Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1990 г., вып. 30

УДК 519.854

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА КВАДРАТИЧНЫХ ФУНКЦИЙ С БУЛЕВЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

И.В.Гребенник, С.В.Яковлев

Рассмотрим задачу булевой квадратичной оптимизации в следующей постановке.

Минимизировать

$$f(z)=(Az,z)+(b,z), \tag{1}$$

где $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ -эрмитова $n\times n$ -матрица, $b=(b_1,b_2,\dots,b_n)\in R^n$, $z=(z_1,z_2,\dots,z_n)\in R^n$, $z_i\in\{0,1\}$, $i=1,2,\dots,n$. Множество всевозможных булевых векторов в пространстве R^n обозначим через $\overline{B}_n$.

Точки множества $\overline{B}_n$ и только они удовлетворяют системе

$$\left.\begin{aligned} &0\le z_i\le 1, \quad i=1,2,\dots,n;\\ &\sum_{i=1}^{n}\left(z_i-\tfrac{1}{2}\right)^2=\frac{n}{4}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Заметим, что первые n неравенств системы (2) описывают n-мерный куб $\overline{Q}_n^2\subset R^n$. Последнее соотношение системы (2) представляет собой уравнение сферы $\overline{S}_n\subset R^n$ с центром в точке $z_0=(1/2,1/2,\dots,1/2)$ и радиусом $\sqrt{n}/2$. Таким образом, множество $\overline{B}_n$ лежит на пересечении куба $\overline{Q}_n^2$ и сферы $\overline{S}_n$.

Рассмотрим произвольное выпуклое замкнутое множество $\overline{X}$, такое что $\overline{B}_n\subset\overline{X}$ (в качестве $\overline{X}$ могут выступать, например, множество $\overline{Q}_n^2$, замкнутый шар с границей $\overline{S}_n$ и т.д.). Вместо функции (1) введем в рассмотрение выпуклую непрерывную на $\overline{X}$ квадратичную функцию, совпадающую по значению с функцией (1) в точках множества $\overline{B}_n$. Такая функция может быть построена из (1) с использованием справедливых для точек множества $\overline{B}_n$ соотношений:

$$z_i z_j=((z_i+z_j)^2-z_i-z_j)/2, \tag{3}$$

$$-z_i z_j=((z_i-z_j)^2-z_i-z_j)/2. \tag{4}$$

В правых частях выражений (3) и (4) выпуклые функции. Значит, квадратичная

функция, построенная из исходной путем замены $z_i z_j$ и $-z_i z_j$ соответствующими правыми частями выражений (3) и (4), также будет выпуклой как линейная комбинация выпуклых функций. Она будет иметь следующий вид:

$$\Psi(z)=((A+\mu I)z, z)+((b-\mu), z),$$

где

$$\mu=(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n), \ \mu_i=\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|, \ i=1,2,\ldots,n,$$

I - единичная $n\times n$ - матрица.

Учтем при этом, что для любого $z\in \overline{B}_n$ справедливо соотношение

$$\sum_{i=1}^{n} z_i^2 = \sum_{i=1}^{n} z_i .$$

Тогда функция

$$\widetilde{\Psi}(z)=\Psi(z)+\rho\sum_{i=1}^{n}(z_i^2-z_i), \quad \rho>0,$$

является сильно выпуклой с параметром сильной выпуклости не менее ρ.

Положим

$$x_i = z_i - 1/2, \quad i=1,2,\ldots,n.$$

В результате преобразования множеств $\overline{B}_n$, $\overline{S}_n$, $\overline{Q}_n^2$, $\overline{X}$ получим соответственно множества B_n, S_n, Q_n^2, X. Таким образом, исходная задача без потери общности преобразуется к виду:

минимизировать сильно выпуклую (с параметром ρ) функцию

$$\varphi(x)=(Wx, x)+(v, x), \tag{5}$$

$$\|x\|^2=\frac{n}{4}, \ -1/2\le x_i\le 1/2, \ i=1,2,\ldots,n, \tag{6}$$

где W - строго положительно определенная эрмитова $n\times n$ -матрица с минимальным собственным числом $\lambda\geq\rho>0$, $v\in R^n$.

Рассмотрим некоторые экстремальные свойства функции $\varphi(x)$ вида (5) на множестве B_n, определяемом соотношениями (6).

Теорема 1. Для любого $y\in X$ верна нижняя оценка

$$\min_{x\in B_n}\varphi(x)\geq\varphi(y)+(\nabla\varphi(y), x^*-y)+\rho\|x^*-y\|^2, \tag{7}$$

где

$$x_i^* = \begin{cases} -1/2, & \text{если } y_i - \frac{1}{2\rho}\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_i} \leq 0, \\ 1/2, & \text{если } y_i - \frac{1}{2\rho}\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_i} > 0, \end{cases} \tag{8}$$

$i = 1, 2, \ldots, n.$

Доказательство. Для всех $x, y \in X$ справедливо [1] неравенство:

$$\varphi(x) - \varphi(y) \geq (\nabla\varphi(y), x - y) + \rho\|x - y\|^2.$$

Откуда

$$\min_{x\in B_n}\varphi(x) - \varphi(y) \geq \min_{x\in B_n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}(x_i - y_i) + \rho(x_i - y_i)^2\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\min_{x_i\in\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\}}\left(\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_i}(x_i - y_i) + \rho(x_i - y_i)^2\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_i}(x_i^* - y_i) + \rho(x_i^* - y_i)^2\right).$$

Непосредственно из теоремы 1 вытекает следующее достаточное условие минимума.

Теорема 2. Для того чтобы точка $x^\circ = (x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ) \in B_n$ была точкой минимума на множестве B_n функции $\varphi(x)$, достаточно, чтобы

$$(\nabla\varphi(x^\circ) + \rho(x^* - x^\circ), x^* - x^\circ) = 0, \tag{9}$$

где x^* удовлетворяет соотношениям (8) при $y = x^\circ$.

Соотношение (9) с учетом (5) имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(2\sum_{j=1}^{n} w_{ij}x_j^\circ + v_i + \rho(x_i^* - x_i^\circ)\right)(x_i^* - x_i^\circ) = 0,$$

где

$$x_i^* = \begin{cases} -1/2, & \text{если } x_i^\circ - \frac{1}{2\rho}\left(2\sum_{j=1}^{n} w_{ij}x_j^\circ + v_i\right) \leq 0, \\ 1/2 & \text{- в противном случае.} \end{cases}$$

Достаточные условия равенства $x^* = x^\circ$ дает

Следствие. Пусть при каждом отдельно взятом значении $i = 1, 2, \ldots, n$ выполняется одно из неравенств:

$$\sum_{j=1}^{n} |w_{ij}| \le \rho + v_i \ , \tag{10}$$

$$\sum_{j=1}^{n} |w_{ij}| \le \rho - v_i \ . \tag{11}$$

Тогда решение задачи (5)-(6) имеет вид:

$$x^{\circ} = (x_1^{\circ}, x_2^{\circ}, \ldots, x_n^{\circ}),$$

где $x_i^{\circ} = -1/2$, если выполняется условие (10), и $x_i^{\circ} = 1/2$, если выполняется условие (11).

Задачу оптимизации квадратичной функции на B_n предлагается решать с использованием декомпозиционных методов, основанных на последовательной релаксации и редукции задачи. Эффективность решения задач квадратичной оптимизации на B_n зависит от выбора методов решения релаксационных задач и способов усиления полученных на этой основе оценок [2]. В силу представления множества B_n как пересечения куба и сферы, возможны два вида релаксации: первый вид - оптимизация функции $\varphi(x)$ вида (5) на кубе Q_n^2, второй вид - оптимизация $\varphi(x)$ на сфере S_n.

Для релаксационной задачи первого вида предлагается использовать методы условного градиента (Франка - Вульфа) и проекции градиента. Выбор этих методов связан с простотой их реализации за счет возможности представления в явном виде решения вспомогательных задач. Однако несмотря на простоту решения релаксационной задачи на многограннике Q_n^2 данный подход оказывается малоэффективным, если безусловный минимум квадратичной функции является внутренней точкой куба. В этом случае целесообразно использовать решение релаксационной задачи на сфере S_n, которое описано в [3]. Решение релаксационной задачи может служить нижней оценкой минимума функции на B_n. Тем не менее эта оценка может быть усилена при помощи соотношения (7). Достаточное условие (9) может служить одним из критериев останова при реализации различных схем ветвления.

Поступила в ред.-изд. отдел
24 июля 1990 г.

Литература

1. Карманов В.Г. Математическое программирование. - М.: Наука, 1980.

2. Шор Н.З. Квадратичные оптимизационные задачи // Техническая кибернетика, 1987, № 1.

3. Яковлев С.В., Гребенник И.В., Стоян Е.Ю. Решение одного класса задач назначения геометрических объектов // Математическое и электронное моделирование в машиностроении. - Киев: Ин-т кибернетики АН УССР. - 1989. - С. 19-24.