Управляемые системы, ИМ, ИК СО АН СССР 1969 г. выпуск 3.
УДК.519.3.

ЗАДАЧА О ПЕРЕХОДЕ ПРЕСЛЕДУЕМОГО ОБЪЕКТА В ПРЕДПИСАННУЮ КОНЕЧНУЮ ТОЧКУ

В.Н.Лагунов

В ряде работ рассматривается задача преследования, в которой убегающий объект, кроме основной задачи - избежать захвата - вынужден одновременно решать некоторые дополнительные задачи. Например, в [I] преследуемый объект стремится достичь "линии жизни"; в [2] убегающий объект старается как можно меньше отклониться от оптимальной траектории перехода в заданную точку и т.д.

В данной заметке рассматривается задача сходная с задачей, приведенной в п. 4 работы [2] .

ЗАДАЧА: преследуемый объект должен прийти в любую заданную точку А , избежав при этом захвата /под захватом понимается совпадение точек-объектов преследуемого и преследующего/.

Сформулированная задача с точки зрения работы [I] есть игра преследования с "точкой жизни". Однако классы допустимых движений, для которых решается задача, отличаются от простых движений объектов, рассматриваемых в [I] . А именно, упомянутые классы допустимых движений есть равномерные движения по траекториям ограниченной кривизны.

Сформулируем задачу более точно. Предполагаются выполненными следующие требования /используются обозначения работы [2] /.

I/ Движение объектов происходит в n -мерном евклидовом пространстве E^n , где

$$n \geq 3. \tag{I}$$

2/ Игра происходит при наличии полной информации /впрочем, не используемой полностью преследуемым объектом при формировании своего управления/. Поведение противника в будующем не предполагается известным.

3/ Движение i -го объекта /при $i=1$ преследуемого, при $i=2$ преследующего/ описывается дифференциальным включением

$$\ddot{\bar{r}}_i(t) \in W_i(\dot{\bar{r}}_i(t)), \bar{r}_i(0)=\bar{r}_i^0 , \dot{\bar{r}}_i(0)=v_i , t \geq 0 \tag{2}$$

при условии

$$0 < v_1 < v_2 , \tag{3}$$

где $\bar{r}_i(t)$ -радиус-вектор i -го объекта относительно некоторой системы координат Ω в E^n ; $\ddot{\bar{r}}_i(t)$ -измеримая вектор-функция, отождествляемая с управлением i -го объекта; $W_i(\dot{\bar{r}}_i(t))$ $-(n-1)$ -мерный круг радиуса w_i с центром в начале координат O системы Ω и ортогональный скорости $\dot{\bar{r}}_i(t)$; включение в /2/ следует понимать так: если начало вектора $\ddot{\bar{r}}_i(t)$ поместить в O , то конец его будет принадлежать кругу $W_i(\dot{\bar{r}}_i(t))$.

Подробное описание движения типа /2/ дано в [2]. Легко видеть, что i -й объект движется по траектории, кривизна которой /в точках, где она существует/ ограничена сверху числом W_i/v_i^2. Условие /3/ вполне естественно. Требование же /1/ носит чисто технический характер и при некотором дополнительном ограничении на начальные положения $\bar{r}_i(0)$ объектов может быть ослабленно до неравенства $n \geqslant 2$. Указанного дополнительного ограничения мы не вводим, чтобы не усложнять изложения.

Пусть далее выполнено еще и такое требование:

4/ Отношение $\frac{W_1}{W_2}$, где W_2 предполагается некоторой константой, достаточно велико.

Тогда при выполнении требований 1/ - 4/ преследуемый объект, как будет сейчас показано, в состоянии решить сформулированную выше задачу. Решение будет лишь намечено, поскольку конструкции и приемы решения аналогичны приведенным в [2] /см.п.4/.

Для решения задачи достаточно должным образом распорядиться параметром α и свободным управлением $\tilde{\tilde{f}}_1$ преследуемого объекта в соотношениях /4.3/, /4.4/ работы [2] /т.е. при построении стратегии $\bar{f}_1$ убегающего объекта/. Легко видеть, что при достаточно малом α и достаточно большом W_1 создается следующее положение. Для $t \in [t', t'+\tau]$ точка $\bar{r}(t)$ принадлежит множеству $Z(t,t')$, а для $t \in [t', t'+\alpha\theta]$ еще и множеству $Y(t,t')$; тем самым для $t \in [t', t'+\tau]$ $\bar{r}(t)$ в нуль не обращается, и, следовательно, преследуемый и преследующий объекты не встречаются. При этом на отрезке $[t'+\theta\alpha, t'+\tau]$, где

$$\frac{\tau - \theta\alpha}{\theta\alpha} \qquad /4/$$

достаочно велико, управление преследуемого объекта может быть любым допустимым. Распорядимся этим управлением следующим образом. Пусть $Q(t'+\theta\alpha)$- двумерная плоскость, проходящая в момент $t=t'+\theta\alpha$ через точку $\bar{r}(t'+\theta\alpha)$, точку А и содержащая вектор $\dot{\bar{r}}_1(t'+\theta\alpha)$. Положим

$$f_1 = \begin{cases} W_1, \ t \in [t'+\theta\alpha, t'+\theta\alpha+\nu), \\ 0, \ t \in [t'+\theta\alpha+\nu, t'+\tau], \end{cases} \qquad /5/$$

где $\nu > 0$ и f_1 выбраны таким образом, чтобы движение точки $\bar{r}_1(t)$ для первого полуинтервала времени в /5/ проходило по окружности максимальной для убегающего объекта кривизны, а для второго отрезка времени в /5/ - по прямой, проходящей через точку А в сторону этой точки, причем описанный кусок траектории должен располагаться в плоскости $Q(t'+\theta\alpha)$. Время ν движения убегающего объекта по упомянутой дуге окружности не превосходит величины $\frac{2\pi v_1}{W_1}$. В силу 4/ можно считать W_1 достаточно большим; ранее мы согласились считать параметр α достаточно малым. Из сказанного и /4/ следует, что можно считать выполненным неравенство

$$\theta\alpha + \frac{2\pi v_1}{w_1} < \frac{\tau}{3}. \qquad /6/$$

Но тогда движение убегающего объекта под воздействием построенной нами стратегии $\bar{f}_1$ /См. [2], /4.4/ /, которую для $t>\tau$, но меньшего следующего критического момента следует определять вторым равенством в /5/, по времени можно будет разбить на 2 типа. На промежутках времени T_k', $k=1,2,\ldots$, длины $<\frac{\tau}{3}$ /см. /6/ / преследуемый объект движется некоторым допустимым образом. На промежутках времени T_k'', $k=1,2,\ldots$, длины $>\frac{2}{3}\tau$ преследуемый объект движется по прямой к точке А. Упомянутые промежутки времени упорядочены естественным образом

$$T_1', T_1'', T_2', T_2'', \ldots \qquad /7/$$

Ясно, что за время, соответствующее промежутку $T_k' \cup T_k''$, расстояние от преследуемого объекта до точки А в силу построенной нами стратегии $\bar{f}_1$, сократится не меньше чем на величину $v_1(T_k - \frac{1}{3}\tau)$, где T_k – длина промежутка $T_k' \cup T_k''$. Поскольку расстояния между соседними промежутками типа T_k' в /7/ больше $\frac{2}{3}\tau$, стратегия $\bar{f}_1$, очевидно, решает задачу, сформулированную в начале заметки.

Поступила в редакцию 20.II.1969 г.

Литература

1. Л.А.Петросян, Игры преследования с "линией жизни". Вестник ЛГУ, № 13, вып. 3, 1967.

2. В.Н.Лагунов, Об управлении преследуемого объекта. Дискретный анализ, Новосибирск, 1968, 13.