Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1990 г., вып. 30

УДК 519.854

ОБОСНОВАНИЕ УСЛОВИЙ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ТОЧНОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА НА МАКСИМУМ В СЛУЧАЕ ДИСКРЕТНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Э.Х.Гимади, Н.К.Максишко

Данная статья, продолжая работу [1] одного из авторов, посвящена обоснованию условий асимптотической точности приближенного эффективного алгоритма $\mathcal{A}$ - "Иди в самый удаленный непройденный город" - для задачи коммивояжера на максимум ($3K_{max}$):

$$L(\pi) = \sum_{k=1}^{n} c_{\pi_k \pi_{k+1}} \longrightarrow \max_{\pi},$$

где $\pi = (\pi_j)$ $(j = 1, \dots, n)$ - перестановка натуральных чисел $1, \dots, n$; $\pi_1 = \pi_{n+1}$.

В [1] изучался класс задач $3KH_{max}$ - с непрерывной функцией распределения (ф.р.) элементов $n \times n$ -матрицы (c_{ij}), $a_n \le c_{ij} \le b_n$, $1 \le i, j \le n$; было показано, что алгоритм $\mathcal{A}$ асимптотически точен, если интеграл

$$\int_0^{1-1/n} \frac{dx}{1 - F_\xi(x)}$$

ведет себя как функция $\psi_n = O(n)$, $\lim_{n\to\infty} \psi_n = \infty$. Здесь обозначено $F_\xi(x) = P\{x < \xi\}$ - одинаковая ф.р. случайных независимых величин

$$\xi = (c_{ij} - a_n)/(b_n - a_n), \quad 1 \le i, j \le n.$$

В случае $3KH_{max}$ с равномерной ф.р. $F_\xi(x) = x$, $0 \le x \le 1$, указанные условия выполняются автоматически. Заметим, что и в более общем случае ф.р. минорирующего типа $(F_\xi(x) \le x,\ 0 \le x \le 1)$ алгоритм $\mathcal{A}$ для решения задачи из класса $3KH_{max}$ асимптотически точен без каких-либо дополнительных условий. Этот факт легко получается, поскольку верхнюю оценку для математического ожидания (м.о.) величины $\varepsilon_{\mathcal{A}}^{o}$ (см. [1, с. 13]) можно положить равной

$$\widetilde{M\varepsilon}_{\mathcal{A}}^{o} = 1 + \ln n .$$

Ниже мы рассмотрим класс задач $\exists K \mathcal{D}_{max}$ с элементами матрицы (c_{ij}), выбираемыми случайно и независимо друг от друга с одинаковой дискретной ф.р.

$$p_s = P\{ c_{ij} = s \},\ s = 1, \dots, \tau;\ \sum_{s=1}^{\tau} p_s = 1, \qquad (1)$$

где $\tau = \tau_n$ - целочисленная функция от n.

Следуя [1 -3], напомним, что алгоритм $\mathcal{A}$ для решения задачи на максимум имеет оценки точности (относительной погрешности) $\varepsilon_{\mathcal{A}}$ и вероятности несрабатывания $\delta_{\mathcal{A}}$, если

$$P\{ L_{\mathcal{A}} < (1 - \varepsilon_{\mathcal{A}}) L^* \} \le \delta_{\mathcal{A}},$$

где L^*, $L_{\mathcal{A}}$ - соответственно точное (максимальное) и приближенное (получаемое алгоритмом $\mathcal{A}$) значения целевой функции. Алгоритм $\mathcal{A}$ асимптотически точен, если найдутся оценки $\varepsilon_{\mathcal{A}}$, $\delta_{\mathcal{A}}$, стремящиеся к нулю с ростом размерности задачи.

Займемся анализом непосредственно алгоритма "Иди в самый удаленный город". Его трудоемкость, очевидно, равна $O(n^2)$. В соответствии с принципом его работы мы получаем целевую функцию

$$L_{\mathcal{A}}(\pi) = \sum_{k=1}^{n} c_{\pi_k \pi_{k+1}},$$

где k -е слагаемое $c_{\pi_k \pi_{k+1}}$, $1 \le k \le n$, есть максимум из $(n-k)$ независимых случайных величин, имеющих одинаковую ф.р. (1). Последнее n -е слагаемое $c_{\pi_n \pi_1}$ имеет распределение аналогично $(n-1)$-му слагаемому $c_{\pi_{n-1} \pi_n}$. Из определения величин $c_{\pi_k \pi_{k+1}}$, $1 \le k < n$, следует, что

$$P\{ c_{\pi_k \pi_{k+1}} \le s \} = F_s^{n-k},\ 1 \le k < n,$$

где $F_s = \sum_{t=1}^{s} p_t$, откуда для м.о. этих величин получим

$$M c_{\pi_k \pi_{k+1}} = \sum_{s=1}^{\tau_n} s\, P\{ c_{\pi_k \pi_{k+1}} = s \} =$$

$$= \sum_{s=1}^{\tau_n} s \left(P\{ c_{\pi_k \pi_{k+1}} \le s \} - P\{ c_{\pi_k \pi_{k+1}} \le s-1 \} \right) =$$

$$= \tau_n - \sum_{s=1}^{\tau_n - 1} P\{ c_{\pi_k \pi_{k+1}} \le s \} = \tau_n - \sum_{s=1}^{\tau_n - 1} F_s^{n-k},\ 1 \le k < n. \qquad (2)$$

Обозначим $\ell_A = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$, где

$$\xi_k = \frac{\tau_n - c_{\pi_k \pi_{k+1}}}{\tau_n - 1} ,$$

– независимые случайные дискретные величины,

$$\xi_k \in \left\{0, \frac{1}{\tau_n - 1}, \frac{2}{\tau_n - 1}, \ldots, 1\right\}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Оценим сверху величину м.о. ℓ_A с учетом соотношений (2) и

$$M c_{\pi_n \pi_1} = M c_{\pi_{n-1} \pi_n} :$$

$$M\ell_A = M \sum_{k=1}^{n} \xi_k = \sum_{k=1}^{n} M\xi_k = \sum_{k=1}^{n} M\left(\frac{\tau_n - c_{\pi_k \pi_{k+1}}}{\tau_n - 1}\right) =$$

$$= \frac{1}{\tau_n - 1}\left(n\tau_n - \sum_{k=1}^{n-1} M c_{\pi_k \pi_{k+1}} - M c_{\pi_{n-1} \pi_n}\right) =$$

$$= \frac{1}{\tau_n - 1}\left(n\tau_n - \sum_{k=1}^{n-1}\left(\tau_n - \sum_{s=1}^{\tau_n - 1} F_s^{n-k}\right) - \left(\tau_n - \sum_{s=1}^{\tau_n - 1} F_s\right)\right) \le$$

$$\le \frac{1}{\tau_n - 1} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{s=1}^{\tau_n - 1} F_s^k . \tag{3}$$

Обозначим через $\widetilde{M\ell_A}$ верхнюю оценку величины $M\ell_A$.

Оценим вероятность несрабатывания алгоритма A , учитывая очевидные неравенства

$$L^* \le n\tau_n , \quad M\ell_A \le \widetilde{M\ell_A} :$$

$$P\{L_A < (1-\varepsilon_A)L^*\} = P\left\{\sum_{k=1}^{n} c_{\pi_k \pi_{k+1}} < (1-\varepsilon_A)L^*\right\} \le$$

$$\le P\left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{\tau_n - c_{\pi_k \pi_{k+1}}}{\tau_n - 1} > \frac{n\tau_n \varepsilon_A}{\tau_n - 1}\right\} =$$

$$= P\left\{\ell_A > \frac{n\tau_n \varepsilon_A}{\tau_n - 1}\right\} \le P\left\{\ell_A - M\ell_A > \frac{n\tau_n \varepsilon_A}{\tau_n - 1} - \widetilde{M\ell_A}\right\} . \tag{4}$$

Положим

$$\varepsilon_A = \beta \frac{\tau_n - 1}{n\tau_n} \widetilde{M\ell_A} , \tag{5}$$

где β – константа, $\beta > 1$, и продолжим оценивание (4) с учетом неравенства Чебышева и факта, что дисперсия суммы независимых случайных величин ξ_k , $0 \le \xi_k \le 1$, $k = 1, \ldots, n$, не больше м.о. их суммы:

$$P\{L_A < (1-\varepsilon_A)L^*\} \le P\{\ell_A - M\ell_A > (\beta-1)\widetilde{M\ell_A}\} \le$$

$$\le P\{|\ell_A - M\ell_A| > (\beta-1)\widetilde{M\ell_A}\} \le \frac{D\ell_A}{(\beta-1)^2 \widetilde{M\ell_A}} \le \frac{1}{(\beta-1)^2 \widetilde{M\ell_A}} = \delta_A. \qquad (6)$$

Окончательно соотношения (3), (5), (6) дают нам возможность получить нижеследующие утверждения.

Т е о р е м а 1. Алгоритм A для решения задачи из класса $3KD max$ асимптотически точен, если функция

$$\mathcal{F}_n = \frac{1}{\tau_n - 1} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{s=1}^{\tau_n - 1} F_s^k$$

ограничена функцией, ведущей себя как Ψ_n при $n \to \infty$.

Доказательство получим с учетом (3), положив верхнюю оценку м.о. ℓ_A равной $\widetilde{M\ell_A} = \Psi_n$ и подставив его в (5) и (6):

$$\varepsilon_A = \beta \frac{\tau_n - 1}{n\tau_n} \Psi_n \to 0,$$

$$\delta_A = \frac{1}{(\beta-1)^2 \Psi_n} \to 0$$

при $n \to \infty$.

С л е д с т в и е 1. Алгоритм A для решения задачи из класса $3KD max$ асимптотически точен, если $p_{\tau_n} \ge \frac{1}{\Psi_n}$.

Доказательство следует непосредственно из утверждения, поскольку из очевидных неравенств

$$F_s \le 1 - p_{\tau_n}, \quad 1 \le s < \tau_n,$$

имеем

$$\mathcal{F}_n = \frac{1}{\tau_n - 1} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{s=1}^{\tau_n - 1} F_s^k \le \sum_{k=0}^{n-1} (1 - p_{\tau_n})^k \le \frac{1}{p_{\tau_n}} \le \Psi_n .$$

С учетом сказанного в начале статьи о классе $3KH max$ с ф.р. минорирующего типа имеем также

С л е д с т в и е 2. Алгоритм A для решения задачи из класса $3K max$ с ф.р. минорирующего типа асимптотически точен.

Доказательство следует из того, что для задачи из класса $3KD max$ с ф.р. минорирующего типа ($F_s \le s/\tau_n$, $s = 1, \dots, \tau_n$) справедлива цепочка соотношений:

$$J_n = \frac{1}{r_n - 1} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{s=1}^{r_n-1} F_s^k \le \frac{1}{r_n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{s=1}^{r_n-1} \left(\frac{s}{r_n}\right)^k \le$$

$$\le \frac{r_n}{r_n - 1} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 x^k\, dx = \frac{r_n}{r_n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \le \frac{r}{r_n-1}(1+\ln n),$$

т.е. выполнены условия теоремы 1.

Следствие 3. Алгоритм $\mathcal{A}$ на классе задач $3K_{max}$ с равномерной ф.р. асимптотически точен.

Поступила в ред.-изд. отдел
1 августа 1990 г.

Литература

1. Гимади Э.Х. Задача коммивояжера на максимум: условие асимптотической точности алгоритма "Иди в самый удаленный город" // Модели дискретной оптимизации (Управляемые системы). - Новосибирск, 1989. - Вып. 29. - С. 11-15.

2. Гимади Э.Х., Глебов Н.И., Перепелица В.А. Алгоритмы с оценками для задач дискретной оптимизации // Проблемы кибернетики. - М.: Наука, 1975. - Вып. 31. - С. 35-42.

3. Гимади Э.Х. О некоторых математических моделях и методах планирования крупномасштабных проектов // Модели и методы оптимизации. - Новосибирск: Наука, 1988. - (Тр. / АН СССР Сиб. отд-ние. Ин-т математики; т.10). - С. 89-115.