$$

где постоянные C, α определены в /2.8/, /2.9/. Обозначим $\varkappa = C\alpha(T-t_0)$, $\mu = c\lambda(T-t_0)$ и определим число,

$$A_1 = \left\{C+\varkappa\left[C+\frac{c\mu(1+\varkappa)\exp\mu}{1-\varkappa\mu\exp\mu}\right]\right\}\exp\mu.$$

Тогда для сходимости итерационного процесса /2.10/ достаточно, чтобы

$$\|y_0\|+\|z_0\| < \frac{A_0}{A_1}. \qquad /2.11/$$

Управления $u_n(t)$, $v_n(t)$, определенные с помощью /2.10/ для начальных значений /2.11/, сходятся при $t\in[t_0,T]$ по норме /сильная сходимость/ к предельным значениям, которые при постановке в /I.I/ осуществляют условие /I.4/. Доказательство проводится аналогично [2] с естественными изменениями, связанными с тем, что /I.I/ состоит из двух подсистем. Так как управления $u_n(t)$, $v_n(t)$ выбраны по построению из класса функций, удовлетворяющих при $t\in[t_0,T]$ /I.3/ и условию Липшица с одной и той же постоянной, то и предельные управления $(n\to\infty)$ также удовлетворяют /I.3/ и условиям Липшица с той же постоянной.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.I. Если вектор-функции $p(t)$, $q(t)$ в /2.3/ выбрать в классе суммируемых функций, то указанные выше построения допустимых управлений $u(t)$, $v(t)$ также возможны. Используя метод, разработанный в / [3], § 4-5 /, можно указать и другой способ построения кусочно-постоянных допустимых управлений.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Итеративный процесс /2.10/ будет также сходиться, если условие /2.8/ заменить требованием

$$\max(\|Y^{[m]}(t)\|, \|Z^{[m]}(t)\|) \leq C \quad \text{при всех } t\in[t_0,T]$$

§ 3. Теорема существования

Ниже приведена теорема существования оптимальных стратегий для дифференциальных игр с интегральной платой, из которой как частный случай следует существование оптимальных стратегий задачи /I.I/ - - /I.4/.

Введем некоторые предположения.

а/ Пусть движение игроков описывается системой

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x, u, v), \quad x(t_0) = x_0. \qquad /3.1/$$

Здесь $x \in R^n$ – вектор фазовых координат, $u(t)$ и $v(t)$ скалярные управления соответственно первого и второго игроков которые для любых пар $t_1, t_2 \in [t_0, T]$ удовлетворяют условию Липшица с одной и той же постоянной L :

$$|u(t_1) - u(t_2)| \leq L|t_1 - t_2|, \quad |v(t_1) - v(t_2)| \leq L|t_1 - t_2| \qquad /3.2/$$

$$u \in U = \{u(t) : \alpha_1 < u(t) < \alpha_2\}, \quad v \in V = \{v(t) : \beta_1 < v(t) < \beta_2\},$$

где $\alpha_i, \beta_i = const (i=1,2), t_0, T$ – фиксированные моменты времени начала и конца игры. Относительно правых частей системы /3.1/ предполагаем, что компоненты вектора X и элементы матрицы $X_x = \left[\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right] (i, j = 1, \ldots, n)$ непрерывны в $R^n \times \bar{U} \times \bar{V} \times [t_0, T]$. Тогда при любых $u \in \bar{U}$, $v \in \bar{V}$ существует единственное, непрерывное на $[t_0, T]$ решение $x(t, t_0, x)$, $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$. Пусть оно продолжимо на интервал $[t_0, T]$ и равномерно ограничено:

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \leq a, \quad a = const > 0, \quad t \in [t_0, T]. \qquad /3.3/$$

/достаточные условия выполнения /3.3/ приведены ниже в лемме I/, $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

в/ В момент времени T определим непустое компактное множество $G(T) \subset R^n$. Пусть для любых $u(t) \in U$, $v(t) \in V$ в силу системы /3.1/ решаемой при начальных условиях $x(t_0, t_0, x) = x_0$,имеет место условие $x(T, t_0, x_0) \in G(t)$. Такое множество $\{u(t), v(t)\}$ в задаче /1.1/, /1.3/ - /1.4/ определялось как множество допустимых управлений.

с/ Функционал

$$J(u, v) = \int_{t_0}^{T} f(t, x, u, v)\, dt \qquad /3.4/$$

определен для любого $u \in \bar{U}, v \in \bar{V}$ и соответствующего решения $x(t, t_0, x_0)$ системы /3.1/. Пусть функция $f(t, x, u, v)$ непрерывна на $[t_0, T] \times [\|x\| \leq a] \times \bar{U} \times \bar{V}$. Если выполнено условие а/, то считая u, v - параметрами, получаем /[4], стр. 298 /, что $x(t, t_0, x_0, u, v)$ – непрерывная вектор-функция u и v . Подставим ее в /3.4/. Предполагаем, что эта функция выпукла на $\bar{U}$ и вогнута на $\bar{V}$.

ЛЕММА 3.1. Пусть X и X_x непрерывны в $[t_0, T] \times R^n \times \bar{U} \times \bar{V}$. Тогда неравенство /3.3/ имеет место, если выполнено одно из следующих условий:

$$\begin{aligned} &\|X_x(t, x, u, v)\bar{x}\| \leq k\|\bar{x}\|, \\ &x X(t, x, u, v) \leq k(\|\bar{x}\|^2 + 1), \\ &\|X(t, x, u, v)\| \leq k, \quad k = const > 0. \end{aligned} \qquad /3.5/$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО I. В силу непрерывности $X(t,0,u,v)$ на компактном замкнутом ограниченном множестве $[t_0,T]\times\bar U\times\bar V$

$$\|X(t,0,u,v)\| \leqslant k_1, \quad k_1 = Const>0.$$

По теореме Лагранжа о конечных приращениях

$$\|x(t,t_0,x_0)\| = \|x_0 + \int_{t_0}^{t} X(\tau,x(\tau,t_0,x_0),u(\tau),v(\tau))d\tau\| \leqslant \|x_0\| +$$

$$+\int_{t_0}^{t}\|X(\tau,0,u(\tau),v(\tau)) + X_x(\tau,\theta x(\tau,t_0,x_0),u(\tau),v(\tau))x(\tau,t_0,x_0)\|d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \|x_0\| + k_1(t-t_0) + k\int_{t_0}^{t}\|x(\tau,t_0,x_0)\|d\tau, \quad 0\leqslant\theta\leqslant 1$$

Отсюда, используя лемму Гронуолла / [5], стр. 46 /,

$$\|x(t,t_0,x_0)\| \leqslant (\|x_0\| + k_1(t-t_0))exp[k(t-t_0)] \leqslant$$
$$\leqslant(\|x_0\| + k_1(T-t_0))exp[k(T-t_0)] = a.$$

2. Обозначим $y = \|x\|^2+1$. Тогда в силу /3.I/,/3.5/

$$\frac{dy}{dt} \leqslant 2ky, \quad y(t_0) = \|x_0\|^2+1.$$

Отсюда

$$y(t) \leqslant y(t_0)exp[2k(t-t_0)] \leqslant y(t_0)exp[2k(T-t_0)].$$

Следовательно,

$$\|x(t,t_0,x_0)\| \leqslant \sqrt{(\|x_0\|^2+1)exp[2k(T-t_0)]-1} = a.$$

3. Пусть $|X_i(t,x,u,v)|\leqslant k_i,\ k_i = Const\geqslant 0\ (i=1,\dots,n)$, тогда

$$|x_i(t,t_0,x_0)| = |x_i(t_0) + \int_{t_0}^{t} X_i(\tau,x(\tau,t_0,x_0),u(\tau),v(\tau))d\tau| \leqslant$$

$$\leqslant |x_i(t_0)| + \int_{t_0}^{t}|X_i(\tau,x(\tau,t_0,x_0),u(\tau),v(\tau))|d\tau \leqslant$$

$$\leqslant |x_i(t_0)| + k_i(T-t_0) = a_i, \quad a_i = Const>0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. В задачах оптимального управления аналог первого неравенства /3.5/ приведен в [6], второго - в [7], третьего - в [8].

ЛЕММА 3.2. Если выполнены условия а/, с/, то

$$\min_{u\in\bar U}\max_{v\in\bar V} J(u,v) = \max_{v\in\bar V}\min_{u\in\bar U} J(u,v) = J^*. \qquad /3.6/$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество $\bar U$ и $\bar V$, определенные /3.2/, непустые, компактные, замкнутые, выпуклые и ограниченные. Подставляя в /3.4/ вместо x решение $x(t,t_0,x_0,u,v)$ системы /3.I/ /считаем u и v - параметрами/, получаем, что функция $f(t,x(t,t_0,x_0,u,v),u,v)$ непрерывна на $[t_0,T]\times\bar U\times\bar V$ и, следовательно, функция $J(u,v)$ /непрерыв-

на на $\bar U\times\bar V$. Кроме того, по условию c/, функция $J(u,v)$ выпукла по u на U и вогнута по V на V. Применяя теорему фон Неймана о минимаксе /например, [9] /, получаем /3.6/.

ТЕОРЕМА. Если выполнены условия a/ - c/ то существуют оптимальные стратегии $u^*(t)\in\bar U, v^*(t)\in\bar V$, именно: 1/ функции $u^*(t)\in\bar U$, $v^*(t)\in\bar V$ и удовлетворяют условию Липшица с той же постоянной L;

2/ функционалу /3.4/ в силу системы /3.1/ $u^*(t)$, $v^*(t)$ доставляют седловую точку

$$\min_{u\in\bar U}\max_{v\in\bar V} J(u,v)=\max_{v\in\bar V}\min_{u\in\bar U} J(u,v)=J^*=J(u^*,v^*);$$

3/ при $u=u^*(t), v=v^*(t)$ для оптимальной траектории $x^*(t,t_0,x_0)$ системы /3.1/

$$x^*(T,t_0,x_0)\in G(T).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 2 выполнено условие /3.6/. Функция $f(t,x,u,v)$ непрерывна на множестве $[t_0,T]\times[\|x\|\le a]\times\bar U\times\bar V$, поэтому функционал $J(u,v)$ также непрерывен. Поэтому существует последовательность $u^k(t)\in U$, $v^k(t)\in V$. такая, что $J(u^k,v^k)$, монотонно убывая, стремится к J^* при $k\to\infty$. Так как $u^k(t)$, $v^k(t)$ удовлетворяют условию Липшица, то эти функции равностепенно непрерывны при $t\in[t_0,T]$. Их равномерная ограниченность следует из условия /3.2/. По теореме Арчела существует подпоследовательность /сохраняем прежние обозначения/ такая, что $u^k(t)\to u^*(t)$, $v^k(t)\to v^*(t)$ при $t\in[t_0,T]$ равномерно при $k\to\infty$. Поэтому $u^*(t)$ и $v^*(t)$ при $t\in[t_0,T]$ непрерывны, удовлетворяют условию Липшица с той же постоянной и, вследствие замкнутости $\bar U$ и $\bar V$, $u^*(t)\in\bar U$, $v^*(t)\in\bar V$.

Обозначим последовательность решений /3.1/ при $x(t_0,t_0,x_0)=x_0$, $u=u^k(t)$, $v=v^k(t)$ через $x^k(t)$.

Оценим

$$\|x^k(t)-x^p(t)\|=\left\|\int_{t_0}^{t}[X(\tau,x^k(\tau),u^k(\tau),v^k(\tau))-X(\tau,x^p(\tau),u^p(\tau),v^p(\tau))]d\tau\right\|\le$$

$$\le\int_{t_0}^{t}\|X(\tau,x^k(\tau),u^k(\tau),v^k(\tau))-X(\tau,x^p(\tau),u^k(\tau),v^k(\tau))\|d\tau+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\|X(\tau,x^p(\tau),u^k(\tau),v^k(\tau))-X(\tau,x^p(\tau),u^p(\tau),v^k(\tau))\|d\tau+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\|X(\tau,x^p(\tau),u^p(\tau),v^k(\tau))-X(\tau,x^p(\tau),u^p(\tau),v^p(\tau))\|d\tau.$$

Вследствие равномерной непрерывности $X(t,x,u,v)$ к $\|x\|\le a, u\in\bar U, v\in\bar V$,

при k,p, достаточно больших,

$$\|x^k(t)-x^p(t)\| \le \varepsilon + \int_{t_0}^{T} \|X_x(\tau,\tilde{x}(\tau),u^k(\tau),v^k(\tau))\| d\tau,$$

где $\varepsilon = const > 0$ сколь угодно мало /оно определяет k и p / Из уловия a/ следует существование постоянной k_1 такой, что $\|X_x\| \le k_1$ на $[t_0,T] \times [\|x\| \le a] \times \bar{U} \times \bar{V}$.Применим лемму Гронуолла, тогда

$$\|x^k(t)-x^p(t)\| \le \varepsilon \exp[k_1(T-t_0)],\ t \in [t_0,T].$$

По критерию Коши $x^k(t) \to x^*(t)$ при $k \to \infty$ равномерно.

Из /3.1/

$$x^k(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} X(\tau,x^k(\tau),u^k(\tau),v^k(\tau))d\tau.$$

Отсюда

$$x^*(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} X(\tau,x^*(\tau),u^*(\tau),v^*(\tau))d\tau.$$

Отметим, что $x^*(T) = \lim\limits_{k\to\infty} x^k(T)$. Поскольку $x^k(T) \in G(T)$, то $x^*(T) \in G(T)$, ибо в противном случае существовала бы такая окрестность $G_\varepsilon(T)$ компактного множества $G(T)$, что при достаточно больших k $x^k(T) \bar{\in} G_\varepsilon(T)$, что противоречит условию $G(T) \subset G_\varepsilon(T)$.

Переходя к пределу при $k \to \infty$ в обоих частях равенства /3.4/, аналогично предыдущему, получаем

$$\mathcal{Y}^* = \lim_{k\to\infty} \mathcal{Y}(u^k,v^k) = \mathcal{Y}(u^*,v^*).$$

Следует отметить, что для задач оптимального управления подобная теорема приведена в [8].

СЛЕДСТВИЕ. Пусть для дифференциальной игры /1.1/ - /1.4/ выполнены указанные в § 1 предположения и для любых $u(t) \in U$, $v(t) \in V$ осуществляется /1.4/ в силу системы /1.1/. Тогда существуют оптимальные стратегии $u^*(t), v^*(t)$, которые решают задачу 2. Справедливость утверждения следует из приведенной выше теоремы, т.к. функционал /1.2/ удовлетворяет условию c/ и множество /1.4/ компактно.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Оптимальные стратегии при выполнении условий a/- - c/ могут быть неединственны. Единственность оптимальных стратегий обеспечивается, если $\mathcal{Y}(u,v)$ строго выпукло-вогнута на $U \times V$. Доказательство единственности аналогично / [10], стр. 158 /. Функционал /1.2/ строго выпукло-вогнут на $U \times V$, поэтому оптимальные стратегии задачи /1.1/ - /1.4/ единственны.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Как следует из способа построения допустимых стратегий функции u, v и x непрерывно зависят от t_0, x_0. Тогда оптимальные стратегии u^*, v^* и соответствующее оптимальное решение /3.1/ вследствие равномерной сходимости непрерывно зависят от

t_0, x_0 . Пусть удалось определить $u^*(t,t_0,x_0)$, $v^*(t,t_0,x_0)$ и $x^*(t,t_0,x_0)$ для програмной задачи при любых возможных t_0, x_0 . В этом случае возможно осуществить оптимальный синтез, ибо на основании принципа оптимальности / [L] , стр. 156 /

$$u(t,x) = u^*(t,t,x), \quad v(t,x) = v^*(t,t,x).$$

Поступила в редакцию I.9.I969 г.

Литература

I. Y.C.Ho, A.E.Bryson, S.Baron. Differential games and optimal pursuit-evasion strategies. IEEE Trans., Automat., Control, IO, N4, I965.

2. В.А.Чапрасов. К задаче об управлении движением нелинейной системы. Вестник МГУ, сер.мат.,мех., № 4, 1968.

3. Я.Н.Ройтенберг. Некоторые задачи управления движением. М., Физматгиз, 1963.

4. В.В.Степанов. Курс дифференциальных уравнений М., Физматгиз, 1958.

5. Р.Беллман. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М., ИИЛ, 1954.

6. Б.Т.Поляк. К теории нелинейных задач оптимального управления Вестник МГУ, сер. мат., мех. № 2, 1968.

7. А.Ф.Филиппов. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования. Вестник МГУ, сер. мат., мех., астр.,физ.,хим. № 2, 1959.

8. E.B. Lee, L.Markus. Optimal Control for Nonlinear Processes. Arch.for Rat.Mech. and Anal.,8,NI, I96I. /русский перевод: Кибернетический сборник, № 2, 1966/

9. F.E.Browder. The fixed point theory of multivalued mappings in topological vector spaces. Math. Ann., I77, N 4, I968.

IO. В.Ф.Демьянов, А.М.Рубинов. Приближенные методы решения экстремальных задач. Изд. ЛГУ, 1968.

II. М.И.Зеликин, Н.Т.Тынянский. Детерминированные дифференциальные игры. УМН, 22, вып.4,/I24/, 1965.