Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1990 г., вып. 30

УДК 519.1

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ НА ПОДСТАНОВКАХ ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНЫХ КЛАССОВ МАТРИЦ

А.И.Сердюков

Рассмотрим метрическое пространство (R^m, ρ), в котором метрика задается с помощью нормы $\|\circ\|$ следующим образом:

$$\rho(x_i, x_j) = \|x_i - x_j\|, \; x_i, x_j \in R^m .$$

Введем обозначения: $X_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ – набор из n точек в R^m; S_n – множество всех подстановок на элементах $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$; $C_n = \{ s \in S_n /$ s состоит из одного цикла$\}$; при четном n $T_n = \{s \in S_n /$каждый цикл в s содержит ровно два элемента$\}$;

$$\rho(s, X_n) = \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i, x_{s(i)}), \; s \in S_n .$$

$$\rho(\bar{S}_n, X_n) = \max_{s \in \bar{S}_n} \rho(s, X_n), \; \bar{S}_n \subseteq S_n .$$

Очевидно, что $\rho(C_n, X_n) \leq \rho(S_n, X_n)$ и для четного n $\rho(C_n, X_n) \leq \rho(T_n, X_n) \leq \rho(S_n, X_n)$. Если норма $\|\bullet\|$ евклидова, то для любого $X_n \subset R^m$ известно [1], что

$$\rho(C_n, X_n)/\rho(T_n, X_n) \geq 1 - a_m/n^{2/m+1}, \; a_m \text{ не зависит от } n .$$

Там же [1] предложен полиномиальный алгоритм, позволяющий находить асимптотически точные решения (при $n \to \infty$) задачи коммивояжера на максимум в пространстве (R^m, ρ) с метрикой, порожденной евклидовой нормой.

В дальнейшем будем считать, что метрика ρ порождена произвольной нормой.

В настоящей работе показано, что для любого набора точек X_n из R^2 n четное. Имеет место равенство (теорема 2):

$$\rho(S_n, X_n) = \rho(T_n, X_n) .$$

Приводится также описание алгоритма решения задачи о максимальном совершенном паросочетании в пространстве (R^2, ρ) на множестве точек X_n (задачи отыскания хотя бы одного элемента $s \in arg\, \rho(T_n, X_n)$, n четное).

Трудоемкость поиска решения задачи данным алгоритмом (среди известных) минимальна.

Итак, рассмотрим пространство (R^2, ρ) и множество точек $X_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ в R^2, $n = 2k$. Любую подстановку $s \in S_n$ (набор циклов в S) будем отождествлять с набором циклов $f(S)$ в R^2:

для любого цикла $C = \begin{pmatrix} i_1 \, i_2 \ldots i_t \\ i_2 \, i_3 \ldots i_1 \end{pmatrix}$ из S положим

$$f(C) = \{[x_{i_1}, x_{i_2}], [x_{i_2}, x_{i_3}], \ldots, [x_{i_t}, x_{i_1}]\},$$

где $[x_{i_j}, x_{i_{j+1}}]$ – отрезок между точками в R^2 (сторона цикла $f(C)$), $1 \leq j \leq t$, $i_{t+1} = i_1$.

Будем говорить, что для множества X_n выполнено

Условие А, если прямые, образованные всеми парами точек из X_n, попарно различны и никакие три из них не пересекаются в одной точке.

Рассмотрим подстановку $s_0 \in S_n$, которая содержит по крайней мере два нечетных цикла C_1 и C_2 (каждый с нечетным числом элементов):

$$C_1 = \begin{pmatrix} i_1 \, i_2 \ldots i_{2p+1} \\ i_2 \, i_3 \ldots i_1 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} j_1 \, j_2 \cdots j_{2q+1} \\ j_2 \, j_3 \cdots j_1 \end{pmatrix}, \; p \geq 1, q \geq 1.$$

Имеет место

Лемма [2]. Если для X_n выполнено условие А, то существуют два отрезка в R^2, являющиеся сторонами выпуклого четырехугольника, такие, что первый из них является стороной цикла $f(C_1)$, второй – $f(C_2)$.

Теорема 1. Для любого множества X_n из R^2 циклы $f(C_1)$ и $f(C_2)$ содержат отрезки $[x_{i_v}, x_{i_{v+1}}]$, $[x_{j_w}, x_{j_{w+1}}]$, для которых $1 \leq v \leq 2p+1$, $1 \leq w \leq 2q+1$ (здесь $i_{2p+2} = i_1$, $j_{2q+2} = j_1$) такие, что

$$\rho(x_{i_v}, x_{i_{v+1}}) + \rho(x_{j_w}, x_{j_{w+1}}) \leq \max\{\rho(x_{i_v}, x_{j_w}) + \rho(x_{i_{v+1}}, x_{j_{w+1}}), \rho(x_{i_v}, x_{j_{w+1}}) + \rho(x_{i_{v+1}}, x_{j_w})\}. \tag{1}$$

(Заметим, что отрезки в данном случае могут быть вырожденными.)

Доказательство. Если X_n удовлетворяет условию А, то теорема 1 доказана (такими отрезками служат стороны циклов, фигурирующие в условиях леммы). Пусть для X_n условие А не выполняется и для любой пары сторон (по одной из циклов $f(C_1)$ и $f(C_2)$) нарушается неравенство (1). Обозначим через $\hat{\varepsilon}$ минимальную разность между левой и правой частями (1) по всем таким парам. Возьмем $\varepsilon < \hat{\varepsilon}/8$ и рассмотрим набор точек $X'_n = \{x'_1, x'_2, \ldots, x'_n\}$, для которых условие А выполняется и

$$\rho(x_i, x_i') \leq \varepsilon, \quad 1 \leq i \leq n. \tag{2}$$

По лемме, существуют отрезки $[x'_{i_v}, x'_{i_{v+1}}]$, $[x'_{j_w}, x'_{j_{w+1}}]$, удовлетворяющие (1). Без ограничения общности положим, что

$$\rho(x'_{i_v}, x'_{i_{v+1}}) + \rho(x'_{j_w}, x'_{j_{w+1}}) \leq \rho(x'_{i_v}, x'_{j_w}) + \rho(x'_{i_{v+1}}, x'_{j_{w+1}})$$

или, учитывая (2),

$$\rho(x_{i_v}, x_{i_{v+1}}) + \rho(x_{j_w}, x_{j_{w+1}}) \leq \rho(x'_{i_v}, x'_{i_{v+1}}) + \rho(x'_{j_w}, x'_{j_{w+1}}) + 4\varepsilon \leq$$
$$\leq \rho(x'_{i_v}, x'_{j_w}) + \rho(x'_{i_{v+1}}, x'_{j_{w+1}}) + 4\varepsilon \leq \rho(x_{i_v}, x_{j_w}) + \rho(x_{i_{v+1}}, x_{j_{w+1}}) + 8\varepsilon <$$
$$< \rho(x_{i_v}, x_{j_w}) + \rho(x_{i_{v+1}}, x_{j_{w+1}}) + \hat{\varepsilon}.$$

Серия последних неравенств противоречит выбору $\hat{\varepsilon}$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Для любого набора точек X_n из R^2 справедливо равенство

$$\rho(S_n, X_n) = \rho(T_n, X_n), \qquad n \text{ четное.} \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $S_0 \in \arg \rho(S_n, X_n)$. Если $S_0 \in T_n$, то справедливо (3), поскольку тогда $\rho(T_n, X_n) \geq \rho(S_0, X_n) = \rho(S_n, X_n)$, а обратное неравенство выполняется всегда. Пусть $S_0 \notin T_n$. Без ограничения общности считаем, что S_0 не содержит петель (в противном случае можно перейти к подстановке S_1, получаемой из S_0 после объединения всех петель и одного из циклов в цикл, для которой $\rho(S_1, X_n) \geq \rho(S_0, X_n)$). Если S_0 не содержит нечетных циклов, то $\rho(T_n, X_n) \geq \rho(S_0, X_n)$ и теорема доказана. (Достаточно воспользоваться симметрией матрицы попарных расстояний между точками из X_n и в каждом цикле через один вдоль обхода цикла выбрать половину отрезков с большей суммарной длиной. Тогда подстановка $S_1 \in T_n$, в которой циклам длины два соответствуют удвоенные выбранные отрезки, удовлетворяет условию $\rho(S_1, X_n) \geq \rho(S_0, X_n)$).

Пусть $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_{2t}$ – полный набор нечетных циклов в S_0 (их количество четное). Воспользовавшись теоремой 1 для каждой пары циклов (C_1, C_2), $(C_3, C_4), \ldots, (C_{2t-1}, C_{2t})$, перейдем к подстановке S_2, в которой все циклы четные и $\rho(S_2, X_n) \geq \rho(S_0, X_n)$. Следовательно, как отмечалось выше(существует подстановка $S_3 \in T_n$), $\rho(S_3, X_n) \geq \rho(S_2, X_n)$, и теорема доказана.

Опишем алгоритм построения паросочетания максимального веса на множестве X_n в (R^2, ρ) (отыскания подстановки $\tilde{S} \in \arg \rho(T_n, X_n)$, n четное). Алгоритм состоит из четырех этапов.

Первый этап. Ищется элемент $S_0 \in \arg \rho(S_n, X_n)$, например, с помощью алгоритма, описанного в [3].

Второй этап. Переходим к подстановке $S_1 \in \arg \rho(S_n, X_n)$, не имеющей петель (петли в подстановке S_0 могут появляться, в частности, когда в X_n имеются совпадающие точки). Множество нечетных циклов в S_1 разбивается попарно: $(C_1, C_2), \ldots, (C_{2t-1}, C_{2t})$.

Третий этап. Каждая пара $f(C_{2i-1})$, $f(C_{2i})$ объединяется в один цикл. (Путем полного перебора по всем отрезкам в циклах $f(C_{2i-1})$, $f(C_{2i})$ отыскиваются отрезки, удовлетворяющие теореме 1. Такие отрезки обязательно найдутся. Заменяем в рассматриваемых циклах выбранные отрезки парой отрезков, доставляющих максимум в правой части (1).) В результате будет построена подстановка $S_2 \in \arg(S_n, X_n)$, не имеющая нечетных циклов.

Четвертый этап. Строится искомая подстановка $\tilde{S} \in T_n$ в соответствии с правилами, описанными выше (при доказательстве теоремы 2).

Оптимальность построенного решения задачи о паросочетании максимального веса на X_n данным алгоритмом гарантируется теоремами 1 и 2. Трудоемкость алгоритма на первом этапе при его реализации совпадает с трудоемкостью решения задачи о назначениях (поиске $S_0 \in \arg \rho(S_n, X_n)$) и не превышает $O(n^3)$ операций. Описание и обоснование алгоритмов решения задачи о назначениях, приведенных в литературе, представляются гораздо проще по сравнению с описанием и обоснованием алгоритмов решения задачи о паросочетании максимального веса. Трудоемкость реализации остальных этапов может расти пропорционально n^2.

Поступила в ред.-изд. отдел
6 июня 1990 г.

Литература

1. Сердюков А.И. Асимптотически точный алгоритм для задачи коммивояжера на максимум в евклидовом пространстве // Методы целочисленной оптимизации (Управляемые системы). - Новосибирск, 1987. - Вып. 27. - С. 79-87.

2. //Квант. - М.: Наука, 1987. - № 12. - С. 26.

3. Диниц Е.А., Кронрод Н.А. Один алгоритм решения задачи о назначениях // Докл. АН СССР. - 1969. - Т. 189(1). - С. 23-25.