Управляемые системы, ИМ, ИК СО АН СССР 1969 г. выпуск 3.
УДК.519.3.

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ С ДВУМЯ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

М.С.Никольский /Москва/

А/В n- мерном евклидовом пространстве R^n рассматривается движение вектора z, описываемое уравнением

$$\dot{z} = A(t)z + B(t)u - C(t)v, \qquad /1/$$

где $z \in R^n$, u - управляющий вектор, принадлежащий евклидову пространству R^p; v - управляющий вектор, принадлежащий евклидову пространству R^q; матрицы $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ имеют соответственно размерность $n \times n$, $p \times n$, $q \times n$ и являются непрерывными функциями t при всех t. Управляющий вектор u находится в распоряжении догоняющего, управляющий вектор v - в распоряжении убегающего. В R^n задано линейное подпространство M, при попадании на которое точки $z(t)$ игра считается законченной. Игра начинается из положения $z_0 \bar{\in} M$ в момент t_0. Цель догоняющего - по возможности быстрее вывести точку $z(t)$ на M. Для этого он использует следующую информацию об игре /1/: а/ знание уравнения /1/, б/ знание $z(t)$ и $v(t)$ в каждый момент t, в/ знание ограничений на управление u и на управление v. Мы будем рассматривать случай разнотипных ограничений на u и v. Именно, считается, что

$$u \in P, \quad v \in Q \qquad /2/$$

и что имеются ограничения на ресурсы управлений:

$$\int_{t_0}^{+\infty} |u(s)|ds \le \mu, \qquad \int_{t_0}^{+\infty} |v(s)|ds \le \nu, \qquad /3/$$

где P - выпуклый компакт из R^p, Q - ограниченное множество из R^q, $\mu > 0$, $\nu \ge 0$.

Цель настоящей заметки - дать достаточные условия, при выполнении которых из данной точки (z_0, t_0) можно закончить преследование при любом поведении убегающего за конечное, эффективно вычислимое время.

Б/ Обозначим ортогональное дополнение к M в R^n буквой L. Условимся обозначать через πz ортогональную проекцию вектора $z \in R^n$ на L. Положим размерность L $(dim\, L)$ равной k, где $0 < k \le n$ /случай $k = 0$ неинтересен/. Цель преследователя состоит в том, чтобы по возможности быстрее сделать $\pi z(t)$ равным нулевому вектору.

Пусть на отрезке $[t_0, t]$ фиксированы допустимые управления $u(\cdot)$, $v(\cdot)$, тогда из формулы Коши следует, что

$$\pi z(t) = \pi D(t, t_0) z_0 + \int_{t_0}^{t} \pi D(t,s)\big(B(s)u(s) - C(s)v(s)\big)ds, \qquad /4/$$

где $D(t, t_0)$ - фундаментальная матрица однородного уравнения $\dot{z} = A(t)z$, удовлетворяющая условию $D(t_0,t_0)=E$ - единичной матрице.

Обозначим через e_i $(i=1,\ldots,n)$ n - мерный вектор из R^n такой, что все его компоненты, кроме i -й, равны нулю, а i -я компонента равна 1. Не ограничивая общности, можно считать, что векторы $e_1,\ldots,e_k$ лежат в L, а $e_{k+1},\ldots,e_n$ - в M. Условимся рассматривать все векторы из L только в базисе $e_1,\ldots,e_k$. Равенство /4/ можно переписать теперь так

$$\pi z(t) = \pi D(t, t_0)z_0 + \int_{t_0}^{t} [F_1(t,s)u(s) - F_2(t,s)v(s)]ds, \qquad /5/$$

где матрица $F_1(t,s)$ имеет размерность $p \times k$, а матрица $F_2(t,s)$ -размерность $q \times k$, причем обе они непрерывны по совокупности переменных. Для дальнейшего нам понадобятся некоторые предположения.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. Размерность вектора u равна размерности линейного подпространства L, т.е. $p=k$.

Отсюда следует, что матрица $F_1(t,s)$ в /5/ является квадратной размерности $p \times p$. Рассмотрим выпуклое множество $F_1(t,s)P$ и ограниченное множество $F_2(t,s)Q$. Вычислим геометрическую разность $\overset{*}{-}$ множеств $F_1(t,s)P$, $F_2(t,s)Q$ /см. [1]/:

$$\hat{W}(t,s) = F_1(t,s)P \overset{*}{-} F_2(t,s)Q. \qquad /6/$$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2. Множество $\hat{W}(t,s)$ непусто при всех s,t, удовлетворяющих условию $s \leq t$, и содержит нулевой вектор. Множество $\hat{W}(t,s)$ содержит точку при $t > s$.

Отсюда и из определения операции $\overset{*}{-}$ следует, что $\hat{W}(t,s)$ при всех $t \geq s$ является выпуклым компактом и имеют место включения

$$F_2(t,s)Q + \hat{W}(t,s) \subset F_1(t,s)P, \qquad /7/$$

$$F_2(t,s)Q \subset F_1(t,s)P. \qquad /8/$$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 3. Матрица $F_1(t,s)$ при всех $t > s$ обратима. Матрица $F(t,s) = F_1^{-1}(t,s)F_2(t,s)$ является непрерывной по совокупности переменных t, s $(t \geq s)$.

Теперь мы рассмотрим функцию $\chi(t)$, определяемую формулой

$$\chi(t) = \sup_{v(\cdot)} \int_{t_0}^{t} |F(t,s)v(s)|ds, \qquad /9/$$

где на управление $v(\cdot)$ наложены ограничения /2/, /3/.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 4. $\mu > \chi(t)$ при всех $t \geq t_0$.

Рассмотрим множество

$$W(t,t_0,\mu,\nu) = \left\{ x : x = \int_{t_0}^{t} F_1(t,s)w(s)ds \right\}, \qquad /10/$$

где x - p - мерный вектор, $w(\cdot)$ - измеримая p - мерная векторная функция, удовлетворяющая ограничениям

$$\int_{t_0}^{t} |w(s)|ds \le \mu - \chi(t), \qquad /11/$$

$$F_1(t,s)w(s) \in \hat{W}(t,s). \qquad /12/$$

Легко видеть, что множество $W(t,t_0,\mu,\nu)$ является ограниченным и выпуклым. Покажем, что оно замкнуто. При $t=t_0$ множество W состоит из нулевого вектора. Рассмотрим случай $t>t_0$. Пусть последовательность векторов x_n, $n=1,2,\ldots$, принадлежит множеству $W(t,t_0,\mu,\nu)$ и сходится к вектору x^*.
Тогда

$$x_n = \int_{t_0}^{t} F_1(t,s)w_n(s)ds,$$

где измеримая функция $w_n(\cdot)$ удовлетворяет ограничениям /11/,/12/.

Условимся в дальнейшем символом $\mathcal{L}_2[a,b]$ обозначать гильбертово пространство p - мерных суммируемых с квадратом модуля на отрезке $[a,b]$ векторных функций и символом $\mathcal{L}_1[a,b]$ - банахово пространство p - мерных суммируемых по модулю на отрезке $[a,b]$ векторных функций. Относительно этих пространств имеется материал в книге [2]. Факты, известные для $\mathcal{L}_2[a,b]$ и $\mathcal{L}_1[a,b]$ в одномерном случае, обычно можно легко переформулировать на случай их p - мерных аналогов. Этим мы будем пользоваться, не делая специальных замечаний.

Положим $w_n(s)=F_1(t,s)w_n(s)$. Из включения /12/ следует, что $w_n(s)\in\hat{W}(t,s)$ при $t_0\le s\le t$. Пользуясь равномерной ограниченностью множеств $F_1(t,s)P$, $F_2(t,s)Q$ при $t_0\le s\le t$ и определением операций $\overset{*}{-}$, легко показать, что $\hat{W}(t,s)$ при $t_0\le s\le t$ равномерно ограничено. Из сказанного следует, что функции $w_n(\cdot)$ принадлежит некоторому шару конечного радиуса в пространстве $\mathcal{L}_2[t_0,t]$. Так как шар в $\mathcal{L}_2[t_0,t]$ слабо компактен, то из последовательности $w_n(\cdot)$ можно выделить слабо сходящуюся в смысле $\mathcal{L}_2[t_0,t]$ последовательность $w_{n_i}(\cdot)$, ее предел обозначим через $w^*(\cdot)$. Оказывается, можно утверждать, что почти при всех s функция $w^*(\cdot)$ удовлетворяет ограничению $w^*(s)\subset\hat{W}(t,s)$, $t_0\le s\le t$. Это следует из леммы.

ЛЕММА I. Из непрерывности множеств $F_1(t,s)P$, $F_2(t,s)Q$ по переменным t,s и из наличия внутренней точки у $\hat{W}(t,s)$ при $t>s$ следует непрерывность множества $\hat{W}(t,s)=F_1(t,s)P\overset{*}{-}F_2(t,s)Q$ в любой точке (t_1,s_1), для которой $t_1>s_1$.

Доказательство леммы несложно, мы его не приводим из-за недостатка места.

Итак, показано, что

$$x^* = \int_{t_0}^{t} w^*(s)ds = \lim_{n_i\to\infty}\int_{t_0}^{t} w_{n_i}(s)ds,$$

где $w^*(s)\in \hat{W}(t,s)$.

Возьмем теперь некоторое $\delta>0$, удовлетворяющее условию $t_0<t-\delta$. На отрезке $[t_0,t-\delta]$ рассмотрим функции $w_n(s)=F^{-1}(t,s)w_n(s)$.

Так как $F^{-1}(t,s)$ - непрерывная по s матрица на $[t_0,t-\delta]$, то функции $w_{n_i}(\cdot)$ на $[t_0,t-\delta]$ сходятся слабо в смысле $\mathcal{L}_2[t_0,t-\delta]$ к функции $w^*(s)=F^{-1}(t,s)w^*(s)$. Отсюда следует, что последовательность $w_{n_i}(\cdot)$ сходится слабо к $w^*(\cdot)$ на $[t_0,t-\delta]$ и в смысле $\mathcal{L}_1[t_0,t-\delta]$, но тогда, согласно замечанию на стр. 204 книги [3], из выполнимости неравенства /11/ для функций $w_{n_i}(\cdot)$ на $[t_0,t-\delta]$ следует, что

$$\int_{t_0}^{t-\delta}|w^*(s)|ds\leq\mu-\chi(t).$$

А отсюда, в силу произвольности $\delta>0$, следует, что

$$\int_{t_0}^{t}|w^*(s)|ds\leq\mu-\chi(t).$$

Таким образом, вектор x^* действительно принадлежит $W(t,t_0,\mu,\nu)$ и замкнутость этого множества доказана.

ТЕОРЕМА I. При сделанных предположениях I-IУ множество $W(t,t_0,\mu,\nu)$ зависит полунепрерывно сверху относительно включения по t справа при $t\geqslant t_0$, т.е. для данного $t_1\geqslant t_0$ и любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta(\varepsilon)>0$, что как только $0<t-t_1<\delta(\varepsilon)$ $W(t,t_0,\mu,\nu)\subset$ $\subset W(t_1,t_0,\mu,\nu)+S_\varepsilon$, где S_ε - p - мерный шар радиуса ε, а знак плюс означает алгебраическое сложение множеств.

Для доказательства теоремы нам понадобится

ЛЕММА 2. Функция $\chi(t)$ /см. формулу /9/ / полунепрерывна снизу по $t\,(t\geqslant t_0)$ справа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Фиксируем $t_1\geqslant t_0$ и рассмотрим $t>t_1$. Очевидно,

$$\chi(t)=\sup_{v(\cdot)}\int_{t_0}^{t}|F(t,s)v(s)|ds\geqslant\sup_{v(\cdot)}\int_{t_0}^{t_1}|F(t,s)v(s)|ds, \qquad /13/$$

где управление $v(\cdot)$ удовлетворяет условиям /2/, /3/. Используя непрерывность матричной функции $F(t,s)$ /см. предположение 3/ и ограничение /2/, получим

$$\int_{t_0}^{t_1}|F(t,s)v(s)|ds=\int_{t_0}^{t_1}|F(t_1,s)v(s)|ds+f(t,t_1),$$

где $f(t,t_1)$ стремится к 0 равномерно по функциям $v(\cdot)$ при $t-t_1\to 0$. Отсюда следует, что для любого $\varepsilon>0$ можно подобрать такое $\delta(\varepsilon)>0$, что при $0<t-t_1<\delta(\varepsilon)$ имеет место неравенство

$$\int_{t_0}^{t}|F(t,s)v(s)|ds\geqslant\int_{t_0}^{t_1}|F(t_1,s)v(s)|ds-\varepsilon/2,$$

отсюда и из неравенства /13/ вытекает, что при $0<t-t_1<\delta(\varepsilon)\ \chi(t)>\chi(t_1)-\varepsilon$, что и означает полунепрерывность снизу справа функции $\chi(t)$ в точке t_1. Лемма доказана. Теперь перейдем к доказательству теоремы I.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Фиксируем некоторое $t_1 \geqslant t_0$. Рассмотрим произвольный вектор x из множества $W(t,t_0,\mu,\nu)$, где $t>t_1$:

$$x=\int_{t_0}^{t} F_1(t,s)w(s)ds=\int_{t_0}^{t_1} F_1(t_1,s)w(s)ds+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}(F_1(t,s)-F_1(t_1,s))w(s)ds+\int_{t_1}^{t}F_1(t,s)w(s)ds, \qquad /14/$$

где p - мерная векторная функция $w(\cdot)$ удовлетворяет ограничениям /11/, /12/. Используя непрерывность матрицы $F_1(t,s)$ по совокупности аргументов, неравенство /11/ и включение /12/, мы получим из /14/

$$x=\int_{t_0}^{t_1} F_1(t_1,s)w(s)ds+f(t,t_1), \qquad /15/$$

где p - мерный вектор $f(t,t_1)$ стремится по модулю к 0 при $t-t_1\to 0$ $(t>t_1)$ равномерно по функциям $w(\cdot)$, удовлетворяющим условиям /11/, /12/. Если $t_1=t_0$, то

$$\int_{t_0}^{t_1} F_1(t,s)w(s)ds=0,$$

и $W(t_0,t_0,\mu,\nu)=0$, поэтому из /15/ следует что для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta(\varepsilon)>0$, что как только $t-t_0<\delta(\varepsilon)$ $W(t,t_0,\mu,\nu)\subset$ $\subset W(t_0,t_0,\mu,\nu)+S_\varepsilon$, т.е. теорема в этом частном случае доказана.

Теперь рассмотрим случай $t_1>t_0$. Возьмем малое $\gamma>0$ такое, что $t_1-\gamma>t_0$. Применяя включение /12/, из равенства /15/ имеем

$$x=\int_{t_0}^{t_1-\gamma} F_1(t_1,s)w(s)ds+f_1(t_1,\gamma)+f(t,t_1), \qquad /16/$$

где для вектора $f_1(t_1,\gamma)$ имеет место оценка $|f_1(t_1,\gamma)|\leqslant N_1\gamma$ /N_1 - константа/.

Согласно лемме I множество $\hat{W}(t,s)$ непрерывно по t,s на квадрате $K_\gamma=\{t,s: t_1\leqslant t\leqslant t_1+\gamma,\ t_0\leqslant s\leqslant t_1-\gamma\}$, отсюда следует равномерная непрерывность $\hat{W}(t,s)$ на этом квадрате. Следовательно, для любого $\varepsilon_1>0$ можно найти такое $\delta_1(\varepsilon_1)>0$, что при $0<t-t_1<\delta_1(\varepsilon_1)\hat{W}(t,s)\subset$ $\subset\hat{W}(t_1,s)+S_{\varepsilon_1}$, где $(t,s)\in K_\gamma$. Таким образом, можно утверждать, что при $0<t-t_1<\delta_1(\varepsilon_1)$ для функции $w(s)$ /см. /14//, удовлетворяющей ограничениям /11/, /12/, найдется такая измеримая функция $\hat{w}(s)$, удовлетворяющая ограничению /12/ при $t=t_1$, что $F_1(t,s)w(s)=$ $=F_1(t,s)\hat{w}(s)+\lambda(s)$, где измеримая функция $\lambda(s)$ удовлетворяет неравенству: $|\lambda(s)|\leqslant\varepsilon_1, t_0\leqslant s\leqslant t_1-\gamma$. На отрезке $[t_0,t_1-\gamma]$ матрица

$F_1(t_1, s)$ обратима, причем $F_1^{-1}(t_1, s)$ будет непрерывной на этом отрезке. Из предыдущего следует, что при $0<t-t_1<\delta_2(\varepsilon_2)$ $w(\cdot), \widetilde{w}(\cdot)$ удовлетворяют неравенству

$$|w(s)-\widetilde{w}(s)|<\varepsilon_2, \qquad /17/$$

при $t_0 \leqslant s \leqslant t_1-\gamma$. Доопределим функцию $\widetilde{w}(\cdot)$ на отрезке $[t_1-\gamma, t_1]$ нулевым вектором. Из неравенств /17/, /II/ следует, что

$$\int_{t_0}^{t_1} |\widetilde{w}(s)|ds \leqslant \mu-\chi(t)+\varepsilon_2(t_1-t_0). \qquad /18/$$

Используя лемму 2, можно утверждать, что при $0<t-t_1<\delta_3(\varepsilon_2)$ $\mu-\chi(t) \leqslant$ $\leqslant \mu-\chi(t_1)+\varepsilon_2$. Отсюда, из включения $0 \in \widehat{W}(t, s)$ и неравенства /18/ следует, что функция

$$\widetilde{\widetilde{w}}(s)=\frac{\mu-\chi(t_1)}{\mu-\chi(t_1)+\varepsilon_2(1+t_1-t_0)}\widetilde{w}(s), \quad t_0 \leqslant s \leqslant t_1 \qquad /19/$$

удовлетворяет ограничениям /II/, /I2/ при $t=t_1$. Из неравенств /I7/, /I9/ и предположения 4 следует при $0<t-t_1<\delta_4(\varepsilon_4)$, что

$$|w(s)-\widetilde{\widetilde{w}}(s)|<\varepsilon_4, \qquad /20/$$

где $t_0 \leqslant s \leqslant t_1-\gamma$.

Из соотношений /I6/, /20/ следует, что для заданного $\varepsilon>0$ можно подобрать такое малое $\gamma>0$ и малое $\delta(\varepsilon)>0$ что при $0<t-t_1<\delta(\varepsilon)$

$$x=\int_{t_0}^{t_1-\gamma} F_1(t_1, s)\widetilde{\widetilde{w}}(s)ds+y,$$

где функция $\widetilde{\widetilde{w}}(\cdot)$ удовлетворяет ограничениям /II/, /I2/ при $t=t_1$, а для вектора y выполняется оценка $|y|<\varepsilon$. Но тогда вектор

$$\int_{t_0}^{t_1-\gamma} F_1(t_1, s)\widetilde{\widetilde{w}}(s)ds=\int_{t_0}^{t_1} F_1(t_1, s)\widetilde{\widetilde{w}}(s)ds \in W(t, t_0, \mu, \nu)$$

теорема доказана.

Теперь мы рассмотрим вектор $-\pi D(t, t_0)z_0$ и множество $W(t, t_0, \mu, \nu)$ при $t \geqslant t_0$. Возможны два случая:

1/ $-\pi D(t, t_0)z_0 \overline{\in} W(t, t_0, \mu, \nu)$ при всех $t \geqslant t_0$;

2/ существует такое конечное $t_1 \geqslant t_0$, что выполняется включение

$$-\pi D(t_1, t_0)z_0 \in W(t_1, t_0, \mu, \nu). \qquad /21/$$

В первом случае мы ничего не можем сказать о возможности окончания преследования из точки (z_0, t_0). Во втором случае из теоремы I следует, что существует наименьшее t_1, при котором выполняется включение /2I/, его мы обозначим через $T(z_0, t_0, \mu, \nu)$.

ТЕОРЕМА 2. Из положения $/z_0, t_0/$ игра /I/ при любом допустимом поведении убегающего может быть завершена за время $\leqslant T(z_0, t_0, \mu, \nu)-t_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для краткости будем писать T вместо $T(z_0, t_0, \mu, \nu)$.

Пусть $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ - некоторые допустимые ограничениями /2/, /3/ управления, определенные на отрезке $[t_o,T]$, тогда из формулы /5/получаем

$$\pi z(T)=\pi D(T,t_o)z_o+\int_{t_o}^{T}[F_1(T,s)u(s)-F_2(T,s)v(s)]ds. \qquad /22/$$

Из включения /21/, определения числа T и определения множества $W(t,t_o,\mu,\nu)$ /см. /10/ / следует, что

$$-\pi D(T,t_o)z_o=\int_{t_o}^{T}F_1(T,s)\tilde{w}(s)ds, \qquad /23/$$

где $\tilde{w}(s)$ - измеримая функция, удовлетворяющая ограничениям /11/, /12/. Из определения функции $\chi(t)$ /см. /9/ /, неравенства /11/ и включений /7/, /8/, /12/ следует, что управление

$$u(s)=F(T,s)v(s)+\tilde{w}(s) \qquad /24/$$

является допустимым управлением для догоняющего. Но применяя свою информацию, догоняющий может строить такое управление. Используя формулы /22/, /23/, /24/, мы убеждаемся в том, что при выбранном способе преследования /24/$\pi z(T)=0$ т.е. гарантируется окончание игры в точности в момент T , теорема доказана.

в/ Способ преследовония, указанный в доказательстве теоремы 2 /см. /24/ /, обладает недостатком: он при любом поведении убегающего заканчивает преследование в точности в момент $T(z_o,t_o,\mu,\nu)$. В связи с этим представляет интерес разработка такого способа, который бы более гибко реагировал на поведение убегающего. Мы сейчас укажем один такой способ, который действует в предположении, что управление убегающего известно догоняющему на $\varepsilon>0$ вперед в каждый момент t , где ε - сколь угодно малое число. Обоснование реалистичности такой гипотезы для ограничений вида /2/ сделано в работе [1] , добавление ограничений /3/ в этом плане ничего не меняет.

Итак, пусть точка (z_o,t_o) такова, что для нее определено время $T(z_o,t_o,\mu,\nu)$, пусть управление убегающего $\bar{v}(\cdot)$ известно догоняющему на отрезке $[t_o,t_o+\varepsilon]$. Не ограничивая общности, можно считать, что $t_o+\varepsilon\leq T(z_o,t_o,\mu,\nu)$. Из формулы /23/ следует равенство

$$-\pi D(T,t_o)z_o=\int_{t_o}^{t_o+\varepsilon}F_1(T,s)\tilde{w}(s)ds+\int_{t_o+\varepsilon}^{T}F_1(T,s)\tilde{w}(s)ds. \qquad /25/$$

На отрезке $[t_o,t_o+\varepsilon]$ догоняющий может построить управление $\bar{u}(s)=F(T,s)\bar{v}(s)+\tilde{w}(s)$, которое /как было показано при доказательстве теоремы 2/ является допустимым. В момент $t_o+\varepsilon$ для управлений $v(\cdot)$, $u(\cdot)$, $w(\cdot)$ остаются соответственно ресурсы:

$$\nu(\varepsilon)=\nu-\int_{t_o}^{t_o+\varepsilon}|\bar{v}(s)|ds,\ \mu(\varepsilon)=\mu-\int_{t_o}^{t_o+\varepsilon}|\bar{u}(s)|ds,\ \lambda(\varepsilon)=\mu-\chi(t)-\int_{t_o}^{t_o+\varepsilon}|\tilde{w}(s)|ds. \qquad /26/$$

По построению любое управление $u(s)=F(T,s)v(s)+w(s)$, $t_0\leq s\leq T$, где $v(\cdot)$ и $w(\cdot)$ удовлетворяют ограничениям /2/, /3/, /11/, /12/, является допустимым для догоняющего. Отсюда и из соотношений /26/ следует, что при любых управлениях $v(\cdot)$, $w(\cdot)$, заданных на отрезке $[t_0+\varepsilon, T]$ и удовлетворяющих ограничениям

$$\int_{t_0+\varepsilon}^{T}|v(s)|ds\leq \nu(\varepsilon), \qquad \int_{t_0+\varepsilon}^{T}|w(s)|ds\leq\lambda(\varepsilon)$$

и ограничениям /2/, /12/, управление $u(s)=F(T,s)v(s)+w(s)$ удовлетворяет ограничению

$$\int_{t_0+\varepsilon}^{T}|u(s)|ds\leq\mu(\varepsilon).$$

Более того, из определения числа $\chi(T)$ следует, что управление $u(s)=F(T,s)v(s)+w(s)$ удовлетворяет неравенству

$$\int_{t_0}^{T}\left(|F(T,s)v(s)|+|w(s)|\right)ds\leq\mu.$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon}\left(|F(T,s)\bar v(s)|+|\tilde w(s)|\right)ds+\int_{t_0+\varepsilon}^{T}\left(|F(T,s)v(s)|+|w(s)|\right)ds\leq\mu,$$

где управления $v(\cdot)$, $w(\cdot)$ удовлетворяют ограничениям /2/, /12/, /27/. Из этого неравенства и соотношений /26/ получаем

$$\int_{t_0+\varepsilon}^{T}\left(|F(T,s)v(s)|+|w(s)|\right)ds\leq\mu-\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon}\left(|F(T,s)\bar v(s)|+|\tilde w(s)|\right)ds\leq\mu(\varepsilon)$$

Положим

$$\Delta(\varepsilon)=\sup_{v(\cdot)}\int_{t_0+\varepsilon}^{T}|F(T,s)v(s)|ds,$$

где $v(\cdot)$ удовлетворяет ограничениям /2/, /27/. Из неравенства /28/ и формул /26/, /28/ легко следует, что

$$\mu(\varepsilon)\geq\Delta(\varepsilon)+\lambda(\varepsilon). \qquad /29/$$

Рассмотрим теперь множество векторов вида

$$\int_{t_0+\varepsilon}^{T}F_1(T,s)w(s)ds,$$

где $w(\cdot)$ удовлетворяет ограничению /12/ и следующему интегральному ограничению

$$\int_{t_0+\varepsilon}^{T}|w(s)|ds\leq\mu(\varepsilon)-\Delta(\varepsilon) \qquad /30/$$

естественно его обозначить через $W(T,t_0+\varepsilon,\mu(\varepsilon),\nu(\varepsilon))$. Из нера-

венств /29/, /30/ следует /см.равенство /25/ /, что

$$\int_{t_0+\varepsilon}^{T} F_1(T,s)\tilde{w}(s)ds \in \dot{W}(T, t_0+\varepsilon, \mu(\varepsilon), v(\varepsilon)). \qquad /31/$$

Далее, из формул /4/, /5/ следует, что

$$\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} F_1(T,s)\tilde{w}(s)ds = \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} F_1(T,s)\bar{u}(s) - F_2(T,s)\bar{v}(s)ds = \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} \pi D(T,s)(B(s)\bar{u}(s)-$$

$$-C(s)\bar{v}(s))ds. \qquad /32/$$

Используя свойство матрицы $D(T,s)$ $:D(T,s)=D(T,t_0+\varepsilon)D(t_0+\varepsilon, s)$,где $t_0 \leq s \leq t_0+\varepsilon$,и формулы /25/, /31/, /32/, получим

$$-\pi D(T,t_0+\varepsilon)(D(t_0+\varepsilon,t_0)z_0) + \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} D(t_0+\varepsilon,s)(B(s)\bar{u}(s)-$$

$$-C(s)\bar{v}(s))ds = -\pi D(T,t_0+\varepsilon)z(\varepsilon) \in W(T,t_0+\varepsilon,\mu(\varepsilon),v(\varepsilon)).$$

Может оказаться, что момент T является не наименьшим, удовлетворяющим этому соотношению. Можно доказать,что существует наименьшее $T_1 \leq T$. Очевидно,что $T_1-t_0-\varepsilon \leq T-t_0-\varepsilon$.Продолжая подобные шаги дальше, мы завершим преследование за время $\leq T(z_0,t_0,\mu,v)-t_0$.

г/ В этом пункте мы рассмотрим известный пример Л.С.Понтрягина /см. [4] / при двух ограничениях:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= -\alpha z_2 + \rho u, \\ \dot{z}_3 &= z_4, \\ \dot{z}_4 &= -\beta z_4 + \sigma v, \end{aligned} \qquad /33/$$

где z_1, z_2, z_3, z_4, u, v - p - мерные векторы /$p \geq 1$ /$\rho>0$,$\alpha>0$, $\beta>0, \sigma>0$ и на управления $u(\cdot), v(\cdot)$ наложены ограничения:

$$|u| \leq 1, \qquad |v| \leq 1, \qquad /34/$$

$$\int_0^{+\infty} |u(s)|ds \leq \mu, \qquad \int_0^{+\infty} |v(s)|ds \leq v. \qquad /35/$$

Заметим, что система /33/ стационарна, так что можно считать, что игра начинается в момент $t=0$, поэтому нижние пределы в интегралах /35/ положены равными 0 . Целью преследования в задаче /33/является выполнение равенства $z_1 = z_3$.

Чтобы воспользоваться развитой теорией надо было бы перейти к новому базису, у которого первые p базисных векторов лежат в подпространстве L , ортогональном подпространству $M=\{z: z_1=z_3\}$.Однако переход к новому базису может усложнить систему /33/. Мы поступим по-другому: будем рассматривать задачу в старых координатах, а для ее решения применим основные идеи нашего метода.

Рассмотрим p -мерные векторы $Q_i(i=1,\dots,p)$, у которых все ком-

поненты нули, за исключением i -й, которая равна I. Образуем из них новые 4ρ -мерные векторы $e_i = \frac{1}{2}(a_i, 0, -a_i, 0)$ $(i=1,\ldots,\rho)$, где 0 означает ρ -мерный вектор, целиком состоящий из нулей. Нетрудно видеть, что векторы e_i образуют базис подпространства L и обладают тем свойством, что вектор πz /где $z=(z_1, z_2, z_3, z_4)$ / записывается в этом базисе весьма просто: его координаты образуют вектор $z_1 - z_3$. В дальнейшем все векторы из L будут рассматриваться только в базисе $e_1, \ldots, e_\rho$.

Если допустимые управления $u(\cdot), v(\cdot)$ заданы на отрезке $[0, t]$, то нетрудно выписать $\pi z(t)$:

$$\pi z(t) = z_1^0 - z_3^0 + \int_0^t e^{-\alpha s} ds\, z_2^0 - \int_0^t e^{-\beta s} ds\, z_4^0 + \int_0^t \Big[\frac{1 - e^{-\alpha(t-s)}}{\alpha} \rho E_\rho u(s) - \frac{1 - e^{-\beta(t-s)}}{\beta} \sigma E_\rho v(s) \Big] ds,$$

где E_ρ -единичная матрица порядка ρ.

Цель преследования состоит в том, чтобы сделать поскорее $\pi z(t)$ равным нулевому вектору. В соответствии с нашим методом мы сначала вычисляем множество

$$\frac{1 - e^{-\alpha(t-s)}}{\alpha} \rho E_\rho P \overset{*}{-} \frac{1 - e^{-\beta(t-s)}}{\beta} \sigma E_\rho Q = \hat{W}(t,s),$$

где P - множество векторов u, удовлетворяющих неравенству $|u| \leq 1$, Q - множество векторов v, удовлетворяющих неравенству $|v| \leq 1$.

Относительно констант $\rho, \alpha, \sigma, \beta$ будем предполагать выполненными неравенства

$$\rho \geq \sigma, \quad \frac{\rho}{\alpha} \geq \frac{\sigma}{\beta},$$

однако одновременное превращение обоих этих неравенств в точные равенства исключается. Из вычислений Л.С.Понтрягина /см. [4] / следует, что при выполнении неравенств /36/

$$\rho \frac{1 - e^{-\alpha(t-s)}}{\alpha} - \sigma \frac{1 - e^{-\beta(t-s)}}{\beta} > 0$$

при всех $0 \leq s \leq t$. Нетрудно теперь видеть, что

$$\hat{W}(t,s) = \Big(\rho \frac{1 - e^{-\alpha(t-s)}}{\alpha} - \sigma \frac{1 - e^{-\beta(t-s)}}{\beta} \Big) R,$$

где R - множество ρ -мерных векторов x, удовлетворяющих неравенству $|x| \leq 1$.

Далее мы рассмотрим матрицу

$$F(t,s) = \frac{\sigma\alpha}{\rho\beta} \cdot \frac{1 - e^{-\beta(t-s)}}{1 - e^{-\alpha(t-s)}} E_\rho.$$

Заметим, что скалярная функция

$$f(t,s)=\frac{\sigma\alpha}{\rho\beta}\,\frac{1-e^{-\beta(t-s)}}{1-e^{-\alpha(t-s)}}$$

при $s\to t$ имеет предел, равный $\frac{\sigma}{\rho}$, и непрерывна по совокупности переменных $t,s(0\leqslant s\leqslant t)$.

Рассмотрим функцию

$$\chi(t)=\sup_{v(\cdot)}\int_0^t|f(t,s)v(s)|ds, \qquad /37/$$

где управление $v(\cdot)$ удовлетворяет ограничениям /34/, /35/.

Из неравенства /36/ согласно работе [4] следует, что $0<f(t,s)<1$ при всех $0\leqslant s\leqslant t$. Отсюда и из /35/ следует, что $\chi(t)$ /см./37/ / удовлетворяет неравенству $\chi(t)<\nu$. Таким образом, для того, чтобы при всех $t\geqslant 0$ имело место неравенство $\mu-\chi(t)>0$ достаточно, чтобы μ было больше ν. В дальнейшем неравенство $\mu>\nu$ предполагается выполненным. Определим множество $W(t,\mu,\nu)$ как совокупность векторов x вида:

$$x=\int_0^t\rho\,\frac{1-e^{-\alpha(t-s)}}{\alpha}\,w(s)ds,$$

где функция $w(\cdot)$ удовлетворяет ограничениям

$$\int_0^t|w(s)|ds\leqslant\mu-\chi(t),\quad \rho\frac{1-e^{-\alpha(t-s)}}{\alpha}w(s)\in\hat{W}(t,s),\ 0\leqslant s\leqslant t.$$

Теперь рассмотрим уравнение во включениях

$$-z_1^0+z_3^0-\int_0^t e^{-\alpha s}ds\,z_2^0+\int_0^t e^{-\beta s}ds\,z_4^0\in W(t,\mu,\nu).$$

Пусть вектор $z^0=(z_1^0,z_2^0,z_3^0,z_4^0)$ таков, что оно имеет положительное решение $t(z_0)$. Обозначим через $T(z_0,\mu,\nu)$ наименьшее положительное решение. Опираясь на вышеприведенную теорию можно показать, что за время $T(z_0,\mu,\nu)$ можно завершить преследование из точки z_0, причем обоими способами.

Поступила в редакцию II.II.1969 г.

Литература

I. Л.С.Понтрягин, О линейных дифференциальных играх I, ДАН СССР, т. 174, № 6, 1967.

2. Н.Н.Красовский, Теория управления движением, М.,Наука,1968.

3. Л.А.Люстерник и В.И.Соболев, Элементы функционального анализа, М. и Л., ГИТТЛ, 1951.

4. Л.С.Понтрягин, К теории дифференциальных игр, УМН, т.21, вып. 4 /130/, 1966.